

Instrumento-para-pensar-matemática-com: entrelaçando conceitos matemáticos e esquemas de utilização na gênese instrumental do professor de Matemática

Márcia Rodrigues Notare

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, RS — Brasil
✉ marcia.notare@ufrgs.br
ID 0000-0002-2897-8348

Vandoir Stormowski

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, RS — Brasil
✉ vandoir.stormowski@ufrgs.br
ID 0000-0001-5290-5889

Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, RS — Brasil
✉ mbasso@ufrgs.br
ID 0000-0002-2312-9056



2238-0345 

10.37001/ripem.v15i3.4416 

Recebido • 12/12/2024
Aprovado • 31/07/2025
Publicado • 01/09/2025

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: Neste artigo, discutimos a integração das tecnologias digitais na sala de aula de Matemática e o processo de apropriação destas tecnologias por professores e alunos. A partir de estudos teóricos e de reflexões sobre ações dos professores-pesquisadores, analisamos como as atividades propostas pelo professor de Matemática revelam níveis em um processo contínuo de apropriação do artefato e impactam na constituição de instrumentos didáticos que potencializam a aprendizagem de Matemática. A investigação está ancorada no quadro teórico da gênese instrumental, especialmente para o papel dos esquemas de utilização que se estabelecem no desenvolver da realização da atividade. Os resultados do estudo propõem categorias para distintas atividades em ambiente de Matemática dinâmica. Além disso, apontam que os artefatos evoluem para instrumentos como um instrumento-para-pensar-matemática-com na medida em que conceitos matemáticos e a constituição de esquemas de utilização do artefato se entrelaçam em um todo coordenado.

Palavras-chave: Gênese Instrumental. Tecnologias Digitais. Matemática Dinâmica. Esquemas de Utilização. Instrumentos-para-pensar-matemática-com.

Instrument-to-think-mathematics-with: intertwining mathematical concepts and schemes of use in the instrumental genesis of the Mathematics teacher

Abstract: This article discusses the integration of digital technologies in the Mathematics classroom and the process of appropriation of these technologies by teachers and students. Based on theoretical studies and reflections on the actions of teacher-researchers, it is analyzed how the activities proposed by the Mathematics teacher reveal levels in a continuous process of appropriation of the artifact and impact the constitution of didactic instruments that enhance the learning of Mathematics. The research is anchored in the theoretical framework of instrumental genesis, especially for the role of usage schemes that are established in the development of the execution of the activity. The results of the study propose categories for different activities in a dynamic mathematics environment. In addition, they indicate that artifacts evolve into instruments as an instrument-for-thinking-mathematics-with as

mathematical concepts and the constitution of usage schemes of the artifact intertwine in a coordinated whole.

Keywords: Instrumental Genesis. Digital Technologies. Dynamic Mathematics. Usage Schemes. Tools-for-thinking-mathematics-with.

Instrumento-para-pensar-las-matemáticas-con: entrelazando conceptos matemáticos y esquemas de utilización en la génesis instrumental del profesor de Matemática

Resumen: En este artículo se discute la integración de las tecnologías digitales en el aula de Matemáticas y el proceso de apropiación de estas tecnologías por parte de profesores y estudiantes. A partir de estudios teóricos y reflexiones sobre el accionar de docentes-investigadores, analizamos cómo las actividades propuestas por el docente de Matemática revelan niveles en un proceso continuo de apropiación del artefacto e impactan en la creación de instrumentos didácticos que potencian el aprendizaje de Matemática. La investigación se ancla en el marco teórico de la génesis instrumental, especialmente en lo que respecta al papel de los esquemas de uso que se establecen en el desarrollo de la actividad. Los resultados del estudio proponen categorías para diferentes actividades en un entorno matemático dinámico. Además, señalan que los artefactos evolucionan hasta convertirse en instrumentos como instrumentos para pensar matemáticamente a medida que los conceptos matemáticos y la constitución de esquemas para usar el artefacto se entrelazan en un todo coordinado.

Palabras clave: Génesis Instrumental. Tecnologías Digitales. Matemáticas Dinámicas. Esquemas de Uso. Instrumentos-para-pensar-las-matemáticas.

1 Introdução

Com a integração das tecnologias digitais na Educação Matemática, surge um campo de investigação que se propõe a compreender como ocorre o processo de apropriação dessas tecnologias por alunos e professores e como seu uso vem sendo proposto nas salas de aula de Matemática. Este artigo, centrado na utilização da Matemática dinâmica e apoiado na abordagem instrumental de Rabardel (1995), analisa como as atividades propostas pelo professor de Matemática revelam o processo de apropriação de um artefato e impactam na constituição de instrumentos didáticos que potencializam a aprendizagem de conceitos matemáticos.

A abordagem instrumental, detalhada na seção 3 deste artigo, é um aporte teórico que tem contribuído para que pesquisadores investiguem e busquem compreensão sobre os processos envolvidos na incorporação das tecnologias digitais em sala de aula. Nesse sentido, apresentamos trabalhos recentes da área que estão ancorados neste quadro teórico e destacamos como a presente pesquisa se insere neste contexto.

Buteau, Muller, Mgombelo e Sacristám (2019) propuseram um modelo para descrever quatro estágios do processo de gênese instrumental de estudantes de graduação em situações de investigações matemáticas em ambiente de programação. Os autores descrevem esses estágios como: (1) iniciação instrumental; (2) exploração instrumental; (3) reforço instrumental; e (4) simbiose instrumental.

Cuéllar e Miraval (2018) analisaram o processo de gênese instrumental do objeto matemático Função Exponencial com a utilização do GeoGebra. Segundo as autoras, o GeoGebra favoreceu os processos de instrumentalização e instrumentação do objeto matemático abordado, a partir da identificação de esquemas construídos pelos participantes.

Yao (2020) examinou a relação entre a gênese instrumental de professores de Matemática em formação inicial e o desenvolvimento de conhecimento geométrico ao resolver problemas de construção de geometria com o *software Geometer's Sketchpad*. A análise dos dados revelou uma coevolução entre a gênese instrumental e o conhecimento geométrico. Segundo o autor, essa relação pode ser resumida da seguinte forma: guiado por seu conhecimento prévio de geometria e técnicas de geometria dinâmica, primeiro o participante usou ferramentas particulares de geometria dinâmica para obter uma figura geométrica. A partir da manipulação desta figura geométrica por várias modalidades de arrastar e medir, bem como outras ações mediadas por instrumentos, o participante observou novas propriedades geométricas. Ele então usou esse conhecimento recém-desenvolvido para guiar seu uso de geometria dinâmica, o que o levou a criar uma figura dinâmica ou desenvolver uma construção alternativa. O autor ainda destaca as interações dinâmicas que ocorrem entre o aluno, a tarefa matemática e a ferramenta tecnológica, por meio das quais surgem novos conhecimentos geométricos e formas significativas de usar a tecnologia.

Dijke-Droogers, Drijvers e Bakker (2021) buscaram estudar o entrelaçamento de técnicas para uso de ferramentas digitais e a compreensão conceitual, concentrando a pesquisa na teoria da Gênese Instrumental para modelagem estatística, investigando os processos de modelagem dos alunos no ambiente digital *TinkerPlots*. Em particular, os autores analisaram como técnicas emergentes e a compreensão conceitual se entrelaçaram nos esquemas de instrumentação desenvolvidos por 28 alunos. Com a análise dos dados, os autores identificaram seis esquemas de instrumentação comuns e, além disso, observaram um entrelaçamento bidirecional de técnicas emergentes e compreensão conceitual.

Bozkurt e Uygan (2020) analisaram as práticas de sala de aula de uma professora de Matemática considerada iniciante no uso de tecnologias digitais à luz da teoria de Gênese Instrumental. Os resultados do estudo de caso indicaram que, embora a docente planejasse aulas de investigação e se concentrasse no uso ativo da geometria dinâmica pelos alunos, ela não conseguia usar o recurso de forma funcional para sua abordagem pedagógica. Os autores apontam que, em parte, os problemas ocorreram porque a professora planejou a utilização da geometria dinâmica moldada por sua Gênese Instrumental pessoal, negligenciando os processos de Gênese Instrumental dos alunos. Assim, os problemas enfrentados pela docente estavam relacionados ao não planejamento técnico das atividades e aos problemas de instrumentação vivenciados pelos alunos.

Buteau, Muller, Mgombelo, Sacristán e Dreise (2020) buscaram entender como estudantes universitários aprendem a usar a programação como um instrumento para investigações matemáticas, utilizando a abordagem instrumental para análise. Os autores propõem quatro estágios instrumentais do desenvolvimento do aluno. A abordagem proposta leva em consideração não apenas o desenvolvimento de esquemas individuais, mas também o desenvolvimento de uma complexa teia de esquemas, considerando que os alunos se apropriam da programação como um instrumento.

Assim, destacamos que o levantamento realizado sobre pesquisas na área de Educação Matemática e Tecnologias Digitais revela que o quadro teórico da Gênese Instrumental, utilizado para analisar e compreender as relações entrelaçadas entre apropriação tecnológica e compreensão matemática, mostra-se atual, pertinente e relevante.

No estudo apresentado, neste artigo, identificamos que as atividades propostas pelo professor de Matemática, nosso objeto de pesquisa, podem revelar seu nível de apropriação tecnológica do artefato e indicam o potencial da atividade para aprender conceitos matemáticos. Na investigação realizada, temos como objetivo categorizar diferentes atividades propostas no

ambiente GeoGebra sobre o tema Pontos Notáveis no Triângulo, ancorados pela teoria da Gênese Instrumental, e como foco a análise de esquemas de utilização subjacentes a cada atividade. Os resultados, desse estudo, apresentados na seção 5, apontam que a categoria de uma atividade pode revelar o nível de entendimento do instrumento tecnológico e sua potencialidade como um instrumento-para-pensar-matemática-com. Assim, apresentamos, a seguir, o quadro teórico que sustenta nossa compreensão sobre os instrumentos-para-pensar-matemática-com. Na sequência, abordamos aspectos teóricos sobre a teoria da Gênese Instrumental e sobre os esquemas de utilização, o percurso metodológico da pesquisa, a apresentação e a análise das categorias de atividades e as considerações finais.

2 Instrumentos-para-pensar-matemática-com

Discutimos nesta seção nosso entendimento sobre a utilização de Tecnologias Digitais (TD) na Educação Matemática. A partir desta compreensão, defendemos que artefatos tecnológicos devem se transformar em verdadeiros instrumentos de ordem epistemológica e cognitiva, capazes de possibilitar “experimentos de pensamentos” (Gravina & Basso, 2012), nos quais estudantes podem ampliar suas formas de pensar e de externar seus raciocínios matemáticos, fazendo do instrumento tecnológico uma extensão do pensamento. Entendemos, portanto, que artefatos tecnológicos afetam as pessoas e a maneira como estruturam seu pensamento em Matemática. Mas essa relação não ocorre em um único sentido; as pessoas também afetam o artefato, transformando-o.

Os artefatos tecnológicos, disponíveis hoje em dia para o professor de Matemática, podem ser considerados instrumentos cognitivos que amplificam nossas capacidades e habilidades cognitivas, estabelecendo uma relação dinâmica e recíproca entre pensamento e TD. Sobre isso, ressaltamos que abordaremos, em especial, softwares desenvolvidos para pensar e fazer matemática. Papert (1980), há quatro décadas, já cunhava a expressão “objetos-de-pensar-com”, referenciando o que ele chamava de objetos que poderiam ser usados para pensar sistemas formais. O autor referia-se à tartaruga do ambiente LOGO, mas estava também interessado na invenção de novos objetos-de-pensar-com. Na mesma direção, os autores Shaffer e Clinton (2006) propuseram a expressão *ferramentasparapensamento*, realçando novamente a relação recíproca que se estabelece entre sujeito e ferramenta. Para os autores, sujeito e ferramentas tecnológicas colocam-se em uma situação de simbiose, de modo que, da mesma forma como o sujeito afeta a ferramenta, esta também afeta o sujeito.

Para realçar melhor essa relação recíproca entre sujeito e artefato no desenvolvimento do pensamento matemático, destacamos um ciclo de ações importantes que impulsionam esse desenvolvimento, explorar → conjecturar → validar → explicar → argumentar. Esse ciclo pode ser potencializado pelas TD e, em especial, pelo ambiente de Matemática dinâmica. A partir das ideias de Papert (1980), Shaffer e Clinton (2006), fundamentados na Gênese Instrumental, entendemos que as TD para a aprendizagem de Matemática devem ser concebidas como instrumentos-para-pensar-matemática-com, em que sujeitos pensam e se expressam por meio das TD. Desse modo, a Matemática dinâmica configura-se como um ambiente propício para que essas relações recíprocas se estabeleçam, de tal forma que sujeitos e artefatos tecnológicos coloquem-se em situação de simbiose, em processo mútuo de ação e reação.

Com a Matemática dinâmica, têm-se novas possibilidades de acesso a objetos matemáticos, que abrem espaço para novas formas de pensar-matemática-com. Isso porque os ambientes de Matemática dinâmica potencializam o acesso e a manipulação de objetos matemáticos. E o fato de nos relacionarmos de novas formas com os objetos matemáticos impõe também novas maneiras de olhar para as atividades que são propostas na sala de aula. Portanto, não é suficiente para o professor de Matemática fazer uma boa escolha do artefato tecnológico

que utilizará com seus alunos. São as atividades propostas com os artefatos selecionados que podem fazer diferença na sala de aula de Matemática, pois isso promove o ‘pensar em matemática’, transformando os artefatos em instrumentos-para-pensar-matemática-com. Assim, para que as TD sejam instrumentos-para-pensar-matemática-com, é crucial a escolha de atividades que exijam dos estudantes a construção de modelos mentais que desencadeiam o ciclo explorar → conjecturar → validar → explicar → argumentar e favoreçam o desenvolvimento de habilidades de abstração, generalização e flexibilização do pensamento, provocando os experimentos de pensamentos apontados por Gravina e Basso (2012). Experiências que possibilitam acessar, movimentar e modificar objetos matemáticos, por meio de artefatos tecnológicos, permitem aos estudantes aprenderem como realizar os mesmos tipos de experiências em suas mentes, na ausência desses artefatos. Deste modo, torna-se possível incorporar esses artefatos à atividade cognitiva dos alunos, suscitando novas formas de pensar-matemática-com, transformando os artefatos em verdadeiros instrumentos cognitivos.

Nesta perspectiva, as TD podem ser utilizadas como instrumentos-para-pensar-matemática-com, na perspectiva de estimular os alunos a pensarem sobre um problema e tentar resolvê-lo, não sendo utilizadas para resolver o problema pelo aluno. Assim, as atividades propostas podem ser desenvolvidas para promover o pensamento matemático, e não para facilitar ou acelerar procedimentos de resolução dos problemas. Nesse sentido, a abordagem sobre um problema proposto deve considerar as possibilidades de exploração ou construção, exigindo e/ou desenvolvendo conhecimento matemático. O professor que utiliza as TD tendo a clareza de que um problema clássico apresentado em livros pode se tornar elementar ou ultrapassado, em ambiente de Matemática dinâmica, poderá reconhecer que esse espaço abre possibilidades para explorar problemas que estavam fora do alcance de suas aulas até então. Finalizamos essa seção com algumas provocações: Que instrumentos, nós, professores de Matemática, queremos desenvolver com nossos alunos? Que esquemas de utilização queremos desencadear? Que atividades cognitivas queremos provocar? Quais aprendizagens e ganhos de compreensão queremos alcançar? Estas são questões que podem nortear a conduta do professor de Matemática para utilizar artefatos digitais como instrumentos-para-pensar-matemática-com.

Na seção a seguir, abordamos aspectos teóricos da Gênese Instrumental.

3 A Gênese Instrumental

A gênese Instrumental é o processo de transformação de artefato em instrumento. Para Rabardel (1995), artefato consiste no objeto material ou simbólico em si, ou parte de um objeto mais complexo. Podemos considerar o GeoGebra como um artefato, mas também pode representar seus recursos individuais, como as ferramentas que ele disponibiliza, como por exemplo, ponto, segmento, polígono, entre outras. O instrumento, por sua vez, é definido por Rabardel (1995) como uma entidade mista, composta pelo artefato mais os esquemas de utilização que o sujeito elabora para utilizá-lo para um determinado fim. Portanto, o instrumento nasce da relação que se estabelece entre sujeito e artefato e é uma construção individual do sujeito, desencadeada pela necessidade de realização de tarefas particulares.

Logo, podemos afirmar que o instrumento não é fornecido ao sujeito, ele resulta da interação entre sujeito e artefato, e depende do objetivo e da tarefa que o sujeito precisa realizar. Em vista disso, artefatos e esquemas estão associados, mas são independentes, pois um mesmo esquema pode ser aplicado a diferentes artefatos, assim como o mesmo artefato pode ser associado a diferentes esquemas, o que pode dar origem a uma diversidade de instrumentos. De maneira semelhante, um mesmo artefato se constitui em instrumentos distintos para cada sujeito que o utiliza.

Desse modo, consideramos importante, para avançar na noção de instrumento, compreender o conceito de esquema.

3.1 Conceito de Esquema na teoria de Piaget

Para Piaget (1970), que estudou o nascimento da inteligência em sua dimensão sensório-motora, os esquemas constituem meios pelos quais o sujeito pode assimilar situações e objetos com os quais ele é confrontado. Assim, os esquemas são estruturas que prolongam a organização biológica, e apresentam, como característica em comum com esta, a capacidade assimilativa de incorporação de uma realidade externa ao ciclo de organização do sujeito: tudo o que responde a uma necessidade é suscetível de assimilação.

Para Piaget (1970), o esquema é em si produto da atividade assimilativa. A assimilação reprodutiva constitui os esquemas, que adquirem sua existência assim que uma conduta, por mais descomplicada que seja, dá origem a um esforço de repetição e é, portanto, esquematizada. O esquema de uma ação é, então, o conjunto estruturado de caracteres generalizáveis da ação, isto é, que permitem repetir a mesma ação ou aplicá-la a novos conteúdos (Rabardel, 1995).

Todo esquema constitui uma totalidade, isto é, um conjunto de elementos mutuamente dependentes que não podem funcionar um sem o outro. De fato, eles implicam um no outro. É o significado global do ato que garante a existência simultânea das relações constitutivas dos esquemas como totalidade (Piaget, 1970). Entretanto, mesmo que originalmente constituam totalidades isoladas, os esquemas coordenam, por assimilação mútua, em totalidades novas e originais que são mais amplas e também possuem propriedades gerais. Assim, na criança pequena, a coordenação de vários esquemas em um único ato resulta da necessidade de atingir uma meta que não é diretamente acessível por meio de um esquema isolado. Isso implica a mobilização de esquemas até então relativos a outras situações e sua coordenação, o que leva à formação de um esquema principal de ação que incorpora uma série de esquemas subordinados.

A partir do conceito de esquema na teoria de Piaget (1970), abordamos a seguir o conceito de esquema na abordagem instrumental de Rabardel (1995).

3.2 O Conceito de Esquema na Abordagem Instrumental

Na abordagem instrumental de Rabardel (1995), o autor define o conceito de esquema de utilização associado aos esquemas relacionados ao uso de um artefato. Há diferentes tipos de esquemas que compõem a classe de esquemas de utilização. Eles referem-se a duas dimensões da atividade: as atividades relativas às tarefas secundárias, isto é, as que dizem respeito à gestão de características e propriedades particulares do artefato; e as atividades primárias, principais, direcionadas para o objeto da atividade, para as quais o artefato é um meio de realização (Rabardel, 1995).

Essas duas dimensões de atividade permitem distinguir também dois níveis de esquemas dentro dos esquemas de utilização: (1) esquemas de uso, que estão relacionados a tarefas secundárias (Rabardel, 1995). Esses esquemas pertencem ao nível de esquemas elementares, no sentido de não serem decomponíveis em unidades menores capazes de responder a um subobjetivo identificável, mas isso não é necessário: eles próprios podem ser constituídos em totalidades articulando um conjunto de esquemas elementares. O que os caracteriza é sua orientação para tarefas secundárias correspondentes a ações e atividades específicas diretamente relacionadas ao artefato; (2) os esquemas de ação instrumentada, que consistem em totalidades cujo significado é dado pelo ato global destinado a efetuar transformações no objeto da atividade. Esses esquemas incorporam, como constituintes, os esquemas do primeiro nível (esquemas de uso). O que os caracteriza é o fato de serem relativos às tarefas primárias

(Rabardel, 1995). Os esquemas de uso se coordenam entre si, e também com outros esquemas, para constituir os esquemas de ação instrumentada.

Podemos tomar como exemplo a construção de um quadrado no GeoGebra. Para um indivíduo que já tenha experiência com construções em ambiente de geometria dinâmica, a ação de construir um quadrado constitui um esquema de ação instrumentada, que incorpora e coordena esquemas de uso subordinados à construção geral, como traçar um segmento de reta, um círculo, uma reta perpendicular etc. Por outro lado, para um indivíduo menos experiente, a simples construção de uma reta perpendicular a um segmento, passando por uma de suas extremidades, pode constituir um esquema de ação instrumentada, que incorpora esquemas de uso mais elementares. Assim, torna-se evidente que o critério utilizado para distinguir os esquemas, ou seja, se estão relacionados com uma tarefa secundária ou principal, não se refere a uma propriedade do esquema em si, mas ao seu status na atividade final do sujeito. O mesmo esquema pode, portanto, dependendo da situação, ter um status de esquema de uso (por exemplo, a construção de uma reta perpendicular no processo de construção de um quadrado) ou status de esquema de ação instrumentada (por exemplo, para um sujeito inexperiente aprender a utilizar as ferramentas básicas do GeoGebra para construir uma reta perpendicular a um segmento passando por uma de suas extremidades).

O conjunto de esquemas de uso, esquemas de ação instrumentada e esquemas de atividade coletiva instrumentada pertence à classe de esquemas que Rabardel (1995) chamada de esquemas de utilização. Para o autor, esses diferentes tipos de esquemas estão em relações de mútua dependência. Os esquemas de utilização estão relacionados, por um lado, a artefatos que provavelmente têm status de meio e, por outro lado, aos objetos sobre os quais esses artefatos permitem agir. Eles são organizadores da ação, da utilização, do uso do artefato. No entanto, os esquemas de utilização não se aplicam diretamente, eles devem ser instanciados de acordo com o contexto específico de cada situação. Eles são então atualizados como um procedimento apropriado às peculiaridades da situação.

A implementação de esquemas de utilização em situações novas, mas semelhantes, portanto, um processo de assimilação, leva à generalização de esquemas por extensão das classes de situações, artefatos e objetos para os quais são pertinentes. Da mesma forma, remete à sua diferenciação, uma vez que geralmente precisam se acomodar a aspectos específicos diferentes e novos das situações. Em situações muito novas para o sujeito, é o processo de acomodação que se torna, por algum tempo, dominante. Conduz à transformação dos esquemas disponíveis, à sua reorganização, fragmentação e recomposição, assimilação e coordenação recíprocas, que progressivamente produzem novas composições esquemáticas, permitindo o domínio renovado e reproduzível da nova classe de situações (Rabardel, 1995). Tais mecanismos surgem, por exemplo, quando novos artefatos devem ser usados como meio de ação ou precisam apontar para novos objetos ou novas transformações nesses objetos.

Os esquemas de utilização podem então ser considerados como esquemas familiares, facilmente mobilizados, contribuindo para uma operação automatizada, característica de situações usuais e bem controladas pelo sujeito. A implementação de esquemas de utilização em distintas situações está em uma relação de independência relativa. O mesmo esquema de utilização pode ser aplicado a uma multiplicidade de artefatos pertencentes à mesma classe, ou a classes semelhantes. Por outro lado, um artefato provavelmente encaixar-se-á em uma multiplicidade de esquemas de utilização que lhe dará significados e, às vezes, funções diferentes, ou seja, uma multiplicidade de instrumentos. Assim, o mesmo artefato pode ter um status instrumental diferente para cada sujeito.

3.3 A noção de Instrumento e a Gênese Instrumental

Uma vez compreendido o conceito de esquema, podemos avançar no conceito de instrumento e na definição de gênese instrumental, conforme Rabardel (1995). Como já afirmamos, a noção de instrumento não pode ser reduzida a artefato, pois o instrumento inclui um componente artefato e um componente esquema de utilização, que resulta de uma construção própria e autônoma do sujeito. Não é apenas o artefato que é associado pelo sujeito a sua ação para execução da tarefa, são também os esquemas de utilização que permitirão inserir um instrumento como um componente funcional da ação do sujeito. Ou seja, a constituição da entidade instrumental é produto da atividade do sujeito.

Os dois componentes do instrumento, artefato e esquema, estão associados um ao outro e os limites são difíceis de determinar. Assim, um instrumento que se torna permanente, ou seja, capaz de conservação e, assim, de reutilização, consiste na combinação desses dois invariantes estáveis (artefato + esquemas), que constituem em conjunto um meio potencial de solução, de tratamento e de ação numa situação. Os artefatos são, na maioria das vezes, preexistentes, porém ainda são instrumentalizados pelo sujeito. Os esquemas são, na sua maioria, do repertório do sujeito e generalizáveis ou acomodados ao novo artefato. No entanto, é possível que, em determinadas situações, esquemas novos sejam inteiramente construídos ou elaborados. Estes processos são divididos em dois tipos por Rabardel (1995): instrumentação e instrumentalização.

Os processos de instrumentação estão relacionados ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada, ou seja, a gênese dos esquemas, a assimilação de novos artefatos aos esquemas, fornecendo novos significados aos artefatos, e a acomodação de esquemas que contribuem para mudanças no significado do instrumento. Em outras palavras, a descoberta progressiva das propriedades do artefato pelo sujeito é acompanhada pela acomodação de seus esquemas e por mudanças no significado do instrumento, resultantes da associação do artefato com novos esquemas, mediante processos de instrumentação (Rabardel, 1995).

A instrumentalização pode ser definida como um processo de enriquecimento das propriedades do artefato pelo sujeito. Um processo que se baseia em recursos e propriedades intrínsecas do artefato, fornecendo a ele um status com base na ação atual. Eles constituem, para o sujeito, uma característica, uma propriedade permanente do artefato, ou mais especificamente do componente artefato do instrumento. Assim, os processos de instrumentalização dizem respeito ao surgimento e evolução de componentes artefatos do instrumento.

4 Percorso Metodológico

Este artigo propõe um estudo oriundo de reflexões teóricas dos autores. A partir de estudos, pesquisas e experiências de sala de aula como professores de Matemática e como formadores de professores de Matemática para uso das TD, reconhecemos que a incorporação das TD nas aulas de Matemática é um processo complexo que pode ocorrer de diferentes formas e em diferentes níveis de compreensão sobre as potencialidades das TD para a aprendizagem de Matemática. As diferentes abordagens, identificadas ao longo de nossas experiências como professores e pesquisadores, estão relacionadas à gênese instrumental do professor de Matemática. Mais do que isso, constatamos neste estudo que o potencial de uma atividade proposta pelo professor está associado aos esquemas de uso e aos esquemas de ação instrumentada que devem ser constituídos e utilizados para a sua realização.

A investigação, que se desenrolou no âmbito do projeto de pesquisa *Processos de gênese*

instrumental de uso das tecnologias digitais por professores de Matemática, conta com professores-pesquisadores que, além de investigarem a incorporação das TD na sala de aula de Matemática da Educação Básica, voltam-se para as suas próprias práticas como formadores de professores de Matemática, refletindo sobre ela, por reconhecerem na prática docente uma rica fonte de pesquisa e de conhecimento. Para o desenvolvimento desse saber, é preciso estar em contato com a própria prática, o que Schön (2000) denominou de conhecimento na ação. Para o autor, na prática profissional ocorrem situações incertas ou singulares, que exigem soluções inéditas e a construção de novas estratégias, denominadas de reflexão na ação.

A partir da reflexão na ação, o professor passa a construir um repertório de experiências que são mobilizadas em situações similares. Assim, entendemos que o ato de refletir sobre a reflexão na ação caracteriza um novo patamar de reflexão do professor que permite rever e planejar ações futuras.

Nesta perspectiva, refletir sobre nossa própria prática na formação do professor de Matemática para uso de TD permitiu-nos problematizar, analisar e compreender a complexidade inerente ao processo de gênese instrumental, que se desenvolve em diferentes dimensões: primeiro, o professor precisa viver seu processo de gênese instrumental pessoal para se apropriar do artefato que lhe é apresentado, transformando-o em instrumento para pensar matemática; depois precisa vivenciar o processo de gênese instrumental profissional, compreendendo o potencial do recurso como instrumento didático para promover a aprendizagem da matemática, o que passa pela compreensão deste instrumento nas dimensões cognitiva e epistemológica; finalmente, o professor precisa reconhecer que seu aluno também vai vivenciar um processo de gênese instrumental, até transformar o artefato em um instrumento-para-pensar-matemática-com.

Assim, esta pesquisa desenvolveu-se a partir dos estudos teóricos e análises de atividades propostas no GeoGebra por professores ou futuros professores de Matemática que cursaram disciplinas de Educação Matemática e Tecnologias Digitais na universidade. Com base nos estudos realizados, apresentamos neste artigo a categorização de atividades desenvolvidas para uso da matemática dinâmica. Identificamos quatro categorias de atividades, que serão apresentadas e discutidas na seção a seguir, à luz dos quadros teóricos da abordagem instrumental e dos instrumentos-para-pensar-matemática-com.

5 Categorias de atividades com Matemática dinâmica: um olhar para os esquemas de utilização

Conforme abordado na seção 3, o instrumento é uma construção individual de cada sujeito, que nasce da relação entre sujeito e artefato. No contexto de utilização de TD para a aprendizagem de Matemática, os diversos softwares e aplicativos disponíveis atualmente constituem, em um primeiro momento, artefatos para o professor de Matemática. Os instrumentos didáticos em que esses artefatos podem se transformar não são fornecidos ao professor, devem ser construídos por ele. Ou seja, tais artefatos poderão se tornar instrumentos didáticos com potencial para a aprendizagem de Matemática que se configuram como instrumentos-para-pensar-matemática-com a partir das gêneses instrumentais pessoal e profissional deste professor. A entidade instrumental, ou seja, o instrumento didático como componente funcional da ação do professor, é resultado da atividade desse docente, que desenvolve, mobiliza e coordena esquemas enquanto desvenda propriedades e funcionalidades do artefato.

Nesta seção, a partir da articulação com exemplos de atividades de Matemática dinâmica elaboradas no GeoGebra, debatemos as relações existentes entre categorias de atividades e seu

potencial, ou não, buscando o desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada, que culminam na elaboração de instrumentos para pensar matemática pelos estudantes, em direção à relação recíproca que se estabelece entre aluno e GeoGebra como potencializador de pensamentos a partir de atividades específicas. Fomos norteados por questionamentos como: que esquemas devem ser mobilizados para realizar a atividade? Que conceitos matemáticos devem ser mobilizados para realizar a atividade? Há coordenação entre esquemas de utilização do artefato e conceitos matemáticos?

As categorias estão associadas às possibilidades de avanços na elaboração de esquemas de utilização para o artefato, iniciando com propostas que exigem do estudante o emprego de esquemas de uso elementares e não decomponíveis, cuja orientação central está mais associada a atividades orientadas ao uso do artefato, e seguem em direção à elaboração de propostas que exigem esquemas de ação instrumentada, que constituem ações mais globais orientadas à coordenação de conceitos matemáticos que fundamentam a utilização dos recursos do software para a realização da atividade ou resolução de algum problema. Entendemos que o processo de constituição do GeoGebra, como um instrumento-para-pensar-matemática-com, é complexo e contínuo, que se desenvolve em uma espiral ascendente incorporando novos esquemas de utilização para constituir o instrumento. As categorias aqui apresentadas não revelam toda complexidade do processo, nem a ideia de continuidade, isto é, o fato de poder ocorrer idas e vindas, interseções, mas dão indícios dessa evolução.

As atividades foram categorizadas, definidas a partir dos esquemas de utilização que devem ser elaborados, mobilizados, transformados, reorganizados ou coordenados. Propomos as categorias a seguir:

- Categoria I: atividades guiadas de construção, que exigem o emprego de esquemas de uso imediato, elementares e não decomponíveis. Nessa categoria, as ações específicas são direcionadas ao uso dos recursos do GeoGebra.
- Categoria II: atividades de exploração visual e identificação de propriedades, que exigem o emprego de manipulações básicas, mobilizando esquemas de movimento de pontos para a exploração do objeto dinâmico, para identificação de propriedades matemáticas evidentes.
- Categoria III: atividades não guiadas de construção que exigem o emprego de esquemas de ação instrumentada, cujo significado é dado pela ação global, que incorpora esquemas de uso elementares que se coordenam com conceitos matemáticos para compor a solução da atividade. Esta categoria está subdividida em duas subcategorias:
 - Subcategoria IIIA: atividades não guiadas de construções matemáticas elementares que apresentam propriedades explícitas.
 - Subcategoria IIIB: atividades não guiadas de construções matemáticas elementares que apresentam propriedades explícitas e implícitas.
- Categoria IV: atividades não guiadas de construções matemáticas complexas e propriedades implícitas. Exigem o emprego de esquemas de ação instrumentada, cujo significado é dado pela ação global, que incorpora esquemas de uso elementares que se coordenam com conceitos matemáticos para compor a solução da atividade.

Para ilustrarmos esta classificação e conduzirmos a discussão e a análise, trazemos como exemplo atividades dentro do tema Pontos notáveis no Triângulo.

5.1 Atividades de Categoria I

É característica comum de atividades de Categoria I a preparação de um roteiro de

utilização do artefato, que usualmente omite a etapa de exploração e descoberta do aluno, restringindo-se ao emprego de esquemas de uso elementar, que constituem unidades básicas da construção. Cada etapa do roteiro elaborado pelo professor corresponde a um esquema de uso básico e não decomponível, que deve ser reproduzido pelo aluno para atingir o objetivo maior, que resulta na construção total do objeto matemático em estudo, ou seja, na solução da atividade.

Em atividades dessa categoria, as ações do estudante ficam mais direcionadas ao uso do artefato e, mesmo sem compreender os conceitos matemáticos envolvidos na construção proposta, é possível chegar a sua solução. Ou seja, contribuem pouco para a transformação do artefato em instrumento e não mobilizam o ‘fazer pensar’, já que o estudante está centrado em repetir os procedimentos que lhes são apresentados.

A Figura 1 traz um exemplo de atividade de Categoria I, que conduz à construção de uma circunferência circunscrita a um triângulo.

Figura 1: Exemplo de Atividade de Categoria I

Construção de circunferência circunscrita a um triângulo

Siga os passos a seguir no GeoGebra:

1. Com a ferramenta  (Polígono), construa um triângulo ABC qualquer.
2. Com a ferramenta  (Mediatriz), construa as mediatrizes dos três lados do triângulo ABC.
3. Com a ferramenta  (Interseção de Dois Objetos), marque o ponto de interseção das mediatrizes e a nomeie M.
4. Com a ferramenta  (Círculo dados Centro e Um de seus Pontos), construa uma circunferência com centro em M e passando pelo ponto A.
5. Movimente os pontos A, B e C e observe o comportamento da circunferência.

Fonte: Dados da Pesquisa

Observa-se que os conceitos matemáticos cruciais para realizar a construção não são evocados pelo estudante nem precisam estar em seu repertório. Se o estudante não for convidado a refletir sobre a construção realizada e reorganizar os esquemas de uso em uma totalidade, coordenados com os conceitos matemáticos inerentes às ferramentas utilizadas, poderá não compreender que o ponto de interseção das mediatrizes de um triângulo, denominado circuncentro, corresponde ao centro da circunferência circunscrita a esse triângulo. Em outras palavras, é possível ter sucesso na realização da atividade sem compreender seu resultado.

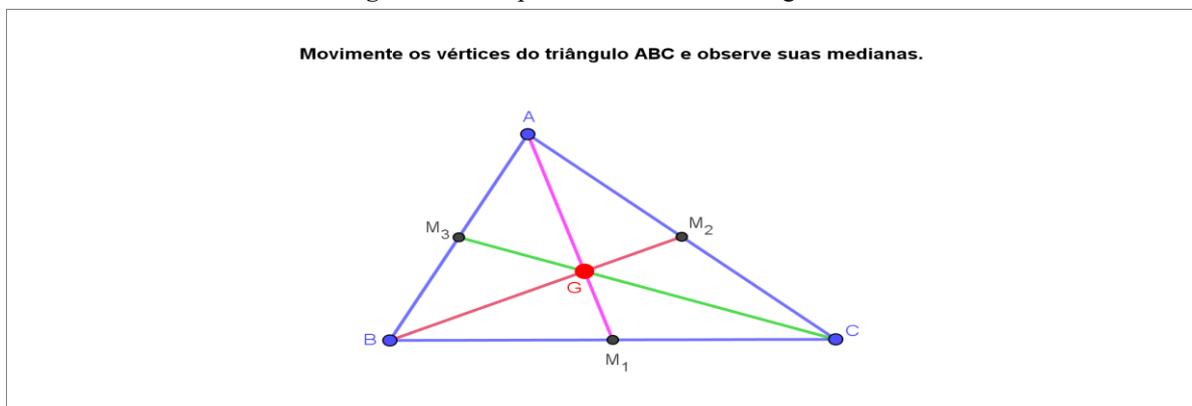
Atividades dessa categoria afastam-se da forma como concebemos a utilização das TD nas aulas de Matemática, no sentido de instrumentos-para-pensar-matemática-com. Isso acontece pois basta que o estudante repita os procedimentos apresentados, sem necessariamente refletir sobre as ferramentas do software que são mobilizadas e, por isso, não desenvolvem esquemas de ação instrumentada (Rabardel, 1995). Da mesma forma, não há necessidade de o estudante pensar sobre as propriedades e conceitos matemáticos presentes, bastando repetir os procedimentos para concluir a atividade.

5.2 Atividades de Categoria II

As atividades de Categoria II são caracterizadas pelas construções prontas, nas quais os estudantes devem movimentar pontos da construção para observar seu comportamento e, a

partir da sua análise, identificar propriedades e regularidades que caracterizam a construção. A Figura 2 traz um exemplo de atividade característica dessa categoria. Os esquemas empregados pelo estudante correspondem a esquemas de movimentação dos vértices do triângulo para identificar uma das propriedades do baricentro, em que, como afirmado, todas as medianas de um triângulo se interceptam em um mesmo ponto.

Figura 2: Exemplo de Atividade de Categoria II



Fonte: Dados da Pesquisa

Apesar de não exigir construções geométricas do estudante, atividades dessa categoria proporcionam a relação simbiótica entre aluno e GeoGebra, na qual o aluno utiliza o artefato como uma extensão de pensamento. Isso ocorre porque é preciso explorar e analisar a construção apresentada, identificando regularidades presentes, bem como as propriedades matemáticas subjacentes. Ou seja, o GeoGebra passa a ser um instrumento-para-pensar-matemática-com, pois leva o estudante a mobilizar conhecimentos matemáticos que ele possui e os articular com novas propriedades matemáticas presentes na construção.

5.3 Atividades de Categoria III

A Categoria III é caracterizada por atividades de construção não guiadas, classificadas em duas subcategorias, que se distinguem pela forma como as propriedades matemáticas se revelam aos estudantes na construção proposta.

Atividades dessa categoria exigem do estudante a coordenação de conceitos matemáticos (que devem ser impostos na construção) com a utilização de recursos do software. É preciso planejar a construção, identificar as propriedades matemáticas cruciais e elencar as ferramentas do GeoGebra que serão utilizadas a partir de intenções sustentadas por conceitos matemáticos, que possibilitam chegar à solução. Compreender a atividade em sua totalidade e organizar as ideias para a construção implicam a elaboração de esquemas de ação instrumentada, constituídos por esquemas de uso elementar e conhecidos pelo estudante, que poderão ser aplicados na situação apresentada (Rabardel, 1995).

As atividades de subcategoria IIIB diferenciam-se das de subcategoria IIIA pelo fato de apresentarem propriedades matemáticas conhecidas em configurações não usuais, nas quais estas propriedades apresentam-se de forma menos evidente (propriedades implícitas). As propriedades implícitas requerem uma investigação mais aprofundada da construção, na elaboração e verificação de hipóteses, bem como a articulação com outros conceitos matemáticos conhecidos pelo estudante. Por outro lado, as atividades de Subcategoria IIIA trazem propriedades explícitas, que se mostram em configurações consideradas mais usuais e que podem ser mais facilmente identificadas pelos estudantes.

A Figura 3 traz um exemplo de atividade de Subcategoria IIIB, que propõe a construção

de uma circunferência inscrita a um triângulo qualquer.

Figura 3: Exemplo de Atividade de Subcategoria IIIB

Construa, no GeoGebra, uma circunferência inscrita a um triângulo qualquer.

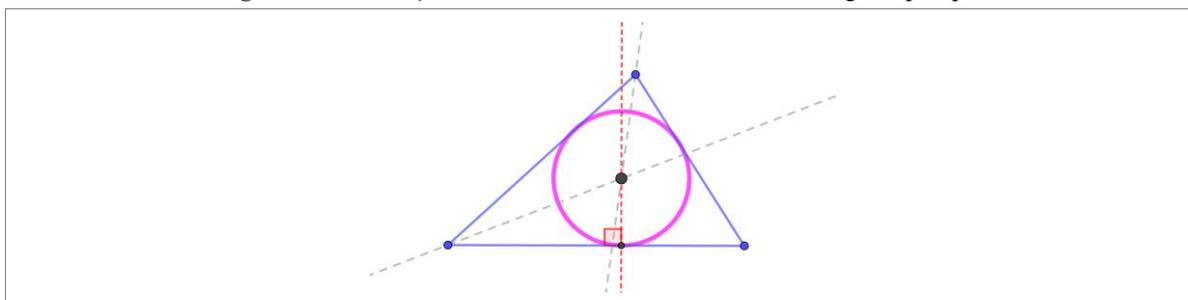
Fonte: Dados da Pesquisa

Percebe-se que há poucas instruções no enunciado do problema (os passos de construção devem ser elaborados pelo estudante). O primeiro passo é interpretar corretamente o enunciado, de modo a identificar que a construção inicial deve ser o triângulo e não a circunferência (inverter a ordem leva a um problema diferente do apresentado, com relações de dependência distintas entre triângulo e circunferência, e uma estratégia de resolução diferente). O passo seguinte é realizar a construção de um triângulo qualquer a partir da ferramenta Polígono ou de três segmentos de reta. A utilização dessas ferramentas corresponde a esquemas de uso do estudante, voltados ao instrumento, que possibilita a execução de tarefas de ordem secundária (Rabardel, 1995). Uma vez construído o triângulo, é preciso encontrar o centro da circunferência inscrita a esse triângulo. Nesse momento, conceitos matemáticos precisam entrar em jogo: como determinar o centro da circunferência? Reconhecer que o incentro (ponto de interseção das bissetrizes internas de um triângulo), correspondente ao centro procurado, é crucial para dar continuidade à resolução do problema e se revela aqui como uma propriedade implícita (não está declarada, e de identificação não imediata), o que caracteriza esta atividade como Subcategoria IIIB. A partir desse conceito matemático, esquemas de uso para a construção das bissetrizes devem ser utilizados.

Destaca-se que a construção do incentro pode ser considerado um problema mais geral (primário) a ser resolvido, que coordena problemas mais específicos (secundários), no mesmo sentido em que Rabardel (1995) define duas dimensões de atividade, que englobam dois níveis de esquemas: esquemas de uso, relacionados a tarefas secundárias; e esquemas de ação instrumentada, relacionados a totalidades, determinados pelo ato global de resolver a atividade. Assim, a construção do incentro envolve: (1) construção do triângulo (esquema de uso); (2) construção de pelo menos duas bissetrizes (esquemas de uso); (3) construção do ponto de interseção das bissetrizes (esquema de uso). A totalidade coordenada em um conjunto de esquemas elementares constitui um esquema de ação instrumentada (Rabardel, 1995), a saber, a construção do incentro de um triângulo qualquer.

Contudo, o problema ainda não está finalizado, pois é preciso construir a circunferência inscrita ao triângulo. Os pontos de tangência da circunferência aos lados do triângulo não são fornecidos pela construção realizada até o momento; precisam ser determinados pelo aluno. Novamente, conceitos matemáticos precisam entrar em jogo, ou seja, reconhecer que retas tangentes a uma circunferência são perpendiculares ao raio da circunferência no ponto de tangência (reiteradamente, conceitos implícitos e não declarados no problema). Sujeito e GeoGebra envolvem-se em uma relação recíproca, colocando-se em simbiose, ou seja, uma relação dinâmica entre pensamento e TD. Uma vez identificada a ideia matemática que norteia essa etapa da construção, esquemas de uso do GeoGebra são utilizados para construir a reta perpendicular a pelo menos um dos lados do triângulo que passa pelo incentro. Finalmente, marca-se o ponto de interseção da reta perpendicular com o respectivo lado (esquema de uso) e se constrói a circunferência (esquema de uso) inscrita ao triângulo, solucionando o problema (esquema de ação instrumentada), conforme ilustra a Figura 4. Aqui, identifica-se o sujeito agindo, pensando e se expressando por meio do GeoGebra, configurando-se um processo mútuo de ação e reação (Shaffer & Clinton, 2006).

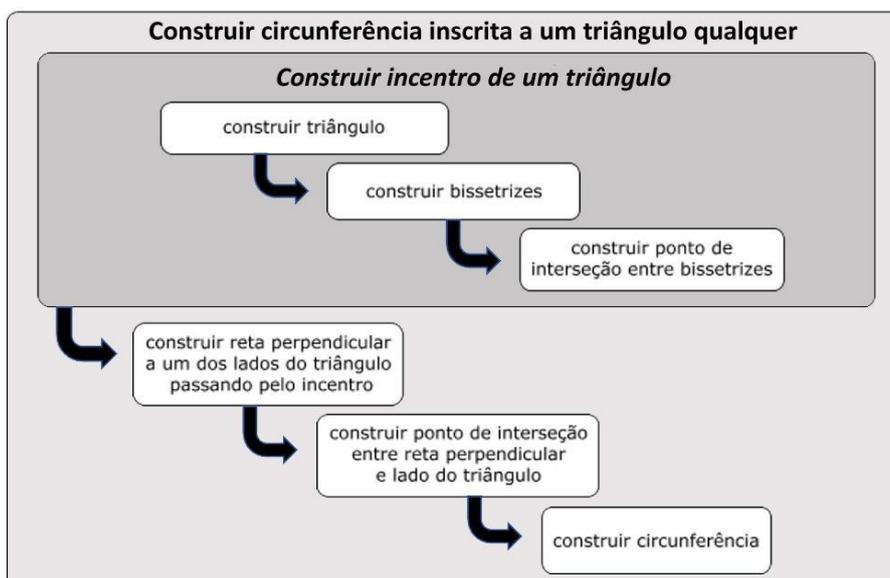
Figura 4: Construção da circunferência inscrita a um triângulo qualquer



Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura 5 apresenta possíveis esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada utilizados na realização da atividade, em que as regiões em cinza representam esquemas de ação instrumentada e as regiões em branco representam esquemas de uso.

Figura 5: Esquemas de utilização no exemplo de Subcategoria IIIB



Fonte: Dados da Pesquisa

Destacamos, a título de exemplo, que a atividade de construir o incentro de um triângulo constitui uma atividade de Subcategoria IIIA, apresentando uma situação de construção não guiada com propriedades explícitas.

Atividades dessa categoria apresentam-se como instrumentos-para-pensar-matemática-com, pois tanto mobilizam esquemas de uso e de ação instrumentada quanto articulam conceitos matemáticos na elaboração e verificação de hipóteses durante a resolução.

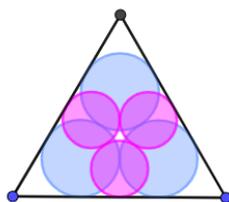
5.4 Atividades de Categoria IV

Atividades de Categoria IV procuram romper com a relação entre propriedades matemáticas e configurações prototípicas e particulares, exigindo do estudante a percepção de configurações simples dentro de configurações mais complexas.

É característica comum de atividades dessa categoria a proposta de construções desafiadoras e sem roteiro guiado, que implicam propriedades que não têm o mesmo reconhecimento imediato como em atividades do nível anterior. A Figura 6 traz um exemplo de atividade característica da Categoria IV.

Figura 6: Exemplo de Atividade de Categoria IV

Construa a figura dinâmica a seguir, que deve se manter estável quando movimentada, preservando as tangências sugeridas na figura.



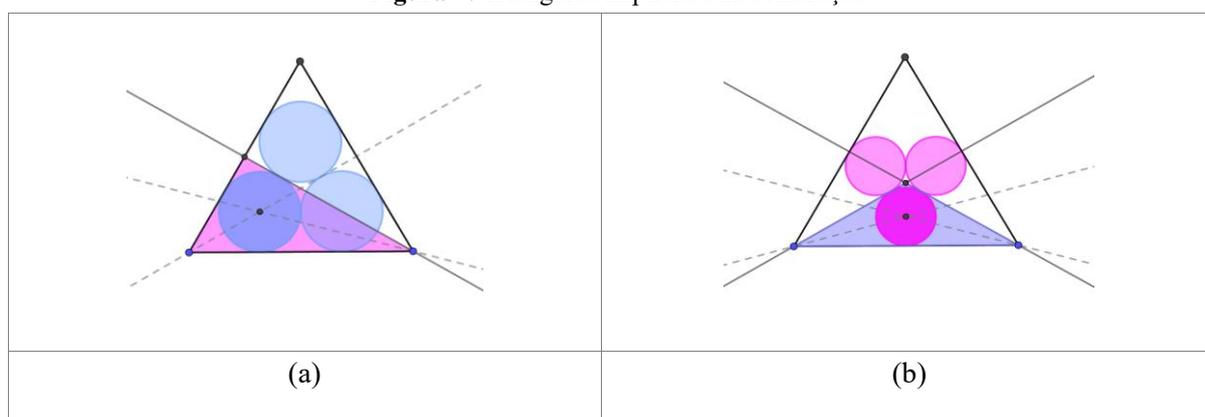
Fonte: Dados da Pesquisa

A solução do problema, que sugere a construção de seis círculos, tangentes entre si três a três, e tangentes aos lados de um triângulo equilátero, passa pela identificação de outros triângulos, não evidentes na figura apresentada, e pelo reconhecimento da determinação dos incentros destes triângulos, que correspondem aos centros das circunferências inscritas a eles.

Para a construção dos três círculos azuis, o estudante precisa visualizar três triângulos internos ao triângulo equilátero dado (um destes triângulos está destacado na Figura 7 (a)). Uma vez identificados os triângulos, é preciso colocar em ação esquemas de utilização, elementares e globais, que respondem a subobjetivos previamente identificados, para realizar a construção dos círculos inscritos em cada um deles.

De forma análoga, para construir os três círculos rosa, é necessário identificar outros três triângulos. A Figura 7 (b) destaca um deles. Novamente, esquemas de utilização, elementares e globais, constituídos por esquemas de uso mais elementares, devem se coordenar com conceitos matemáticos para realizar a construção dos três círculos.

Figura 7: Triângulos implícitos na construção



Fonte: Dados da Pesquisa

Para muitos estudantes, quando engajados em realizar atividades deste nível, a dificuldade reside no fato de que as configurações e propriedades matemáticas fundamentais para alcançar a solução do problema estão ocultas em novas configurações, tornando difícil reconhecê-las e/ou identificá-las. É preciso articular a análise destas propriedades com outros conceitos matemáticos conhecidos pelo estudante. Conforme afirmamos acima, estas atividades exigem a identificação e utilização de propriedades que estão apresentadas em situações não usuais, exigindo dos estudantes operar em patamares mais elevados de cognição e compreensão

de conceitos matemáticos. O GeoGebra, neste caso, possibilita experimentos de pensamentos (Gravina & Basso, 2012), e o sujeito age, pensa e se expressa por meio deles, evidenciando o ciclo de pensamento matemático explorar → conjecturar → validar → explicar → argumentar.

A partir do estudo apresentado, identificamos que o avanço contínuo no processo de apropriação do instrumento, ilustrado nessas categorias de atividades que o professor propõe, ocorre em duas dimensões: na complexidade e utilização de conceitos matemáticos; e na constituição de esquemas de utilização do artefato. Na medida em que estas duas dimensões se entrelaçam e se tornam um todo coordenado, evoluímos cada vez mais para o entendimento de instrumento como um instrumento-para-pensar-matemática-com.

6 Considerações Finais

O processo de gênese instrumental do professor de Matemática é fator fundamental para que a integração das TD nas salas de Matemática seja implementada. A apropriação de TD pelo professor de Matemática é um processo não-trivial, demorado (Drijvers *et al.*, 2010) e complexo (Fugçestad, Kynigos & Monaghan, 2010). O entendimento de que o instrumento didático elaborado pelo professor pode constituir-se em um potente instrumento-para-pensar-matemática-com é o pilar central deste artigo. A partir do estudo apresentado neste artigo, propomos categorias de atividades que podem estabelecer uma base conceitual para compreender as distintas formas como as TD estão sendo propostas, no sentido de se aproximar ou de se distanciar do pensar em Matemática.

Mostramos que a compreensão a respeito do conceito matemático e dos esquemas de utilização, desenvolvida de forma coordenada e conjunta na elaboração de atividades com TD, é fundamental para o sucesso destas propostas. Se novas possibilidades para aprender-matemática-com são oportunizadas pelas TD, é cada vez mais relevante e atual que as aulas de Matemática levem em consideração o universo que se abre com os instrumentos-para-pensar-matemática-com.

Dessa maneira, é fundamental que sejam priorizadas atividades com características das categorias II, III e IV, em que o aluno é levado a pensar em Matemática com TD (pensar-matemática-com). E, mais do que isso, a formação de professores para o uso de TD em sala de aula deve contemplar reflexões sobre a transformação das TD em instrumentos-de-pensar-matemática-com, e, além disso, o planejamento de atividades precisa promover o pensar em matemática por meio do ciclo explorar → conjecturar → validar → explicar → argumentar.

Referências

- Buteau, C.; Muller, E.; Mgombelo, J. & Sacristán, A. (2019). Stages of students' instrumental genesis of programming for mathematical investigations. In: *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v. 1). Pretoria, ZA: PME.
- Buteau, C.; Muller, E.; Mgombelo, J.; Sacristán, A. & Dreise, K. (2020). Instrumental Genesis Stages of Programming for Mathematical Work. *Digital Experiences in Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/s40751-020-00068-2>
- Cuélar, D. & Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. *Transformación*, 14(2), 1-15.
- Dijke-Droogers, M.; Drijvers, P. & Bakker, A. (2021). Statistical modeling processes through the lens of instrumental genesis. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 235-260. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10005-0>

- Drijvers, P.; Kieran, C.; Mariotti, M. A.; Ainley, J.; Andresen, M.; Chan, Y. C.; Dana-Picard, T.; Gueudet, G.; Kidron, I.; Leung, A. & Meagher, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: theoretical perspectives. In: C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Org.). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89-132). New York, NY: Springer. (New ICMI Study Series, v. 13).
- Fuglestad, A. B.; Kynigos, L. H. C. & Monaghan, J. (2010). Working with teachers: context and culture. In: C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Org.). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 293-310). New York, NY: Springer. (New ICMI Study Series, v. 13).
- Gravina, M. A. & Basso, M. V. (2012). Mídias Digitais na Educação Matemática. In: *Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática* (pp. 15-30). Porto Alegre, RS: Evangraf.
- Papert, S. (1980). *LOGO: computadores e educação*. São Paulo, SP: Editora Brasiliense.
- Piaget, J. (1970). *O nascimento da inteligência na criança*. Rio de Janeiro, RJ: Zahar.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, FR: Armand Colin.
- Schön, D. (2000). *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre, RS: Artmed.
- Shaffer, W. D. & Clinton, A. K. (2006). Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age. *Mind, Culture and Activity*, 13(4), 283-300. https://doi.org/10.1207/s15327884mca1304_2
- Shvarts, A.; Alberto, R.; Bakker, A.; Doorman, M. & Drijvers, P. (2019). Embodied collaboration to foster instrumental genesis in mathematics. In: *CSCL 2019 Proceedings* (pp. 672-675). Lyon, FR: International Society of the Learning Sciences.
- Yao, X. (2020). Preservice Mathematics Teachers' Instrumental Genesis and Their Development of Geometric Knowledge in a Dynamic Geometry Environment. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 27(4), 147-163.