

## História da Matemática e a formação inicial de professores: um estudo acerca dos conhecimentos de professores de Matemática

**Bruno Cavalcante Martins Noronha**

Universidade Federal de Itajubá

Itajubá, MG — Brasil

✉ [bruno.cmn@hotmail.com](mailto:bruno.cmn@hotmail.com)

🆔 0000-0003-1721-9861

**Mariana Feiteiro Cavalari**

Universidade Federal de Itajubá

Itajubá, MG — Brasil

✉ [mfcavalari@unifei.edu.br](mailto:mfcavalari@unifei.edu.br)

🆔 0000-0003-2776-971X



2238-0345 

10.37001/ripem.v15i2.4403 

Recebido • 10/12/2024

Aprovado • 29/04/2025

Publicado • 01/05/2025

Editor • Gilberto Januario 

**Resumo:** Nesta investigação, buscou-se identificar e analisar conhecimentos de professores de Matemática mobilizados por licenciandos em Matemática no estudo de três episódios históricos. Para tanto, foi criado um grupo de estudos constituído por nove futuros professores de Matemática. Foram realizados cinco encontros desse grupo, os quais foram gravados e transcritos. Buscou-se identificar, nas discussões realizadas nos encontros desse grupo, indícios da mobilização de conhecimentos de professores de Matemática. As análises foram conduzidas considerando três domínios desse conhecimento, a saber: Conhecimento do Conteúdo (CK), Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK) e Conhecimento Curricular. Os resultados indicam que o estudo de episódios históricos da Matemática pode contribuir para a mobilização de conhecimentos de professores de Matemática, já que foram encontrados indícios da mobilização de conhecimentos relacionados ao CK e ao PCK nas discussões realizadas nesse grupo de estudos.

**Palavras-chave:** Conhecimento de Professores. Formação Inicial de Professores. História da Matemática. Episódios Históricos da Matemática.

### History of Mathematics and initial teacher education: a study on mathematics teacher knowledge

**Abstract:** This study aimed to identify and analyze the knowledge of mathematics teachers mobilized by undergraduate mathematics students in the study of three historical episodes. To this end, a study group consisting of nine prospective mathematics teachers was created. Five meetings were held with this group, which were recorded and transcribed. The goal was to identify evidence of the mobilization of mathematics teacher knowledge in the discussion held in this group. The analyses were conducted considering three domains of knowledge, namely: Content Knowledge (CK), Pedagogical Content Knowledge (PCK) and Curricular Knowledge. The results indicate that the study of episodes of the history of Mathematics can contribute to the mobilization of mathematics teacher knowledge, in light of the evidence of mobilization of knowledge related to CK and PCK found throughout the discussions held in this study group.

**Keywords:** Teacher Knowledge. Initial Teacher Education. History of Mathematics. Episodes of the History of Mathematics.

### Historia de la Matemática y la formación inicial del docente: un estudio acerca de los conocimientos de los profesores de Matemática

**Resumen:** En esta investigación se buscó identificar y analizar conocimientos de los profesores

de matemáticas movilizadas por graduados en matemáticas en el estudio de tres episodios históricos. Para ello, se creó un grupo de estudio compuesto por nueve futuros profesores de matemáticas. Se realizaron cinco encuentros de este grupo los cuales fueron grabados y transcritos. En las conversaciones mantenidas durante los encuentros, buscamos identificar evidencias de la movilización de los conocimientos de los profesores de matemáticas. Los análisis fueron realizados considerando tres dominios del conocimiento, entre ellos: Conocimiento del Contenido (CK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y Conocimiento del Plan de Estudios. Los resultados indican que el estudio de episodios históricos de la matemática puede contribuir a la movilización de conocimientos de profesores de matemáticas, ya que fueron encontradas evidencias de la movilización de conocimientos relacionados al CK y al PCK en los encuentros realizados por el grupo de estudios.

**Palabras clave:** Conocimiento de Docentes. Formación Inicial del Docente. Historia de la Matemática. Episodios Históricos de la Matemática.

## 1 Introdução

As relações entre a História da Matemática (HM) e a Educação Matemática têm sido objeto de investigações realizadas por diversos pesquisadores ao longo das últimas décadas, tanto no cenário nacional quanto no internacional.

Nesse contexto, no Brasil, podemos identificar um crescimento no interesse pelas relações entre HM e Formação de Professores. Para Cavalari (2019), tal situação pode ser evidenciada pelo acréscimo da oferta de disciplinas voltadas à HM em cursos de formação de professores de Matemática e também pelo aumento de produções acadêmicas que relacionam a HM à formação de professores.

Podemos, de fato, encontrar variados autores brasileiros que evidenciam contribuições ou potencialidades da HM para a formação de professores de Matemática (Cavalari, 2019; Araman, 2011; Araman & Batista, 2013; Balestri, 2008; Balestri & Cyrino, 2010; Barbin, 2000; Brito, 2007; Cyrino & Corrêa, 2009; Mendes, 2010).

As contribuições da HM para a formação de professores, apresentadas na literatura nacional e internacional, podem, de modo sintético, ser reunidas em três argumentos. O primeiro indica que o estudo da HM pode oferecer elementos que permitam uma melhor compreensão de conceitos e teorias matemáticas (Barbin, 2000); o segundo aponta que o conhecimento da HM possibilita um melhor entendimento acerca da natureza da Matemática (Araman, 2011), que contribui para o desenvolvimento de uma visão mais ampla da Matemática (Barbin, 2000) e; por fim, o terceiro argumento afirma que o conhecimento acerca da HM pode influenciar a (futura) prática pedagógica do professor em formação (Balestri, 2008).

Embora possamos encontrar muitos trabalhos que apresentam essas contribuições da HM para a formação de professores, ainda são pouco numerosos, no cenário nacional, as investigações que analisam as contribuições do estudo de aspectos da HM para o desenvolvimento ou a mobilização de conhecimentos de professores.

Destacamos que os conhecimentos de professores, tais como a base de Conhecimento Docente proposta por Shulman (1986, 1987) e, especificamente no caso do professor de Matemática, o Conhecimento Matemático para o Ensino (do inglês: *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT) apresentado por Ball, Thames e Phelps (2008) são referenciais relevantes e muito utilizados no campo de formação de professores no Brasil (Giroto Junior, 2015; Moriel Jr. & Wielewski, 2017; Patrono & Ferreira, 2021).

Com base nesta relevância e na referida escassez na literatura, desenvolvemos a presente

investigação com o objetivo de identificar e analisar os conhecimentos de professores de Matemática mobilizados por licenciandos em Matemática ao estudar episódios da História da Matemática<sup>1</sup>. Estávamos especialmente interessados nos conhecimentos mobilizados ao estudar três episódios históricos<sup>2</sup>, a saber: (i) o surgimento das geometrias não-euclidianas; (ii) o surgimento do cálculo infinitesimal; e (iii) o surgimento dos números complexos.

Para tanto, investigamos os conhecimentos mobilizados por nove licenciandos em Matemática de uma Universidade Federal ao estudar e debater estes episódios históricos em um grupo de estudos.

Para apresentação dos resultados desta investigação, expomos inicialmente algumas considerações sobre as contribuições da HM para a formação inicial de professores e sobre os conhecimentos de professores. Posteriormente, descrevemos o percurso metodológico e apresentamos os conhecimentos de professores de Matemática mobilizados no estudo dos episódios históricos.

## 2 Contribuições da História da Matemática na formação de professores

A inclusão da HM na formação de professores, conforme já explicitado, pode contribuir para que os futuros docentes compreendam conceitos e teorias matemáticas. Já que a HM pode oferecer elementos que os auxiliem a (res)significar conceitos matemáticos e estabelecer conexões entre conceitos matemáticos de diferentes “áreas” da Matemática (Araman, 2011; Balestri, 2008). Além disto, o estudo da HM pode auxiliar o (futuro) professor a entender a Matemática como uma área de conhecimento que está intrinsecamente ligada a outras áreas, despertando, assim, uma visão interdisciplinar do conteúdo matemático (Araman, 2011; Balestri, 2008, Brito, 2007, Tzanakis *et al.*, 2000).

O estudo da HM pode contribuir, também, para o entendimento de aspectos da Natureza do conhecimento matemático, uma vez que auxilia a compreensão da Matemática como uma atividade humana, fruto do trabalho de homens e mulheres, e que, portanto, sofre influência de fatores intrínsecos à própria Matemática e externos a ela (Tzanakis *et al.*, 2000), como por exemplo, fatores culturais e sociais.

Nesse sentido, D’Ambrosio (2007) enfatiza que o estudo da HM possibilita que o futuro professor desenvolva uma visão da atividade matemática como um processo sociocultural. Dessa forma, tal estudo pode contribuir para o reconhecimento de que diferentes povos, em diferentes épocas, produziram conhecimento matemático, e portanto, a atividade matemática não é uma exclusividade dos povos ocidentais (D’Ambrosio, 2007; Brito, 2007; Tzanakis *et al.* 2000). A compreensão desses aspectos da Matemática contribui para a descaracterização do papel “seletivo” atribuído ao conhecimento matemático (Vianna, 1995).

O estudo da HM e a compreensão da Matemática como uma atividade humana ainda possibilita o entendimento de que erros, dúvidas, incertezas e controvérsias fizeram e fazem parte do processo de construção do conhecimento matemático (Tzanakis *et al.* 2000). Possibilita-se, assim, a conscientização de que a Matemática está em constante desenvolvimento, não sendo, portanto, um conhecimento “pronto e acabado” (Saito, 2013).

Além disso, compreende-se que o estudo de temáticas da HM pode auxiliar o professor a conhecer pressupostos epistemológicos, teológicos e axiológicos que fundamentam o

<sup>1</sup> Este artigo é recorte de uma dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências da Universidade Federal de Itajubá, escrita pelo primeiro autor e orientada pela segunda autora.

<sup>2</sup> Entendemos como episódios históricos momentos ou situações que contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

conhecimento matemático (Brito, 2007).

Assim, o conhecimento acerca da HM pode proporcionar ao futuro professor uma conscientização, uma reflexão e um entendimento sobre Matemática que, posteriormente, pode influenciar a forma de ensinar a Matemática (Barbin, 2000).

O conhecimento de tópicos da HM pode, ainda, influenciar a (futura) prática pedagógica do professor em formação, à medida que possibilita o contato com problemas, métodos, ideias e materiais que favorecem a aprendizagem matemática e que podem ser levados à sala de aula (Balestri, 2008; Miguel, 1997). Além disso, o estudo da HM fornece elementos que possibilitam entender que as dificuldades observadas ao longo da história de um determinado conteúdo/conceito podem, também, ser percebidas pelos estudantes em sala de aula (Tzanakis *et al.*, 2000); para responder indagações que possam surgir em sala de aula (Balestri, 2008; Miguel, 1997) e; para compreender que conceitos/conteúdos aparentemente simples são avançados e se configuram como resultados de um gradual desenvolvimento (Tzanakis *et al.*, 2000).

Destaca-se, entretanto, que existem diferentes histórias da Matemática (Saito, 2013) e variadas formas de incluí-las nos cursos de formação de professores. Tzanakis *et al.* (2000), por exemplo, apresentam três formas, distintas, porém complementares, de inserir a HM no ensino de Matemática e na formação de professores. A primeira é voltada a ensinar aspectos da própria HM, por meio da inserção direta de informações históricas. A segunda é focada no ensino de tópicos matemáticos, por meio de uma abordagem de ensino de Matemática inspirada na história e, por fim, a terceira é voltada ao desenvolvimento de uma “consciência matemática”, que envolve conhecer, por meio da HM, aspectos intrínsecos e extrínsecos (incluindo aspectos sociais e culturais) da atividade matemática.

Já Borges e Cavalari (2021), ao analisarem propostas didáticas em teses e dissertações brasileiras, que apresentam aspectos relacionados à HM na formação inicial de professores, evidenciaram que as atividades presentes em tais propostas eram voltadas tanto ao ensino de conceitos/conteúdos matemáticos quanto ao ensino da HM (especificamente da HM ou da HM no ensino de Matemática). As autoras identificaram que, nas atividades voltadas ao ensino da HM, os elementos históricos eram abordados por meio de textos, artigos, filmes, entre outras fontes e, posteriormente, era solicitada a realização de atividades como planos de aulas, resumos, fichamentos, entre outros.

Tendo como referência as contribuições da HM para a formação de professores e as diferentes formas de incluir<sup>3</sup> a HM nesses cursos, foi, conforme já apontado, desenvolvido um grupo de estudos no qual foram estudados e debatidos episódios históricos referentes às geometrias não-euclidianas; ao cálculo infinitesimal e; aos números complexos. Os dados obtidos ao longo desse grupo de estudos foram analisados tendo como referência os conhecimentos de professores de Matemática que serão apresentados no item subsequente.

### 3 Considerações sobre conhecimentos de professores

Toda profissão possui um *corpus* de conhecimentos específicos que caracteriza e delimita seus agentes como detentores de tais conhecimentos, possibilitando que os exerçam perante a sociedade (Fernandez, 2015). Nesse sentido, a profissão docente também demanda de uma base de conhecimentos (Shulman, 1986).

Nos anos 1980, diversos pesquisadores, inseridos no movimento de reforma

<sup>3</sup> Sobretudo as atividades voltadas ao ensino da HM de Borges e Cavalari (2021) e a primeira e terceira perspectiva de Tzanakis *et al.* (2000).

educacional, apoiaram-se no pressuposto da existência de uma base de conhecimentos necessários para ensinar (Crispim & Sá, 2019). Nesse contexto, destacamos os trabalhos elaborados por Shulman (1986, 1987).

Shulman (1986) propôs três categorias distintas de conhecimento do conteúdo: Conhecimento do Conteúdo; o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e; por fim, o Conhecimento Curricular. Posteriormente, em 1987, o mesmo autor refinou tais conhecimentos e propôs sete categorias para a base de conhecimento profissional docente, são elas: (i) Conhecimento de conteúdo; (ii) Conhecimento pedagógico geral; (iii) Conhecimento curricular; (iv) Conhecimento dos estudantes e suas características; (v) Conhecimento de contextos educacionais; (vi) Conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais, e seus fundamentos filosóficos e históricos; e, por fim, o (vii) Conhecimento pedagógico do conteúdo.

Para Shulman (1987), o Conhecimento de Conteúdo refere-se ao domínio que o professor possui sobre os conceitos e conteúdos próprios da disciplina que leciona. Nesse sentido, no caso do professor de Matemática, entendemos que o conhecimento do conteúdo envolve o “Conhecimento de Matemática” que definimos baseados nas ideias de Cutrera (2003)<sup>4</sup> sobre o “Conhecimento em Ciência”. Assim, o conhecimento de Matemática pode ser compreendido como sendo o conhecimento acerca dos conteúdos matemáticos, tais como os axiomas, postulados, teoremas, conceitos, definições, representações, notações e métodos que são utilizados para a solução de problemas que são provenientes da própria Matemática, bem como problemas cotidianos, escolares e de outras ciências.

Shulman (1987) ressalta que o Conhecimento de Conteúdo, também, inclui o conhecimento de estruturas do assunto, definida por pesquisadores como Joseph Schwab. Shulman (1986) afirma que essas estruturas são indicadas como: estruturas substantivas e estruturas sintáticas. A estrutura substantiva se refere às maneiras com que os conceitos e princípios básicos de uma disciplina são organizados com objetivo de incorporar seus fatos e a estrutura sintática se relaciona à forma como são estabelecidas as verdades e falsidades, validade ou nulidade dos conhecimentos de uma disciplina.

Desse modo, o professor deve ser capaz de entender e definir: (a) as verdades consideradas em um domínio de conhecimento; (b) motivos pelos quais uma proposição é considerada verdadeira e como essa proposição se relaciona com outras; (c) compreender a razão que um determinado tópico é considerado fundamental na disciplina, enquanto outro pode ser considerado periférico. Nesse sentido, no caso do professor de Matemática, entendemos que o conhecimento do conteúdo envolve o “Conhecimento sobre Matemática” que definimos baseados nas ideias de Cutrera (2003)<sup>5</sup> sobre o “Conhecimento sobre Ciência”. Assim, o conhecimento sobre Matemática pode ser compreendido como sendo o conhecimento sobre o trabalho do matemático, suas motivações, as influências sociais, políticas, econômicas, científicas e culturais no desenvolvimento de teorias, além do papel fundamental da comunidade matemática no que se refere à aceitação, negação ou difusão de uma teoria.

Já o Conhecimento Curricular, segundo Shulman (1986), refere-se ao conhecimento do professor acerca do currículo; dos tópicos, materiais e recursos didáticos disponíveis para o ensino em um determinado nível, tendo em vista os objetivos a serem atingidos.

---

<sup>4</sup> O Conhecimento em Ciência é definido por Cutrera (2003, p. 1) como “conhecimento dos próprios conteúdos e dos métodos da ciência - isto é, leis, modelos, teorias, conceitos, técnicas e procedimentos experimentais- utilizados pelos cientistas” (Tradução nossa).

<sup>5</sup> Para ele, esse conhecimento diz respeito ao “empreendimento científico” e se refere ao “conhecimento sobre como os cientistas desenvolvem e usam o conhecimento científico – como decidem o que investigar, como obtêm e interpretam os dados científicos e como decidem se aceitam ou não os resultados publicados” (Cutrera, 2003, p. 1, tradução nossa).

O Conhecimento Pedagógico Geral se relaciona aos princípios e às estratégias de gerenciamento e organização de sala de aula (Shulman, 1987). Para Ballerini (2014), tal conhecimento exige do professor a realização de escolhas coerentes em sala de aula, transcendendo, portanto, o domínio do conhecimento do conteúdo e alcançando amplos objetivos no que diz respeito à educação.

Já o Conhecimento dos estudantes e suas características concerne ao entendimento do professor acerca do processo de aprendizagem dos estudantes, levando em consideração o contexto em que se encontram, suas particularidades, conhecimentos prévios, habilidades, interesses e aspirações (Ballerini, 2014).

De acordo com Shulman (1987), o Conhecimento de Contextos Educacionais é o conhecimento, por parte do professor, que perpassa desde o funcionamento do sistema escolar e gestão financeira até o conhecimento do contexto das características e do contexto sociocultural no qual a escola está inserida.

Por fim, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) que, segundo Shulman (1986), excede o domínio da matéria em si, de modo que se configura como o conhecimento da matéria para o ensino, ou seja, “amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional” (Shulman, 1987, p. 8, tradução nossa).

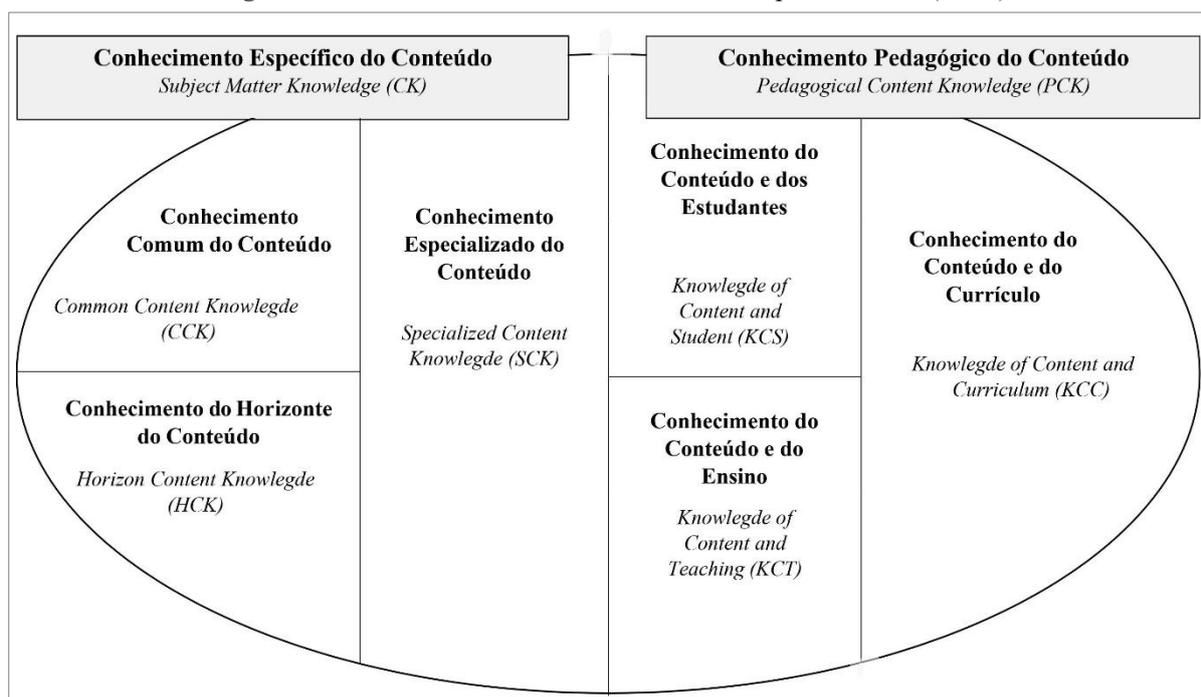
Tal conhecimento obteve destaque no meio acadêmico, devido à sua importância para a formação de professores e o desenvolvimento dos conhecimentos profissionais docentes, influenciando diversas investigações em várias regiões do mundo (Giroto Junior, 2015). Segundo Moriel Jr. & Wielewski (2017), as ideias de Shulman têm sido muito difundidas e utilizadas como aporte teórico em diversas áreas da Educação, contendo mais de 17 mil citações em investigações acadêmicas. Nesse sentido, pode ser compreendido como um referencial teórico adequado para investigações que buscam identificar e analisar os conhecimentos docentes de professores e futuros professores.

Destaca-se, entretanto, que a base de conhecimentos necessários para ensinar, desenvolvida por Shulman, não é específica para uma determinada área de conhecimento, tal como Geografia, Química, Física ou Matemática (Moriel Jr. & Wielewski, 2017). Um dos modelos especificamente voltados para conhecimentos de professores de Matemática é o Conhecimento Matemático para o Ensino (do inglês: *Mathematical Knowledge for Teaching*), conhecido na literatura por MKT, desenvolvido por Deborah Ball, Thames e Phelps.

De acordo com Ball *et al.* (2008, p. 395, tradução nossa), o Conhecimento Matemático para o Ensino pode ser compreendido como

o conhecimento matemático necessário para realizar o trabalho de ensinar matemática. [...] É concernente as tarefas envolvidas no ensino e as demandas matemáticas dessas tarefas. Porque ensinar envolve mostrar aos estudantes como resolver problemas, responder às perguntas dos alunos e verificar o trabalho dos alunos, demanda uma compreensão do conteúdo do currículo escolar.

Nesse sentido, para Ball *et al.* (2008) o Conhecimento Matemático para o Ensino é constituído de dois domínios de Conhecimentos, o Conhecimento Específico de Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK). Na figura 1, exposta a seguir, é apresentado um diagrama deste modelo.

**Figura 1:** Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)

Fonte: Traduzido de Ball *et al.* (2008, p. 403)

Como é possível perceber nesse diagrama, o Conhecimento Específico do Conteúdo é constituído por três subdomínios, a saber: Conhecimento Comum do Conteúdo, o Conhecimento Especializado do Conteúdo e o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo.

O Conhecimento Comum do Conteúdo foi definido por Ball *et al.* (2008) como a habilidade e o conhecimento matemático utilizado em outras áreas, de modo que não é exclusivo para o ensino. Sendo assim, é “Comum” não pelo fato de que todos devem possuir tal conhecimento, mas por ser um conhecimento usado em diversos outros ambientes. Como exemplo, os autores evidenciam que o professor deve ser capaz de resolver corretamente problemas matemáticos referentes à Educação Básica ou reconhecer uma resposta errônea para um problema.

O Conhecimento Especializado do Conteúdo refere-se ao conhecimento matemático e a habilidade exclusiva para o ensino. Desse modo, Ball *et al.* (2008) enfatizam que tal conhecimento matemático não é, normalmente, necessário em outros meios que não o ensino. Como exemplo, “avaliar se uma abordagem não padronizada funcionaria em geral” (Ball *et al.*, p. 400, tradução nossa).

O Conhecimento do Horizonte do Conteúdo se refere ao entendimento de como os conteúdos matemáticos se relacionam no currículo de outros anos escolares, para que, deste modo, facilite as conexões com ideias matemáticas que os estudantes aprenderão em anos posteriores. Patrono e Ferreira (2021) apontam que o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo foi incluído como parte do Conhecimento do Conteúdo, entretanto, reiteram que Ball *et al.* afirmaram não possuir certeza se tal conhecimento é parte do Conhecimento Comum do Conteúdo ou se pode ser utilizada em outros domínios.

Já o segundo domínio de conhecimento do MKT, o PCK foi, a princípio, constituído de três subdomínios: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes; o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino; e o Conhecimento do Conteúdo e do Curricular.

De acordo com os autores, o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes refere-se à combinação entre saber sobre os estudantes e sobre Matemática. Em tal subdomínio de conhecimento, o professor deve estar apto a interpretar as dúvidas emergentes e incompletas dos estudantes, ser capaz de antever quais serão as possíveis dificuldades dos estudantes (Martins & Curi, 2022).

O Conhecimento do Conteúdo e Ensino é a combinação entre saber ensinar e saber matemática. Nesse domínio, o professor deve escolher quais exemplos serão mais adequados para iniciar e para aprofundar um conteúdo e, também, avaliar as vantagens e desvantagens da utilização de metodologias para representar algum conteúdo específico. Para Ball *et al.* (2008, p. 402, tradução nossa) o Conhecimento do Conteúdo e Ensino é “um amálgama, envolvendo uma ideia ou procedimento matemático específico e a familiaridade com os princípios pedagógicos para ensinar aquele conteúdo específico”.

Por fim, o Conhecimento Curricular se refere ao proposto por Shulman em 1986 (Patrono & Ferreira, 2021). Este foi posicionado por Ball *et al.* (2008) neste domínio, porém os próprios autores evidenciam não ter certeza se pode ser considerado um domínio em si, se faz parte do subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino ou se pode ser incluído em outros subdomínios.

Para Patrono e Ferreira (2021), os estudos referentes ao MKT influenciaram e influenciam o desenvolvimento de investigações e propostas de formação ao redor do mundo. Nesse sentido, o MKT apresenta-se como um modelo teórico adequado para investigações que buscam identificar e analisar os conhecimentos docentes de professores e futuros professores de Matemática.

Essas ideias de Shulman (1986, 1987) e Ball *et al.* (2008), bem como as contribuições da HM para a formação de professores, apresentadas anteriormente, foram utilizadas para a elaboração de um conjunto de conhecimentos de professores de Matemática que nos permitisse compreender os conhecimentos mobilizados por licenciandos ao estudar episódios da HM.

Tal conjunto de conhecimentos é composto por três domínios, a saber: Conhecimento de Conteúdo; Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e; Conhecimento Curricular. O Conhecimento de Conteúdo é subdividido em Conhecimento de Matemática (CdM) - que envolve o “conhecimento de matemática” elaborado com base em Cutrera (2003) e as ideias referentes ao conhecimento comum e especializado do conteúdo do MKT - e Conhecimento sobre Matemática (CdM) - que se refere, sobretudo, ao “conhecimento sobre matemática” elaborado com base em Cutrera (2003). O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo se refere ao PCK do MKT e, portanto, foi subdividido em Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT). Por fim, o Conhecimento Curricular que envolve ideias do Conhecimento Curricular de Shulman (1986, 1987) e do Conhecimento do Horizonte do Conteúdo e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo do MKT.

No item subsequente, destinado a descrever o percurso metodológico da investigação, serão apresentadas mais informações sobre cada um desses domínios e subdomínios do conhecimento do professor de Matemática.

#### **4 Percurso metodológico da investigação**

Com vistas a atingir o objetivo da investigação foi criado um grupo, voltado ao estudo de três episódios históricos, que fora constituído por discentes da Licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal do sul de Minas Gerais. O autor e a coautora organizaram as atividades do grupo e participaram das reuniões.

Foram convidados a participar deste grupo futuros professores que já tinham cursado mais da metade do referido curso, sendo que nove estudantes se disponibilizaram a participar. Os participantes, juntamente com o autor, decidiram o período do curso e o formato *on-line* das reuniões.

Foram previstos e realizados cinco encontros entre maio a julho de 2022, sendo que nestes foram abordados os três episódios históricos escolhidos previamente pelo autor, sendo eles: surgimento das geometrias não-euclidianas; surgimento do cálculo infinitesimal; e surgimento dos números complexos. Cada encontro teve em média 90 minutos de duração, de modo que os quatro primeiros foram desenvolvidos remotamente, pela plataforma de encontros *on-line*, *Google Meet*, e o quinto, a pedido dos participantes, foi realizado na universidade, de forma presencial.

Ressaltamos que todos os participantes do grupo de estudos aceitaram participar da investigação. Para manter o anonimato destes licenciandos, foram elaborados códigos (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8 e P9) para identificá-los<sup>6</sup>.

No quadro 1, a seguir, apresentamos a estrutura dos encontros, bem como as atividades realizadas e os seus objetivos.

**Quadro 1:** Estrutura dos encontros

<b>Encontro 1 - 05 de maio</b>	
Atividades	Explicação detalhada da pesquisa; Apresentação dos participantes; Discussão com os participantes acerca de seus conhecimentos sobre HM e de suas potencialidades pedagógicas; Divisão dos grupos; Escolha do episódio histórico por cada grupo.
Duração	90 minutos
Objetivos	Conhecer os participantes; Apresentar a investigação; Entregar o TCLE; e Organizar as atividades do grupo de estudos.
<b>Encontro 2 - 19/05</b>	
<b>Tema: Geometria euclidiana e geometrias não-euclidianas</b>	
Atividades	Apresentação do grupo 1 sobre o tema e discussões acerca deste.
Duração	Cerca de 30 minutos para a apresentação e cerca de uma hora para discussões e reflexões.
Objetivos	Discutir existência de verdades absolutas na Matemática; Discutir as formas de validação do conhecimento na Matemática; Discutir a percepção de como é desenvolvido o trabalho de um matemático; e Abordar como esse episódio contribui para a formação docente.
<b>Encontro 3 – 26 de maio</b>	
<b>Tema: Cálculo infinitesimal</b>	
Atividades	Apresentação do grupo 2 sobre o tema e discussões acerca dele.
Duração	Cerca de 30 minutos para a apresentação e cerca de uma hora para discussões e reflexões.
Objetivos	Discutir os conceitos filosóficos da Matemática; Debater como o contexto histórico influencia na forma pela qual o próprio conhecimento é produzido; e Discutir como esse episódio contribui para a formação docente.
<b>Encontro 4 – 09 de junho</b>	
<b>Tema: Números complexos</b>	
Atividades	Apresentação do grupo 3 sobre o tema e discussões acerca do tema.
Duração	Cerca de 30 minutos para a apresentação e cerca de uma hora para discussões e reflexões.

<sup>6</sup> A realização desta investigação foi aprovada por um comitê de Ética em Pesquisa, por meio da Plataforma Brasil.

Objetivos	Discutir sobre como é produzido o conhecimento matemático e como esse conhecimento é validado dentro da comunidade matemática; e Debater como esse episódio contribui para a formação docente.
Encontro 5 – 07 de julho Fechamento das discussões do grupo de estudos	
Atividades	Fechamento das discussões do grupo de estudos.
Duração	Cerca de 90 minutos para discussão e reflexão.
Objetivos	Fazer um fechamento das discussões realizadas nos encontros anteriores.

**Fonte:** De autoria própria

Os estudantes foram divididos em três grupos, sendo que cada um ficou responsável por apresentar um dos episódios históricos. Essa apresentação poderia ser desenvolvida da forma como os estudantes se sentissem mais confortáveis. Em que pese esse fato, todas as equipes utilizaram eslaides para a apresentação daquelas que entenderam ser as principais informações obtidas por meio dos materiais disponibilizados previamente.

Merece destaque que, para que os participantes pudessem se preparar para as apresentações e discussões dos episódios históricos, o autor disponibilizou, antecipadamente, materiais para estudo (artigos, capítulo de livros e vídeos). Foi enfatizado que os estudantes poderiam consultar outros materiais à sua escolha.

No quadro 2, exposto a seguir, são apresentados os materiais selecionados pelo autor, que foram disponibilizados, previamente, aos participantes.

**Quadro 2:** Materiais selecionados e disponibilizados aos participantes

Material indicado	Referência
<b>Geometria Euclidiana e geometrias não-euclidianas</b>	
Leitura obrigatória	Capítulo de Livro: EVES, H. As primeiras décadas do século XIX e a Libertação da geometria e da álgebra. In: EVES, H. <b>Introdução à história da matemática</b> . Unicamp, 1995, p. 593 - 545.
	Artigo: SOUZA, A. C. C. Aspectos históricos das geometrias não-euclidianas. <b>Bolema</b> , Rio Claro-SP, v. 8, n.9, 1993.
	Trabalho em evento: GOMES, L. F. A história das geometrias não euclidianas para formação do professor: uma proposta baseada no uso de vídeos didáticos. <b>XX EBRAPEM</b> , nov. 2016.
<b>Cálculo Infinitesimal</b>	
Leitura obrigatória	Artigo: MENEGHETTI, R. C. G; BICUDO, I. O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. <b>Revista Brasileira de História da Matemática</b> , v. 2, n. 3, p. 103 – 118, 2002.
	Capítulo de livro: EVES, H. O cálculo e conceitos relacionados. In: EVES, H. <b>Introdução à história da matemática</b> . Unicamp, 1995, p. 417-445.
Leitura complementar	Capítulo de livro: WUSSING, H. La revolución científica: la elaboración de la matemática infinitesimal. In: WUSSING, H. <b>Lecciones de Historia de Las Matemáticas</b> . Siglo XIX de España Editores, 1989, p. 289-338.
<b>Números complexos</b>	
Leitura obrigatória	Artigo: SILVA, M. A. Da teoria à prática: uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos complexos. <b>Revista Brasileira de História da Ciência</b> , Rio de Janeiro, v. 4, n. 1, p. 79-91, jan-jun. 2011.
Vídeo obrigatório	ROQUE, T. História da Matemática para professores: Números negativos e complexos. Disponível em:

	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=xjG2Z5XgS4o&amp;list=PL4oMd-wbcGW80E3_ad9CG43br5CKsS39z&amp;index=16">https://www.youtube.com/watch?v=xjG2Z5XgS4o&amp;list=PL4oMd-wbcGW80E3_ad9CG43br5CKsS39z&amp;index=16</a> .
Leitura Complementar	Capítulo de livro: KATZ, V. Álgebra na Renascença. In: KATZ, V. J. <b>História da Matemática</b> . Editora Fundação Calouste Gulbenkian, 2010, p. 450-462.

**Fonte:** De autoria própria

A construção dos dados da investigação se deu a partir das informações obtidas no decorrer dos encontros do grupo de estudos. Para tanto, as reuniões foram gravadas, sendo que os encontros realizados de maneira remota foram gravados por meio do *software* de livre acesso, *Open Broadcaster Software (OBS)* e o encontro presencial foi gravado em áudio. Essas gravações foram, posteriormente, transcritas pelo autor. Ressaltamos que o autor também fez uso de um diário de anotações durante os encontros, com objetivo de registrar as interações e reflexões dos participantes.

As transcrições dos encontros e o diário do autor foram lidos e foram selecionados os comentários dos participantes que apresentavam indícios da mobilização de conhecimentos docentes.

Os trechos selecionados foram classificados nos domínios e subdomínios do conhecimento de professores elaborados para a investigação, são eles: Conhecimento do Conteúdo (e seus subdomínios CdM e CsM); Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (e seus subdomínios KCS e KCT) e o Conhecimento Curricular. Para a realização dessa classificação, elencamos os “conhecimentos” que compunham cada subdomínio. No quadro 3, exposto a seguir, apresentamos os conhecimentos que compõem cada subdomínio e as referências utilizadas para a sua elaboração.

**Quadro 3:** Domínio e subdomínio dos Conhecimentos de Professores de Matemática

Conhecimento do Conteúdo		
Subdomínios	Conhecimentos	Referência
Conhecimento de Matemática (CdM)	A1: ter compreensão e domínio de conceitos, definições, teoremas e procedimentos referentes à Matemática lecionada na educação básica; A2: ter compreensão de conceitos, definições, teoremas e procedimentos referentes à Matemática lecionada no ensino superior; A3: reconhecer uma resposta errada; A4: usar termos, notações e linguagem matemática corretamente; A5: reconhecer uma definição imprecisa; A6: explicar e justificar conceitos e ideias matemáticas; A7: reconhecer quando uma resolução particular é válida; A8: conhecer diferentes formas de solucionar um problema; A9: reconhecer os entes matemáticos envolvidos no uso de representações matemáticas; A10: conhecer e relacionar diferentes entes matemáticos; A11: relacionar o conhecimento matemático a outras áreas de conhecimento; A13: utilizar diferentes representações para entes matemáticos; A14: resolver problemas matemáticos corretamente.	Ball <i>et al.</i> (2008), Cutrera (2003) e Hurrell (2003).

<p>Conhecimento sobre Matemática (CsM)</p>	<p>B1: reconhecer como é o processo de avaliação e validação do conhecimento matemático;          B2: reconhecer e entender a importância da divulgação de pesquisas em meios de comunicação;          B3: reconhecer e entender que os contextos sociais, políticos e científicos interferem na produção do conhecimento matemático;          B4: entender e reconhecer como são organizados os conceitos matemáticos;          B5: reconhecer a inexistência de verdades absolutas na Matemática;          B6: reconhecer a importância da comunidade científica e de seus diversos níveis, na produção e divulgação do conhecimento;          B7: reconhecer e entender o trabalho individual e coletivo na produção do conhecimento matemático;          B8: entender e reconhecer distintas formas de conceber o conhecimento;          B9: ter conhecimento de que existem pessoas que não receberam os créditos por suas produções científicas;          B10: entender e reconhecer a linearidade e não linearidade do desenvolvimento do conhecimento matemático;          B11: reconhecer a relevância do uso de notações e de símbolos na Matemática.</p>	<p>Cutrerá (2003), Kuhn (2011) e Shulman (1986, 1987).</p>
<b>Conhecimento Pedagógico do Conteúdo</b>		
<b>Subdomínios</b>	<b>Conhecimentos</b>	<b>Referências</b>
<p>Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS)</p>	<p>C1: ter conhecimento sobre o que os estudantes, frequentemente, acham fácil, compreensível ou difícil;          C2: ter conhecimento sobre o que os estudantes, frequentemente, acham interessante e motivador;          C3: conhecer as dificuldades e os equívocos comuns dos estudantes quando estudam um determinado tópico da Matemática.</p>	<p>Ball <i>et al.</i> (2008) e Hurrell (2013).</p>
<p>Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT)</p>	<p>D1: saber sequenciar os conteúdos matemáticos que são comumente lecionados na educação básica;          D2: saber selecionar exemplos adequados para aprofundar o conteúdo matemático;          D3: saber selecionar exemplos apropriados para ilustrar o conteúdo.</p>	<p>Ball <i>et al.</i> (2008) e Hurrell (2013).</p>
<b>Conhecimento Curricular</b>		
<b>Subdomínio</b>	<b>Conhecimentos</b>	<b>Referências</b>
<p>Conhecimento Curricular</p>	<p>E1: conhecer o currículo e os conteúdos matemáticos que são lecionados na educação básica;          E2: articular tópicos matemáticos que estão sendo ensinados em um ano escolar com outros lecionados anteriormente ou posteriormente;          E3: articular tópicos matemáticos que estão sendo ensinados com outros de outras disciplinas no mesmo ano escolar.</p>	<p>Ball <i>et al.</i> (2008), Hurrell (2013) e Shulman (1986, 1987).</p>

**Fonte:** De autoria própria

No item subsequente, serão apresentados os indícios de conhecimentos mobilizados nas

falas dos participantes.

## 5 Conhecimentos de professores de Matemática mobilizados no estudo de episódios históricos

No decorrer dos encontros do grupo de estudos, identificamos indícios da mobilização de conhecimentos pertencentes aos domínios do Conhecimento do Conteúdo e do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo. Vale ressaltar que não identificamos, nas falas dos participantes, ao longo das discussões deste grupo, conhecimentos referentes ao Conhecimento Curricular.

Com relação aos Conhecimento do Conteúdo CK, identificamos indícios de mobilizações de conhecimentos referentes tanto ao CdM quanto ao CsM.

Os indícios de mobilização do CdM puderam ser identificados em 32 momentos ao longo dos encontros do grupo de estudos propostos nesta investigação. De modo geral, indícios do CdM foram evidenciados nas falas dos participantes ao usarem termos, notações e linguagem matemática de maneira correta ao longo de suas explicações, assim como ao relacionarem o conhecimento matemático a situações cotidianas e a outras áreas de conhecimento, conforme pode ser identificado na tabela 1.

**Tabela 1:** Frequência e conhecimentos referentes ao CdM por encontro

Conhecimento de Matemática		
Episódios	Frequência	Conhecimentos
Surgimentos das geometrias não-euclidianas	12	A1, A2, A6(3x), A10(2x), A11(5x)
Surgimento do cálculo infinitesimal	8	A6(4x), A11(4x)
Surgimento dos números complexos	5	A1, A4(2x), A6(2x)
Fechamento do grupo de estudos	7	A6, A11(6x)
<b>Total</b>	<b>32</b>	

**Fonte:** Dados da pesquisa

Destacamos que o episódio referente a uma história das geometrias não-euclidianas foi o que proporcionou discussões nas quais foram identificadas mais mobilizações de conhecimentos relativos ao CdM. A seguir, apresentamos um excerto de um comentário de um dos participantes no qual identificamos indícios da mobilização de conhecimentos referentes ao CdM.

No início do encontro sobre a história das geometrias não-euclidianas, estavam sendo discutidos os postulados existentes na formulação da geometria euclidiana, em especial o quinto postulado. Os participantes, de modo geral, relataram possuir conhecimentos referentes à geometria euclidiana, entretanto indicaram não possuir conhecimentos acerca das geometrias não-euclidianas. Esse já era um fato esperado, considerando que o curso que estes licenciandos realizavam prevê uma disciplina obrigatória sobre Geometria Euclidiana (a ser cursada no primeiro ano) e nenhuma disciplina acerca de Geometrias Não-Euclidianas.

Tendo em vista que foi o primeiro contato da maioria dos participantes com tal geometria, o autor deste artigo questionou os licenciandos se, de certo modo, as geometrias não-euclidianas desafiavam os “sentidos” que eles possuíam da Matemática ou da Geometria. De forma unânime, os participantes afirmaram que essas geometrias desafiavam os sentidos

referentes à Matemática que possuíam até aquele momento, de modo que ressaltaram ser “contra-intuitivo”. Baseado nessa discussão, o participante P3 evidenciou que:

**Excerto 1 [CdM: A1/A2<sup>7</sup>] – Eu acho que vai contra [...], por exemplo, você aprende que na geometria euclidiana é assim, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 (graus), aí você vai estudar outra matéria, aí o professor te fala “O que você aprendeu aqui está certo, mais existe uma outra geometria que dependendo dos 3 pontos que você pegar vai dar muito mais do que 180 graus”” (P3, Informação verbal, Encontro 2, grifo nosso).**

Nesse excerto de uma fala de P3, podemos identificar que ele conhece um teorema referente à Geometria Euclidiana, muito utilizado na educação básica, que é relativo ao fato de a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180 graus, demonstrando assim ter conhecimento referente a A1. Além disso, o participante mostra ter conhecimento de outra geometria diferente da euclidiana, na qual este resultado não é verdadeiro, apresentando assim conhecimento relativo a A2.

Além disto, destacamos que as discussões realizadas ao longo do encontro sobre os números complexos indicam que o estudo acerca das ideias de Jean-Robert Argand (1768 – 1822) possibilitou que os participantes percebessem um significado geométrico para as propriedades:  $(-1)x(-1) = 1$  e  $i x i = -1$ .

Essas informações apresentam indícios de que o estudo acerca de episódios históricos da Matemática possibilita que futuros professores (res)signifiquem e/ou ampliem seus conhecimentos acerca da Matemática que irão lecionar. Assim, está em consonância com a literatura.

Com relação ao CsM, identificamos indícios de 69 mobilizações, de modo que esse foi o subdomínio de conhecimento mais evidenciado nas falas dos participantes ao longo desta investigação. Podemos destacar que, no último encontro, que tinha por objetivo fazer um fechamento das discussões apresentadas nos encontros anteriores, o CsM foi por mais vezes evidenciado, totalizando 25 momentos.

No decorrer dos encontros, foi possível observar, nas falas dos participantes, conhecimentos referentes ao CsM, tais como: reconhecer como as verdades e falsidades são estabelecidas na Matemática; reconhecer como o conhecimento matemático é validado; entender distintas formas de conceber o conhecimento, particularmente o matemático; entender como o contexto social interfere nas pesquisas matemáticas; e a importância de uma comunidade de pesquisadores para o desenvolvimento de diversas áreas de estudo, em especial da matemática, conforme apresentado na tabela 2.

**Tabela 2:** Frequência e conhecimentos referentes ao CsM por encontro

Conhecimento sobre Matemática		
Episódios	Frequência	Conhecimentos
Surgimentos das geometrias não-euclidianas	14	B1(8x), B3(2x), B5, B10 (3x)
Surgimento do cálculo infinitesimal	15	B1(2x), B4(3x), B8(6x), B9(2x), B10(2x)
Surgimento dos números complexos	15	B1(4x), B2(2x), B3(5x), B6(2x),

<sup>7</sup> Para facilitar a sua identificação, utilizamos o negrito para destacar ideias referentes a A1 e sublinhado para A2.

		B8, B10
Fechamento do grupo de estudos	25	B1, B2(4x), B3(3x), B5, B6(4x), B8(8x), B10, B11(3x)
<b>Total</b>	69	

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentaremos, a seguir, três excertos de comentários dos participantes, nos quais foi possível identificar indícios da mobilização desse conhecimento.

Durante as discussões sobre um histórico das geometrias não-euclidianas, os participantes fizeram considerações sobre as leituras realizadas. O participante P8, ao descrever suas considerações acerca do material indicado para leitura, em especial do artigo de autoria de Souza (1993), destacou que:

**Excerto 2 [CsM: B10]** – [...] *tem o estudo dos fatos que mostra a importância do caminho historicamente, ele percorreu todos os pesquisadores, [...] ele utiliza o exemplo do quinto postulado, como que não se constrói somente com acertos, [...]* (P8, informação verbal, encontro 2, grifo nosso).

Nesse excerto, P8, baseado no texto, afirma que o desenvolvimento do conhecimento matemático nem sempre se constrói somente com acertos. Tal ideia corrobora a Tzanakis *et al.* (2000), que consideram que a HM fornece uma visão da Matemática como construção humana, desenvolvida através de esforços intelectuais e influenciada por diversos fatores internos e externos à própria Matemática, apresentando, nesse sentido, a Matemática como uma área de conhecimento em constante desenvolvimento com acertos e erros, e não como uma área de conhecimento pronta e acabada.

Essa ideia, relativa à influência de fatores externos à Matemática na produção do conhecimento, também pode ser identificada no excerto da fala de P8, apresentado a seguir:

**Excerto 3 [CsM: B3]** – *Então, você fica vendo assim: “Pô, se eu não tenho uma condição boa, eu não posso fazer Matemática?”. Isso reflete muito também naquela característica que te falei que quando estudei a história das mulheres na Matemática. Se você olhar as grandes matemáticas, elas sempre tiveram alguém na família, pai, tio, que fizeram Matemática, ou seja, era alguém que estava ali proporcionando. Quantas outras poderiam ter a capacidade de fazer algo mais, porém simplesmente não estavam na elite? A Matemática pode ter perdido grandes matemáticos, grandes conteúdos, enfim, simplesmente porque a pessoa não era da classe* (P8, informação verbal, encontro 3, grifo nosso).

O participante apresentou indícios da mobilização de B3 ao refletir sobre como o contexto social, político e científico podem interferir na produção do conhecimento matemático. Nesse excerto, em especial, P8 evidencia que os fatores socioeconômicos, ao longo da história, interferiram na possibilidade de as pessoas (em especial, mulheres) se dedicarem à produção do conhecimento matemático.

Outro momento em que indícios do CsM puderam ser identificados nos comentários dos participantes, ocorreu durante as discussões acerca do surgimento do cálculo infinitesimal. No contexto da discussão, os participantes foram questionados pelo autor sobre possíveis diferenças entre o cálculo desenvolvido por Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton. A participante P5 indicou que os resultados de ambos os estudiosos eram similares; entretanto, de acordo com a participante:

**Excerto 4 [CsM: B8] – [...] Leibniz era racionalista, então ele era mais rigoroso [...] matematicamente. Então, era meio que Newton trabalhava no campo das ideias e tinha seu próprio rigor, que não era exatamente o rigor matemático considerado “universal”, mais fácil de se ter, mais fácil de se utilizar, não era tão padronizado, quanto o do Leibniz, por exemplo** (P5, informação verbal, encontro 3, grifo nosso).

No excerto destacado acima, P5, ao apresentar informações acerca de um histórico do desenvolvimento do cálculo infinitesimal, em especial ao descrever a corrente filosófica racionalista, apresentou indícios de reconhecer distintas formas de conceber o conhecimento, referente ao B8.

Desse modo, pode-se entender que o estudo de episódios históricos da Matemática contribuiu para reflexões acerca da filosofia da Matemática, o que corrobora com Batista e Luccas (2004), que destacam que a história e a filosofia da Matemática podem auxiliar análises e considerações sobre o processo dinâmico que permeia a construção do conhecimento. Em uma perspectiva semelhante, Mathews (1995) afirma que o estudo de história e filosofia pode trazer benefícios à formação docente, pois contribui para um entendimento mais abrangente da natureza do conhecimento científico.

Nesse sentido, podemos destacar que esses resultados indicam que o estudo acerca de episódios históricos da Matemática tem o potencial de proporcionar aos licenciandos reflexões acerca da natureza do conhecimento matemático, desenvolvendo, assim, uma maior compreensão da construção do conhecimento matemático, temática pouco abordada no curso destes estudantes.

Com relação aos conhecimentos referentes ao domínio PCK, identificamos, ao longo dos encontros do grupo de pesquisa, indícios da mobilização de conhecimentos referentes aos subdomínios KCS e KCT.

Os relatos dos participantes, nos quais identificamos indícios da mobilização desses conhecimentos, aconteceram, em especial, aos finais dos encontros, mediante as indagações propostas pelo autor referentes às possibilidades didáticas dos episódios históricos.

Identificamos 22 falas dos participantes que apresentam indícios da mobilização de conhecimentos referentes ao KCS. Estes eram relacionados a ter conhecimento sobre o que os estudantes, frequentemente, acham fácil, compreensível ou difícil; e as suas dificuldades frequentes, como pode ser observado na tabela 3 a seguir:

**Tabela 3:** Frequência e conhecimentos referentes ao KCS por encontro

Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes		
Episódios	Frequência	Conhecimentos
Surgimentos das geometrias não-euclidianas	7	C1(5x), C2(2x)
Surgimento do cálculo infinitesimal	1	C2
Surgimento dos números complexos	5	C1(2x), C2(2x), C3
Fechamento do grupo de estudos	9	C1, C2(8x)
<b>Total</b>	<b>22</b>	

**Fonte:** Dados da pesquisa

Um momento em que conhecimentos referentes ao KCS puderam ser evidenciados nas

falas dos participantes ocorreu durante o encontro acerca do surgimento dos números complexos. O investigador questionou se a aceitação dos números complexos aconteceu rapidamente e o participante P2 indicou que não e, continuando a discussão, a participante P1 indicou:

**Excerto 5 [KCS: C1]** – *Só complementando o que o [nome do Participante 2] falou que demorou muito tempo [para que os números complexos fossem aceitos]. [...] Até hoje nas escolas, assim, para os alunos é muito difícil aceitar, difícil ver, muito difícil perceber isso* (P1, informação verbal, encontro 4, grifo nosso).

Nesse excerto, podemos perceber que a P1 tem conhecimento de que, de modo geral, os estudantes enfrentam dificuldades ao estudar os números complexos, demonstrando, assim, indícios do C1.

Além disto, a estudante relacionou essas ideias com aspectos da HM. Tal posicionamento está em consonância com Tzanakis *et al.* (2000, p. 206, tradução nossa) que indicam que a HM auxilia o docente a estar ciente de que “as dificuldades, ou, até mesmo obstáculos, que apareceram na história podem reaparecer na sala de aula”.

Alguns participantes destacaram que a apresentação da HM contribui tanto para que os estudantes se motivem, quanto para que eles aprendam os conteúdos matemáticos estudados, apresentando, assim, indícios dos conhecimentos C1 e C2, conforme pode ser observado nos excertos 5 e 6 expostos a seguir:

**Excerto 6 [KCS: C1/C2]** – *[...] dependendo do ano que você utilizar, você mostrar o surgimento da história das geometrias não-euclidianas, faz com que o aluno se prenda e se motive a não se prender, a estar sempre certo, sempre decorar, [...] E você falar isso, nos anos iniciais, motiva o aluno a entender mais, a se dedicar mais, a não seguir basicamente o passo a passo de cada coisa, ele compreende e pode fazer do jeito dele* (P8, informação verbal, encontro 1, grifo nosso).

**Excerto 7 [KCS: C1/C2]** – *E eu acho que uma abordagem histórica [referindo-se ao conteúdo de números complexos] daria mais bagagem para os alunos entenderem [...] e se aproximarem mais do conceito, terem mais vontade de estudar o que eles vão aprender* (P6, informação verbal, encontro 4, grifo nosso).

Nesses excertos, percebemos que os futuros professores destacam que, por meio da abordagem de aspectos da história de geometrias não-euclidianas e dos números complexos, os estudantes podem se “motivar a entender mais” ou “ter mais vontade de estudar”, mostrando, assim, indícios da mobilização de C2, que se refere a ter conhecimento sobre o que os alunos, frequentemente, entendem como motivador.

Embora essa ideia de que os estudantes possam se sentir mais interessados ou motivados a estudar Matemática por meio do estudo da HM seja bastante difundida na literatura, Fossa (2008) salienta que o estudo de fatos históricos pode propiciar aos estudantes interesse e motivação, porém não é garantia de que irá motivar todos os estudantes e todos eles da mesma forma.

Destaca-se, também, que os excertos 6 e 7 trazem indícios de que os participantes consideram que os alunos podem ter um entendimento ou uma compreensão de ideias/conceitos matemáticos estudados por meio de uma abordagem histórica, demonstrando indícios da mobilização do conhecimento C1 que se refere a ter conhecimento sobre ideias que os estudantes frequentemente entendem serem compreensíveis. A possibilidade de compreensão de ideias e conceitos matemáticos por meio do estudo da HM, também, é destacada pela

literatura, como pode ser observado em Fossa (2008) e Miguel e Miorim (2011).

Além disso, no Excerto 6, identificamos que P8 afirma que a HM poderia auxiliar o estudante a desenvolver uma visão do conhecimento matemático menos engessada, que está em consonância a Saito (2013). Tal fato, conforme apontado pelo participante, pode se refletir na forma como o estudante se relaciona com a Matemática, de modo a “não decorar” ou “seguir o passo a passo”, e sim fazer do seu jeito ou da forma como se sente mais confortável.

A possibilidade de que os estudantes desenvolvam uma “predisposição afetiva em relação à matemática”, por meio de uma abordagem histórica, também é destacado por Tzanakis *et al.* (2000). Para esses autores, por meio da HM, os estudantes podem perceber, por exemplo, “O valor de persistir com ideias, de tentar empreender linhas de investigação, de colocar questões e de tentar desenvolver formas criativas ou idiossincráticas de pensamento” e a relevância de “Não desanimar com falhas, erros, incertezas ou mal-entendidos, apreciando que esses têm sido os blocos de construção do trabalho dos matemáticos mais proeminentes” (Tzanakis *et al.*, 2000, p. 207, tradução nossa).

Com relação ao KCT, identificamos 18 indícios de mobilização nas falas dos estudantes. Estas estavam relacionadas a saber selecionar exemplos adequados para aprofundar o conteúdo matemático e saber selecionar representações apropriadas para ilustrar o conteúdo, conforme pode ser observado na tabela 4 a seguir:

**Tabela 4:** Frequência e conhecimentos referentes ao KCT por encontro

Conhecimento do Conteúdo e do Ensino		
Episódios	Frequência	Conhecimentos
Surgimentos das geometrias não-euclidianas	5	D2(3x), D3(2x)
Surgimento do cálculo infinitesimal	7	D3(7x)
Surgimento dos números complexos	5	D3(5x)
Fechamento do grupo de estudos	1	D2
<b>Total</b>	18	

**Fonte:** Dados da pesquisa

Um momento em que indícios do KCT puderam ser identificados nas falas dos participantes ocorreu durante o encontro que tinha por objetivo estudar uma história das geometrias não-euclidianas. Estava sendo realizada uma discussão sobre os materiais indicados para leitura e suas possíveis aproximações entre o ensino de Matemática e as geometrias não-euclidianas. Diante dessas reflexões, P3 citou um exemplo que considera plausível para o ensino desse conteúdo, conforme mostrado a seguir:

**Excerto 8 [KCT: D2] – [...] naquele famoso exemplo, que se você pegar uma reta que sai da Europa e vem para cá, ela não vai ser uma reta né, ela vai ser uma curva. Acho que muitos livros de Matemática, assim, sempre citam esse exemplo, né? [...] Esse é o melhor exemplo, é o exemplo mais plausível, assim, que pode utilizar para uma pessoa entender [...]** (P3, informação verbal, encontro 2, grifo nosso).

Por meio desse excerto, notamos indícios de que o participante sabe selecionar um exemplo adequado para iniciar o conteúdo matemático de Geometria Não-Euclidiana, referente ao conhecimento D2.

O KCT também pode ser evidenciado em um excerto da fala de P1 durante o encontro sobre o surgimento dos números complexos, como exposto a seguir. Este comentário foi realizado após o autor e a coautora questionarem aos participantes do grupo de estudos se os conhecimentos e as reflexões realizadas acerca deste episódio histórico poderiam contribuir em discussões em sala de aula.

**Excerto 9 [KCT: D3]** – *Quando eu li os textos, eu pensei muito no ensino. [...] quando eu vi o vídeo [da Profa. Tatiana Roque que havia sido indicada para estudo], eu tive várias ideias de como pode ser levado para sala de aula como discussão. A parte geométrica dá pra fazer algum material manipulativo, dá para levar para sala de aula, sim, essa discussão. [...] Eu levaria, só que de uma forma diferente, não como uma discussão, mas às vezes com algum material mesmo, [...]* (P1, informação verbal, encontro 4, grifo nosso).

Em que pese o fato de que os textos lidos para esse encontro não abordassem explicitamente o ensino de Matemática, esse excerto indica que P1 se dedicou a pensar em uma forma de apresentar as ideias históricas estudadas em suas futuras aulas. Para tanto, ele indicou a possibilidade de elaborar um material manipulativo, demonstrando, assim, D3, que é referente a saber selecionar recursos apropriados para ilustrar o conteúdo.

Esse mesmo conhecimento foi manifestado por P2 que, no encontro sobre as geometrias não-euclidianas, apresentou a ideia de tentar utilizar o *software* de representações gráficas *GeoGebra* para uma melhor visualização, por parte dos estudantes, dessas geometrias.

Com base nos indícios de manifestação de conhecimentos referentes ao PCK nas falas dos participantes, destacamos que o estudo de episódios históricos da Matemática é capaz de fornecer aos futuros professores elementos que os permitam refletir acerca das potencialidades da utilização de elementos históricos da Matemática em sala de aula e, desse modo, contribuir para a ampliação de seus conhecimentos pedagógicos de conteúdo.

Para finalizar a apresentação e análise dos indícios de conhecimentos dos licenciandos ao participarem do grupo de estudos, ressaltamos que o fato de não termos identificado a manifestação de algum conhecimento pelos participantes não significa que eles não possuem tal conhecimento. Significa que este não foi mobilizado ao longo do grupo de estudos ou que não pudemos identificá-lo nas falas dos participantes.

Após a apresentação e discussão dos dados da presente investigação, destacamos que o estudo e as discussões acerca de episódios da HM têm o potencial de contribuir para a mobilização de conhecimentos de professores de Matemática, sendo estes referentes tanto ao conhecimento de conteúdo matemático, quanto ao conhecimento pedagógico de conteúdo. Neste sentido, enfatizamos o potencial do estudo da HM para a formação inicial de professores.

## 6 Algumas considerações finais

A presente investigação foi realizada com o objetivo de identificar e analisar os conhecimentos de professores de Matemática que foram mobilizados por licenciandos em Matemática no estudo de episódios históricos. As análises dos dados desta investigação indicam que o estudo de episódios históricos da Matemática, em especial os episódios selecionados - o surgimento das geometrias não-euclidianas, o surgimento do cálculo infinitesimal e o surgimento dos números complexos - tem potencial de contribuir para que os licenciandos entendam aspectos da natureza do conhecimento matemático, (res)signifiquem conceitos e ideias matemáticas e, também, reflitam sobre aspectos relativos ao ensino de Matemática na Educação Básica.

Essa situação foi evidenciada ao longo dos encontros do grupo de estudos, nos quais

foram identificados indícios da mobilização de conhecimentos referentes ao Conhecimento do Conteúdo em 101 momentos, dentre os quais o CdM foi identificado em 32 situações e o CsM identificado em 69 oportunidades. Além disso, foram observados indícios da mobilização de conhecimentos referentes ao PCK em 40 ocasiões, de modo que o KCS foi identificado 22 vezes e o KCT ocorreu em 18 oportunidades.

Com base nos resultados apresentados, destacamos que a realização do grupo de estudos e desta investigação contribuiu para a formação dos licenciandos participantes à medida que possibilitou a mobilização de conhecimentos docentes, em especial, relacionados ao CsM, que é pouco abordado no curso desses estudantes.

Além disso, destaca-se que os resultados obtidos nesta investigação contribuem para ampliar os debates e as discussões relacionados à inserção da História da Matemática nos cursos de licenciatura em Matemática, pois evidenciam que o estudo de episódios históricos da Matemática pode contribuir para a mobilização de conhecimentos docentes e, conseqüentemente, para a formação de professores de Matemática.

## Referências

- Araman, E. M. O. (2011). *Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática*. 2011. 228f. Tese (Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR.
- Araman, E. M. O. & Batista, I. L. (2013). Contribuições da História da Matemática para a construção dos Saberes do Professor de Matemática. *Bolema*, 27(45), 1-30.
- Balestri, R. D. (2008). *A participação da história da matemática na formação inicial de professores de Matemática na ótica de professores e pesquisadores*. 2008. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR.
- Balestri, R. D. & Cyrino, M. C. C. (2010). A História da Matemática na Formação Inicial de Professores de Matemática. *Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, 3(1), 103-120.
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. C. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Ballerini, J. K. (2014). *Características da base de conhecimentos de professores no ensino de biologia celular a partir de um curso de formação continuada*. 2014. 252f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência). Universidade Estadual de São Paulo. Bauru, SP.
- Barbin, E., Bagni, G. T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E. & Menghini, M. (2000). Integrating history: Research perspectives. *History in mathematics education: The ICMI study*, 63-90.
- Batista, I. L. & Luccas, S. (2004). Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. *Educação Matemática Pesquisa*, 6(1), 101-133.
- Borges, L. C. & Cavalari, M. F. (2021). A História da Matemática em propostas didáticas para a formação de professores: um estudo em teses e dissertações brasileiras. *Revista*

- Paranaense de Educação Matemática*, 10(22), 174-199.
- Brito, A. J. (2007). História da Matemática e a da Educação Matemática na Formação de Professores. *Educação Matemática em Revista*, 22, 11-15.
- Cavalari, M. F. (2019). A inserção da História da Matemática na formação inicial de professores: breves considerações. In: *Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática*. Fortaleza, CE: SHBMat.
- Crispim, C. V. & Sá, L. P. (2019). O conhecimento pedagógico do conteúdo no desenvolvimento de ações voltadas à formação inicial de professores de química. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 543-561.
- Cutreta, G. E. (2003). La Actividad Científica y la Génesis del Conocimiento Científico em los Textos Escolares de Ciencias Naturales: Um análisis de clasificación. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35(1), 1-9.
- Cyrino, M. C. C. T. & Corrêa, J. F. (2009). Reflexões sobre a constituição de uma história orientada para a formação inicial de professores de matemática. *Ciência & Educação*, 15(2), 413-424.
- D'Ambrosio, B. S. (2007). Reflexões sobre a História da Matemática na formação de professores. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Especial (1), 399 – 406.
- Fernandez, C. (2015). Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de professores de ciências. *Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências*, 17, 500-528.
- Fossa, J. A. (2008). Matemática, história e compreensão. *Revista Cocar*, 2(4), 7-16.
- Giotto Jr, G. (2015). *Análise do conhecimento pedagógico do conteúdo de professores de Química a partir da perspectiva dos educandos*. 2015. 252f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo, SP.
- Hurrell, D. P. (2013). What Teachers Need to Know to Teach Mathematics: An argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(11), 54-64.
- Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial*. (1. ed.). São Paulo, SP: Editora Unesp.
- Martins, P. B. & Curi, E. (2022). Conhecimentos e crenças manifestados por professores que ensinam Matemática e fazem uso de materiais manipuláveis em suas práticas. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 12(4), 1-16.
- Mathews, M. R. (1995). História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 12(3), 164-214.
- Mendes, I. A. (2010). A investigação histórica na formação de professores de matemática. *Revista Cocar*, 4(7), 37-48.
- Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, 5(2), 73-106.

- Miguel, A. & Miorim, M. (2011). *História na educação matemática: propostas e desafios* (v. 10). Belo Horizonte, MG: Editora Autêntica.
- Moriel Jr. & Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciência Humanas*, 18(2), 126-133.
- Patrono, R. M. & Ferreira, A. C. (2021). Levantamento de pesquisas brasileiras sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino e Formação de professores. *Revemp*, 3, 1-24.
- Saito, F. (2013). História da Matemática e educação matemática: uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. In: *Actas VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática*, (pp. 3979-3987). Montevideo, Uruguay.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Tzanakis, C., Arcavi, A., Correia de Sa, C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., et al. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Org.). *History in mathematics education* (pp. 201–240). The ICMI Study.
- Vianna, C. R. (1995). *Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas*. 1995. 228f. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo. São Paulo, SP.