Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: reflexões necessárias à formação docente na perspectiva da Teoria da Objetivação

Matheus Souza de Almeida
Universidade Estadual Paulista
Rio Claro, SP — Brasil
profalmeida.matheus@gmail.com
0000-0003-1782-763X

Jadilson Ramos de Almeida
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Recife, PE — Brasil
jadilson.almeida@ufrpe.br
0000-0003-3707-4807

2238-0345

10.37001/ripem.v15i3.4450

Recebido • 13/01/2025
Aprovado • 13/06/2025
Publicado • 01/09/2025

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Neste artigo, objetiva-se discutir sobre a caracterização de pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação a fim de suscitar reflexões necessárias à formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para a discussão teórica, alicerça-se nos conceitos de saber, conhecimento, aprendizagem, pensamento matemático, entre outros. Por sua vez, são apresentadas algumas reflexões a partir de um recorte dos dados empíricos de uma dissertação de mestrado. No contexto da referida pesquisa-formação de natureza qualitativa, assumiu-se uma abordagem multimodal para a análise dos dados videogravados. Dentre os resultados, sublinha-se, por meio dos elementos discursivos e não discursivos, a emergência dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico (indeterminação, denotação e analiticidade) no engajamento coletivo entre as professoras e o pesquisador-formador. Em suma, defende-se que as articulações de diferentes meios semióticos com o uso de artefatos culturais, digitais ou não, podem movimentar e ressignificar o pensamento algébrico, tanto na formação docente, como na Educação Básica.

Palavras-chave: Álgebra Escolar. Abordagem Multimodal. Artefatos Culturais. Formação de Professores. Educação Matemática.

Algebraic thinking in the early years of elementary school: reflections necessary for teacher education from the perspective of the theory of objectification

Abstract: This article aims to discuss the characterization of algebraic thinking from the perspective of the theory of objectification in order to raise reflections necessary for teacher education who teach K1 through K5 (the first years of elementary school). The theoretical discussion is based on the concepts of knowing, knowledge, learning, mathematical thinking, among others. In turn, some reflections are presented based on a section of the empirical data of a master's dissertation. In the context of the aforementioned qualitative formative research, a multimodal approach was adopted for the analysis of the videotaped data. Among the results, the emergence of the elements that characterize algebraic thinking (indeterminacy, denotation and analyticity) in the collective engagement between the teachers and the researcher-educator is highlighted through the discursive and non-discursive elements. In short, it is argued that the articulations of different semiotic means with the use of cultural artifacts, digital or not, can move and resignify algebraic thinking, both in teacher education and in basic education.

Keywords: School Algebra. Multimodal Approach. Cultural Artifacts. Teacher Education. Mathematics Education.

Pensamiento algebraico en los primeros años de la educación primaria: reflexiones necesarias para la formación docente desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación

Resumen: Este artículo tiene como objetivo discutir la caracterización del pensamiento algebraico desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación con el fin de plantear reflexiones necesarias para la formación de docentes en los años iniciales de Educación Primaria. La discusión teórica se basa en los conceptos de conocimiento, aprendizaje, pensamiento matemático, entre otros. A su vez, se presentan algunas reflexiones basadas en una sección de datos empíricos de una disertación de maestría. En el contexto de la investigación-formación cualitativa mencionada, se adoptó un enfoque multimodal para el análisis de los datos videograbados. Entre los resultados, se destaca la emergencia de los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico (indeterminación, denotación y analiticidad) en la interacción colectiva entre los docentes y el investigador-formador a través de elementos discursivos y no discursivos. En resumen, se argumenta que las articulaciones de diferentes medios semióticos con el uso de artefactos culturales, digitales o no, pueden mover y resignificar el pensamiento algebraico, tanto en la formación docente como en la Educación Básica.

Palabras chave: Álgebra Escolar. Enfoque Multimodal. Artefactos Culturales. Formación Docente. Educación Matemática.

1 Introdução

Nas salas de aula de Matemática, especificamente nos tópicos de álgebra, muitas professoras e muitos professores já devem ter escutado esta pergunta: quem inventou de colocar letras na Matemática? Tal inquietação pode desencadear outras questões, a saber: o que significa, por que, quando e como as letras são introduzidas no ensino de Matemática?

A História da Matemática, particularmente da álgebra, nos mostra que nem sempre as grandezas indeterminadas (incógnitas, variáveis, parâmetros etc.) foram denotadas por intermédio de letras. Conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), a linguagem algébrica passou por três grandes estágios: retórico, sincopado e simbólico.

No estágio da *linguagem retórica*, as ideias algébricas eram expressas por meio da linguagem corrente, a exemplo da escrita cuneiforme registrada nas tábuas de argila e das recitações orais pelos Babilônicos (Radford, 2011b). Essa fase refere-se à época das civilizações antigas, como os egípcios (2000 a.C.) e os babilônicos (1700 a.C.).

No estágio da *linguagem sincopada*, as ideias algébricas deixaram de ser expressas apenas por meio de palavras e passaram a ser representadas também por intermédio de expressões concisas e abreviadas referentes às grandezas desconhecidas (Radford, 2021a). Essa fase remete à época em que Diofanto introduziu o termo *arithmos* para indicar uma incógnita em suas equações.

No estágio da *linguagem simbólica*, as ideias algébricas começaram a ser expressas por meio de uma simbologia que representava as quantidades indeterminadas. Essa fase é marcada pela introdução das letras para denotar as incógnitas por parte do matemático francês François Viète (1540-1603).

Mediante a descrição desses estágios,

> Retomamos assim a compreensão de que tanto o campo da álgebra quanto o de outros conhecimentos matemáticos foram elaborados historicamente por indivíduos de

> diversas civilizações, em diferentes épocas, para atender às necessidades postas pela experiência prática e de seu próprio desenvolvimento como ciência, sendo seus símbolos a possibilidade de representação e concretização para comunicação de seus conceitos, bem como de seus processos de generalização e abstração (Sousa, Panossian & Cedro, 2014, p. 31).

Por outro lado, convém mencionar a crítica de Radford (2011a) de que, em um panorama sociocultural do desenvolvimento da álgebra, as linguagens algébricas emergiram a partir de necessidades históricas e não apenas como um movimento linear de "evolução matemática" até chegar à "abstração pura" dos objetos matemáticos. Como exemplo dessa consideração, o autor destaca que

> a álgebra sincopada não foi um estágio intermediário de maturação no qual o conhecimento tirou uma espécie de descanso em seu caminhar em direção ao simbolismo. Ao invés disso, foi uma mera estratégia técnica imposta pelas limitações da escrita e pela falta da imprensa em tempos passados aos diligentes escribas que tinham de copiar os manuscritos à mão (Radford, 2011a, p. 77).[1]

Tais reflexões nos colocam diante da necessidade de considerarmos o movimento histórico-cultural dos conceitos na organização das práticas de ensino de Matemática, em particular da álgebra escolar – aquela trabalhada na Educação Básica –, e não focarmos meramente na manipulação do simbolismo alfanumérico desprovida de significados (Moretti & Radford, 2023, 2015; Panossian, Sousa & Moura, 2017; Almeida, 2017; Sousa, Panossian & Cedro, 2014).

Segundo Almeida (2017), na contemporaneidade, há duas amplas vertentes acerca da álgebra escolar, as quais compreendem-na como: (a) uma *linguagem específica* utilizada para representar valores, essencialmente desconhecidos; e (b) uma *maneira peculiar de pensar* acerca de situações matemáticas. Nesse cenário, acreditamos que compreender a álgebra escolar restrita à linguagem alfanumérica implica desconsiderar outras linguagens e, consequentemente, o movimento lógico dos entes algébricos em outros contextos histórico-culturais. Em outros termos, precisamos direcionar nossos olhares para o tipo de raciocínio que emerge na resolução de problemas a fim de identificarmos quais estratégias e justificativas são apresentadas no trabalho com as grandezas desconhecidas.

Outrossim, pesquisas, como as de Radford (2022), Carraher, Schliemann e Schwartz (2017), Kieran, Pang, Schifter e Ng (2016) e Blanton (2010), apontam que o movimento internacional *Early Algebra* tem demarcado novas necessidades relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática. "A álgebra inicial se baseia nos contextos de fundo dos problemas, introduz apenas gradualmente a notação formal e entrelaça firmemente os tópicos existentes da matemática inicial" (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2017, p. 262, tradução nossa).

No contexto brasileiro, algumas inquietações têm circundado as professoras e os professores que ensinam Matemática, como: O que é "álgebra"? O que é "pensar algebricamente"? O que caracteriza o "pensamento algébrico"? Esses questionamentos instauram-se frente às demandas curriculares vigentes, propostas pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que preconizam a relevância de introduzir a álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, com ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico. Ressaltamos que, embora esse tipo de pensamento matemático tenha emergido como

[1] Considerada uma questão de coerência na tradução para o português brasileiro, a frase foi modificada sem alteração de sentido.

uma necessidade curricular, não há uma definição precisa no referido documento normativo, nem caminhos práticos de como o trabalho com a álgebra inicial pode ser feito. Diante dessa lacuna, nos questionamos: como a perspectiva de pensamento algébrico advogada na Teoria da Objetivação pode suscitar reflexões necessárias à formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental?

A Teoria da Objetivação (TO) é uma teoria de ensino e aprendizagem, proposta pelo professor Luis Radford, com inspirações filosóficas no materialismo-dialético, na pedagogia freireana e na escola histórico-cultural de Vygotsky e seus colaboradores. Na área da Educação Matemática, Radford (2021a) preconiza o esforço político, social, histórico, cultural, crítico, reflexivo e ético nos processos de ensino-aprendizagem; elegendo, em muitos dos seus estudos, o campo algébrico como alvo de investigação para movimentar os conceitos da TO na sala de aula da Educação Básica. Nesse cenário, salientamos que, conforme o autor, o ensino-aprendizagem acontece dialeticamente a partir das relações entre professores e alunos; ou seja, mesmo desempenhando funções distintas, trabalham lado a lado assumindo uma corresponsabilidade. Assim, ao reconhecermos a relação dialética no ensino-aprendizagem, pautamos as possibilidades de aprendizagem docente sem perdermos o foco das implicações para a aprendizagem estudantil.

É no bojo das discussões supracitadas que a proposição deste artigo surge como um recorte da dissertação de mestrado do autor sob a orientação do coautor, desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEdumatec) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), que teve como objetivo "caracterizar o pensamento algébrico que emerge, a partir do engajamento coletivo de professoras dos anos iniciais, em atividades formativas envolvendo o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais" (Almeida, 2025, p. 31).

Particularmente neste texto, temos o objetivo de discutir sobre a caracterização de pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação a fim de suscitar reflexões necessárias à formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, estruturamos nossa argumentação mediante um convite ao encontro com alguns elementos conceituais da TO; posteriormente, discorremos a respeito dos aspectos metodológicos para então nos debruçarmos sobre os resultados e discussão. Por fim, retomamos e refinamos algumas reflexões, necessárias à formação docente, relacionadas à álgebra inicial.

2 Pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação

Uma das ideias fundantes da TO é a noção de *aprendizagem coletiva* na qual os sujeitos engajam-se, processualmente, uns com os outros, por meio do desenvolvimento de uma atividade[2], para uma produção não alienante (Radford, 2021a). Nesse contexto, há uma distinção entre saber e conhecimento. Enquanto o *saber* é definido como uma entidade geral disponível histórica e culturalmente, o *conhecimento* refere-se ao encontro particular com o saber. Dialeticamente, o saber constitui-se como conhecimento, em um movimento contínuo e inacabado, denominado de *processo de objetivação*. Por exemplo, nos excertos da atividade formativa apresentados mais adiante, as professoras encontram-se coletivamente com formas específicas de resolver problemas envolvendo introdução às equações. Assim sendo, as estratégias mobilizadas, os argumentos apresentados e as compreensões acerca da organização do ensino da álgebra configuram-se como manifestações particulares de um saber algébrico

[2] O conceito de atividade advogado na TO tem um forte significado social, atrelado à união dos sujeitos não apenas para desempenhar uma determinada tarefa, mas, principalmente, para buscar compreender o quê, como e por quê estão assumindo determinadas escolhas e ações. Nesse sentido, acontece uma atividade conjunta entre professores e alunos em sala de aula: a atividade de ensino-aprendizagem.

mais geral: as equações polinomiais do primeiro grau.

Outro ponto importante é a compreensão de *pensamento* proposto na TO. Segundo Radford (2011c), o *pensamento* possui uma natureza multimodal, isto é, abrange tanto os componentes materiais quanto os ideacionais. Como exemplos de componentes materiais, temos: gestos, fala, escrita, ritmos, signos, etc. Quanto aos aspectos ideacionais, temos a fala interior e a imaginação do sujeito. Desse modo, as conexões entre esses componentes exprimem a unidade do pensamento humano, assim como sua emergência e evolução.

Fundamentado na corrente histórico-cultural de Vygotsky e na filosofia materialista-dialética de Marx, Radford (2021a, p. 147) postula que: "A cognição sensorial enfatiza a ideia de que nosso pensamento, sentimentos, ações e todas as nossas relações com o mundo (ouvir, perceber, cheirar, sentir, etc.), são *entrelaçamentos históricos* de nosso corpo e a cultura material e ideacional". Logo, para analisar o movimento do pensamento, tanto na formação de professores, como na Educação Básica, é indispensável considerar a concepção de *cognição sensorial*, proposta por Radford (2021a), na qual, mente, corpo e mundo são compreendidos como entidades inter-relacionadas.

> Como todos os sistemas de pensamento, o pensamento matemático tem origem na confluência de vários processos da sociedade que, em sua interação, produzem e modificam uns aos outros. Como resultado, o pensamento em geral, e o pensamento matemático em particular, incorpora e refracta os vários processos da sociedade, e expressa tensões e contradições sociais intrínsecas (Radford, 2021a, p. 216).

Nessa perspectiva, salientamos que a natureza cultural do pensamento matemático na Teoria da Objetivação advoga que não podemos compreender uma forma particular de pensamento sem o entendimento de outras formas de pensamento. Conforme Radford (2021a, p. 232), em uma perspectiva materialista-dialética, essa posição pode ser assumida quando investigamos "as dimensões econômica, política e ideológica dos processos sociais que tais formas de pensamento incorporam e refratam".

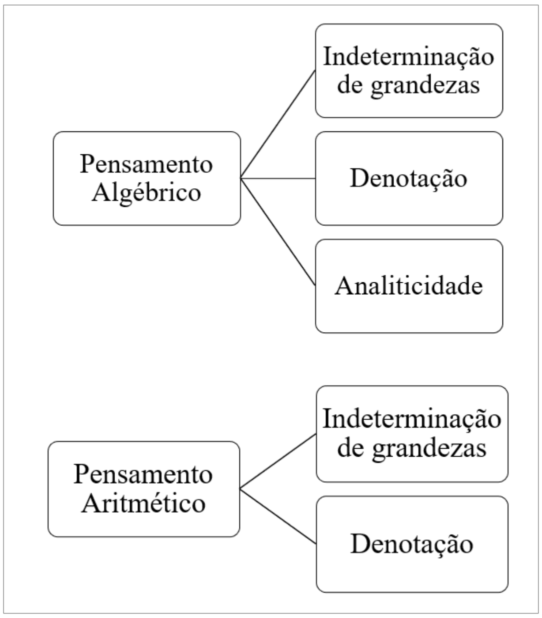
Quanto aos componentes materiais do pensamento matemático, o autor defende que, para tornar evidente a dimensão histórico-cultural, professores e alunos utilizam diversos signos, artefatos, entre outros dispositivos linguísticos. Nesse contexto, o autor define os *meios semióticos de objetivação* como sendo

> Os objetos, ferramentas, dispositivos linguísticos e signos que os indivíduos usam intencionalmente nos processos de criação de significados sociais para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar claras suas intenções e para realizar suas ações a fim de atingir o objeto de suas atividades, são chamados de meios semióticos de objetivação. Estes, são semióticos na medida em que são peças-chave na produção de significados embutidos nos processos de objetivação (Radford, 2021a, p. 136).

Destacamos ainda que a TO possui outros elementos teóricos, mas que não são o foco central da discussão que buscamos empreender neste texto. Dito isso, partindo dos conceitos supramencionados, passamos a acentuar o debate no campo do pensamento algébrico.

Diferentemente da vertente que defende uma continuidade entre a aritmética e a álgebra, Radford (2014) sustenta que há ruptura entre essas duas áreas. Nesse cenário, levando em conta que os professores que ensinam Matemática podem confundir o ensino de álgebra com o ensino de aritmética, ou o inverso (Radford, 2008, 2014), elucidamos as diferenças e os aspectos específicos dos pensamentos algébrico e do aritmético na Figura 1.

Figura 1: Vetores caracterizadores dos pensamentos aritmético e algébrico



Fonte: Almeida (2024).

Reiteramos que o nosso posicionamento teórico é a perspectiva de pensamento algébrico apresentada na Teoria da Objetivação, a qual reconhece a existência de uma relação relevante entre o pensamento aritmético e algébrico, mas ressalta as *rupturas epistemológicas* ao assumir impossível extrair toda álgebra escolar da aritmética. Nesse sentido, Radford (2021b, p. 173) propõe que

> Na perspectiva da teoria da objetivação, a característica do pensamento algébrico não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do objeto sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de raciocínio que é feito com grandezas. Mais precisamente, em nossa perspectiva, três condições caracterizariam o pensamento algébrico: a primeira tem a ver com os objetos do raciocínio; a segunda com a forma como os objetos são simbolizados (se trata, então, de um problema semiótico) e a terceira sobre como se raciocina sobre objetos do raciocínio.

De acordo com Radford (2021b), os três elementos que caracterizam o pensamento algébrico são: a *indeterminação de grandezas*, a *denotação* e a *analiticidade*. A *analiticidade* configura-se como o principal elemento caracterizador do pensamento algébrico, uma vez que os outros dois elementos também caracterizam o pensamento aritmético (Radford, 2021b).

O *raciocínio analítico* constitui-se por duas características fundamentais: (a) o estabelecimento de relações entre grandezas determinadas e indeterminadas, operando com as grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas; e (b) a realização de operações de forma dedutiva, deduzindo as proposições. De modo geral, pensar analiticamente demanda considerar o indeterminado como se fosse determinado e deduzir a partir das premissas.

Já a *indeterminação de grandezas* refere-se ao trabalho com as grandezas não determinadas ou desconhecidas e são designadas por incógnitas, variáveis, parâmetros, entre outros signos. Contudo, com base em Gomes e Noronha (2020), consideramos que a álgebra não se restringe ao uso de indeterminações na elaboração e na resolução de problemas, pois, para caracterizar o pensamento algébrico, é necessário compreender o sentido do indeterminado, provido de significado e não meramente da utilização de técnicas e procedimentos mecânicos para a manipulação das letras e números. Em outras palavras, o trabalho com grandezas desconhecidas acontece como parte conhecida dos problemas e não necessariamente é denotado por meio do simbolismo alfanumérico (Radford, 2021b).

Por fim, temos a *denotação* no que tange às diversas formas de nomear e simbolizar as grandezas indeterminadas envolvidas no problema. Algumas das maneiras de denotar são: desenhos, gestos, fala, escrita, simbolismo alfanumérico, signos não corriqueiros ou até mesmo a combinação deles.

Para entendermos melhor os três elementos caracterizadores do pensamento algébrico, recorremos ao exemplo de uma equação polinomial do 1º grau "7n + 2 = 6n + 8" discutido por Radford (2021a). A fim de encontrar o valor do termo desconhecido "n" (o indeterminado), os estudantes podem trabalhar com o sinal de igualdade "=" em uma perspectiva relacional, isto é, com a noção de equivalência entre as operações dos membros esquerdo e direito da relação de igualdade. Nesse viés, para resolver o problema, seria necessário realizar a subtração de "2" e "6n" em ambos os lados da equação, para concluir que "n = 6". Tal exemplo requer um raciocínio lógico-dedutivo, isto é, assumir as premissas como verdade e operar com o desconhecido como se fosse conhecido para determinar o valor da incógnita.

Por outro lado, se o método utilizado fosse o de tentativa e erro, no qual os alunos poderiam substituir "n" por "1", "2", e assim sucessivamente, até chegar em "6", não se faria presente o vetor da *analiticidade*. Nesse caso, na perspectiva da TO, mesmo com a presença da *indeterminação de grandezas* e da *denotação*, os alunos estariam pensando aritmeticamente. Mas a questão que nos interessa é: como convidar os estudantes e professores a pensarem analiticamente em problemas de equações do tipo Ax + B = Cx + D?

O trabalho de Filloy e Rojano (1989) indica que, em problemas de equação do tipo Ax + B = C, os alunos geralmente utilizam métodos aritméticos. Isso porque, adotando a perspectiva operacional do sinal de igualdade "=", os alunos entendem o que está do lado direito como um resultado das operações no lado esquerdo; logo, eles subtraem B de C e dividem por A. Entretanto, em equações com incógnitas em ambos os lados, do tipo Ax + B = Cx + D esse método de resolução não é mais eficaz. Nesse caso, os alunos podem recorrer a um raciocínio verdadeiramente algébrico: operar dedutivamente com a grandeza desconhecida como se fosse conhecida. É nesse tipo de equação que procuramos aprofundar nossos estudos.

Para a ampliação do repertório no que concerne à álgebra escolar, consoante Radford (2021b), um caminho possível é compreender que *o pensamento algébrico não é caracterizado pelo uso do simbolismo alfanumérico*. Apesar de alguns problemas usarem explicitamente as letras para representar as grandezas desconhecidas (incógnitas, parâmetros, variáveis etc.), o tipo de raciocínio pode não ser analítico, isto é, quando não se atribui nenhuma significação às letras e muito menos se faz uma dedução a partir das hipóteses. A exemplo, para resolver a equação 4x + 2 = 2x + 6, é possível atribuir valores conhecidos (1, 2, ...) "x", até concluir que o resultado é 4. Nesse contexto, mesmo trabalhando com o simbolismo alfanumérico, o tipo de raciocínio mobilizado estaria no campo da aritmética, ou seja, haveria a emergência do pensamento aritmético no processo de resolução da equação (Radford, 2022a, 2022b, 2021b). Para o campo da álgebra, nos debruçamos nos resultados e na discussão.

Outro caminho importante, defendido pelo teórico, está relacionado à compreensão de que a *álgebra não é uma aritmética generalizada*. Para Radford (2021b), assim como no estudo de Filloy e Rojano (1989), existem rupturas epistemológicas entre esses campos da Matemática. Por sua vez, embora o autor considere que há uma relação entre os pensamentos aritmético e algébrico, assim como constatamos nos resultados da dissertação de Almeida (2024), é impossível extrair toda álgebra escolar da aritmética.

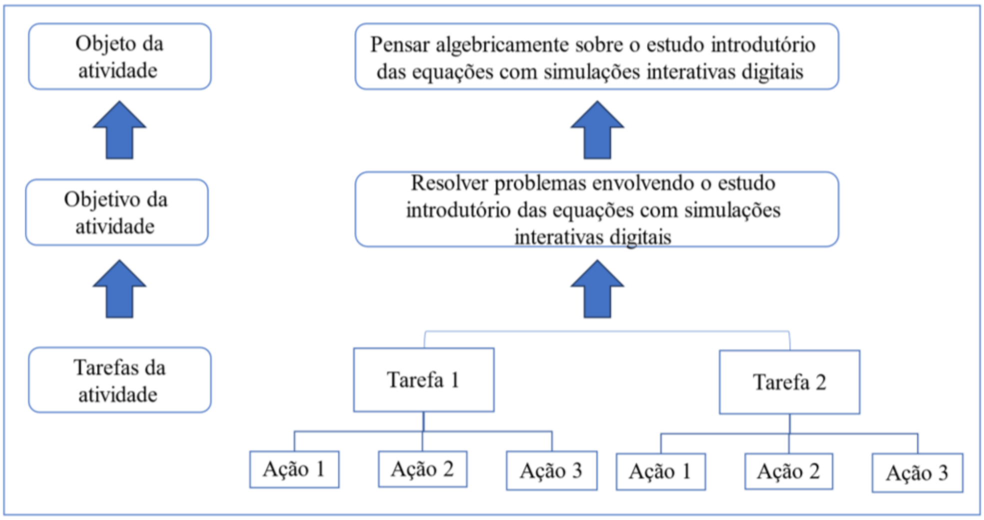
3 Aspectos metodológicos

Com o objetivo de discutir sobre a caracterização de pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação a fim de suscitar reflexões necessárias à formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, apresentamos um recorte da dissertação de Almeida (2024).

Para a produção dos dados da pesquisa de mestrado, realizamos um curso de formação continuada com professoras dos anos iniciais de uma rede municipal do estado de Pernambuco. Esse curso ocorreu presencialmente a partir de dois encontros de quatro horas cada um, totalizando uma carga horária de oito horas. Neste artigo, damos ênfase especificamente às análises da vivência de uma atividade formativa com um grupo constituído por três professoras, identificadas por codinomes.

Na teoria em cena, a noção de atividade assume um forte sentido social de envolvimento dos sujeitos engajados para resolver uma determinada *tarefa* com um determinado *objetivo* visando alcançar um *objeto*. Assim, Radford (2021a) propõe que toda atividade de ensino-aprendizagem possui esta estrutura: objeto-objetivo-tarefa. No nosso contexto, as atividades formativas (ver Figura 2), em torno dos problemas de enunciado, foram estruturadas da seguinte forma.

Figura 2: Estrutura das atividades formativas envolvendo os problemas de enunciado



Fonte: Almeida (2024).

As estruturas das atividades formativas, relacionadas às tarefas 1 e 2, foram organizadas com base nas orientações das dimensões matemática e social, propostas em Radford (2021a). Particularmente, inspirando-nos nos problemas de enunciados, apresentados nos estudos de Radford (2021a, 2021b), planejamos as tarefas relativas ao processo de introdução às equações no ensino-aprendizagem da álgebra inicial. No caso deste artigo, daremos enfoque na tarefa 2.

No que se refere à *dimensão matemática*, convém ressaltar que, segundo Radford (2021b), o conjunto de problemas que podem ser apresentados em linguagem natural – como enunciado – e traduzidos semioticamente por meios concretos e/ou icônicos é bastante limitado; todavia é suficiente para movimentar o primeiro encontro com o pensamento algébrico no contexto da álgebra inicial. Atrelado a esse pressuposto, também assumimos no planejamento das tarefas que

> Os problemas de enunciado não são neutros nem cognitivamente e nem culturalmente.

> (...) Inevitavelmente, os problemas mostram ostensivamente alguns aspectos da natureza do mundo, como ele é matematizado, e fornecem a base para ilustrar como a verdade pode ser estabelecida. (Radford, 2021b, p. 183)

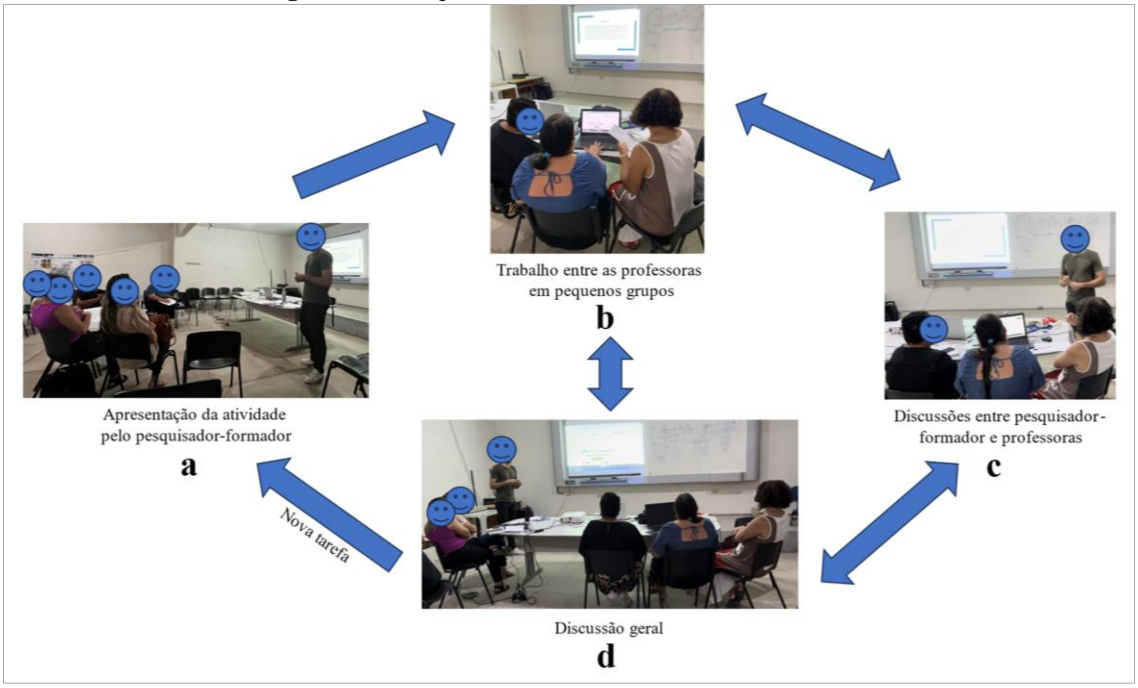
Do ponto de vista da *dimensão social*, as ações relacionadas às tarefas (*Ação 1* – Resolução do problema com o uso do simulador, *Ação 2* – Escrita da resolução do problema em linguagem natural e *Ação 3* – Escrita da resolução do problema em linguagem alfanumérica) foram fundamentais para propiciar o engajamento coletivo entre as professoras e o pesquisador-formador. Entretanto, levando em conta o objetivo da pesquisa, Almeida (2024) deu ênfase à ação 1 nas análises dos dados, ou seja, nas resoluções de problemas de enunciado, envolvendo equações, com o uso do simulador digital Explorador da Igualdade: Básico[3].

Além das referidas ações, visando contemplar a terceira questão supracitada relativa à dimensão social, "fomentamos formas coletivas de produção de saber e modos de colaboração humana de natureza não alienante" (Radford, 2021a, p. 178). Tal fato deu-se, ao longo do processo formativo, ao passo que as professoras foram repensando suas posições nas relações umas com as outras.

De modo geral, acentuamos que há uma relação biunívoca entre as dimensões matemática e social nas tarefas propostas, isto é, acreditamos que a organização social afeta a organização matemática e vice-versa. Com isso, reiteramos que o trabalho coletivo influencia na resolução de problemas, particularmente por meio da diversidade de estratégias, de pontos de vistas, de formas de tentar argumentar e se posicionar diante da presença do outro, entre outros aspectos.

Quanto às formas de engajamento coletivo, vivenciamos as atividades formativas por meio das diferentes etapas propostas por Radford (2021a):

Figura 3: Principais momentos das atividades formativas



Fonte: Almeida (2024) com base em Radford (2021a).

Na apresentação da atividade pelo pesquisador-formador, as tarefas foram explicadas a

[3] Para mais informações, consultar: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/equality-explorer-basics.

fim de que as professoras pudessem compreender o que estava sendo requerido. Por conseguinte, no trabalho em pequenos grupos, as professoras discutiam entre si e com o pesquisador-formador. Por fim, havia a discussão geral das proposições dos pequenos grupos. Como ilustrado na Figura 3, após o momento *a*, não tinha uma hierarquia entre os momentos *b*, *c* e *d*. Neste texto, os dados foram categorizados mediante os momentos *b* e *c*.

Ademais, os dados foram registrados pelas: (a) gravações dos encontros, no formato de vídeo e áudio, para analisarmos os gestos e as falas dos pequenos e do grande grupo; (b) gravações das telas dos notebooks; (c) produções escritas das professoras para responderem as tarefas; e (d) anotações do pesquisador-formador no diário de bordo, com algumas observações sobre a pesquisa-formação.

Para registrar os dados, o pesquisador contou com a colaboração de uma formadora do município e uma pessoa externa à instituição; cada uma delas ficou responsável por gravar um grupo. Além disso, a última pessoa gravou os momentos de discussão no grande grupo.

A diversidade dos registros dos dados justifica-se pela abordagem de análise multimodal (Moretti & Radford, 2023a; Radford, Arzarello, Edwards & Sabena, 2017; Radford, 2015; Arzarello, 2006) do pensamento algébrico que compreende diferentes meios semióticos para representá-lo (Radford, 2011c), além da nossa preocupação em atingir, não apenas os objetivos da pesquisa, como também contribuir com a formação das professoras.

Para a análise dos dados, transcrevemos as falas e os movimentos das participantes, elencando-os por linhas enumeradas no formato "N-n" – o qual "N" refere-se ao número do episódio de análise e "n" à ordem da linha. Por exemplo: em "2.10", "2" refere-se ao segundo episódio e "10" à posição da linha do discurso naquele episódio.

Mediante o exposto, caracterizamos a natureza da investigação como qualitativa e do tipo pesquisa-formação (Longarezi & Silva, 2008). Conforme as autoras, na pesquisa-formação, o pesquisador se insere no ambiente de estudo ora como formador, desenvolvendo uma prática pedagógica para a formação crítica dos professores em atualização dos saberes, ora como investigador, sistematizando, analisando e compreendendo como ocorre esse processo formativo com professores. Nesse sentido, consideramos que "a pesquisa tem como princípio e fim a prática social" (Longarezi & Silva, 2008, p. 4059). Portanto, dialeticamente, os participantes da investigação são formados por meio da pesquisa, bem como a pesquisa é constituída pelas produções da/na formação.

4 Resultados e discussão

Nesta seção, organizamos os dados em duas categorias de análises: *4.1 A emergência do pensamento algébrico no engajamento coletivo entre as professoras*; e *4.2 A emergência do pensamento algébrico no engajamento coletivo entre as professoras e o pesquisador-formador*. Essas categorias referem-se à vivência de uma atividade formativa com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Particularmente, apresentamos trechos de momentos que evidenciam a nossa defesa de que o trabalho coletivo pode redimensionar a resolução de problemas algébricos, em particular envolvendo o estudo introdutório de equações.

O segundo problema de enunciado em foco envolve pessoas (Ana, Maria e Fernanda) que possuem esferas beges e vermelhas. As esferas beges (grandezas determinadas) têm 1g cada uma delas. Não se sabe a quantidade de gramas das esferas vermelhas (grandezas indeterminadas). Por conseguinte, o problema gira em torno das grandezas, conhecidas e desconhecidas, presentes na balança de dois pratos, de modo que ela esteja equilibrada (igualdade), visando reduzir a equação e encontrar o valor da grama de uma esfera vermelha (a indeterminação), como podemos observar no Quadro 1:

Quadro 1: Segundo problema de enunciado proposto na pesquisa

Problema 2: Ana, Maria e Fernanda foram desafiadas a descobrir a massa da esfera vermelha presente em uma balança de dois pratos equilibrada. Sabendo que, em um prato da balança, há três esferas vermelhas e uma esfera bege e, no outro prato da balança, há uma esfera vermelha e cinco esferas beges, qual a massa da esfera vermelha encontrada por elas? Considere a esfera bege com 1g de massa.

Fonte: Almeida (2024).

O problema supramencionado pode ser denotado na linguagem alfanumérica desta forma: $3x + 1 = x + 5$. Ao mobilizar o raciocínio analítico (Radford 2022a, 2022b, 2021b), pode-se subtrair "x" e "1" e depois dividir por "2" os termos e coeficientes em ambos os membros da igualdade, concluindo, por um processo lógico-dedutivo, que $x = 2$. Certamente, como as professoras gastaram energia na resolução do problema anterior (a tarefa 1)[4], superando as estratégias aritméticas, a partir do trabalho coletivo com o pesquisador-formador, e revelando indícios de pensamento algébrico, no final da discussão, a resolução deste problema deu-se por um processo mais sintético.

No que diz respeito à resolução da tarefa 1, Almeida (2024) aponta que o fato de Rosália ter sugerido uma equação ($3x = 9$) equivalente à equação inicial ($2x + 1 = x + 3$) permitiu que as professoras trabalhassem em torno de uma operação matemática: "separar" os cubos azuis (grandezas indeterminadas) e as esferas beges (grandezas determinadas) em partes proporcionais; o que possibilitou concluir que, para cada cubo azul, havia três esferas beges e, logo, $x = 3$. Essa operação também é conhecida, em outros contextos de resolução de equações, como divisão (Radford, 2022b). Apesar de termos planejado que a estratégia de separação do termo independente pelo coeficiente da incógnita seria introduzida na resolução do segundo problema, acreditamos que o encontro prévio com esse saber algébrico foi indispensável para o andamento da atividade formativa analisada nas subseções seguintes.

4.1 A emergência do pensamento algébrico no engajamento coletivo entre as professoras

Nesta categoria de análise, focamos no momento *b* da atividade formativa, isto é, no trabalho entre as professoras em pequeno grupo (ver Figura 3 anterior). A seguir, acompanhamos a discussão do pequeno grupo na tradução do problema para o simulador digital

2.112 Rosália: Vamos...

2.113 Andréia: Vamos lá!

2.114 Rosália: Espero que esse [o problema 2] seja mais fácil!

2.115 Andréia: [iniciou a leitura do enunciado]. Ana, Maria e Fernanda foram desafiadas a descobrir a massa da esfera vermelha presente em uma balança de dois pratos equilibrada. Sabendo que em um prato há três esferas vermelhas... [começou a simular o problema]. Um, dois, três. [retomou a leitura]. E uma esfera bege.

2.116 Andréia e Rosália: Okay!

2.118 Andréia: E no outro lado da balança, há uma esfera vermelha...

[4] Para um maior aprofundamento dessa discussão, recomendamos a leitura do trabalho de Almeida (2024).

2.119 Rosália: Certo!

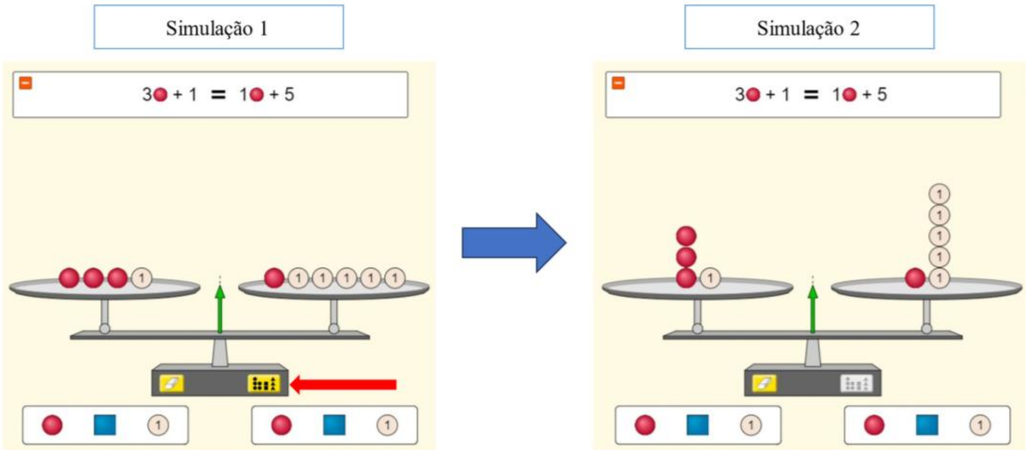
2.120 Andréia: E cinco bolinhas beges. [começa a simular o problema]. Um, dois, três, quatro, cinco. Okay, né?! Vamos fazer aquela coisa [utilizou a função de empilhamento] que elas [as professoras do outro grupo] botaram, né?

2.121 Rosália: Isso!

De acordo com Radford (2021a), ao desempenhar uma tarefa, nem sempre os indivíduos percebem o objeto de saber da atividade, ou seja, não existe uma linearidade no movimento de consciência. Mas, como podemos notar no diálogo supracitado (2.112 a 2.121), as professoras não tiveram dificuldades em traduzir o segundo problema, em linguagem natural, para o simulador digital. Em outras palavras, elas foram diretamente ao objeto da tarefa: pensar algebricamente sobre o estudo introdutório das equações com simulações interativas digitais.

Nesse processo de resolução da equação, as professoras utilizaram uma função do artefato tecnológico digital para empilhar, separadamente, as esferas vermelhas e as esferas beges. Em outros termos, elas organizaram as grandezas determinadas e indeterminadas para auxiliar na visualização. Na Figura 4, ilustramos tal movimento:

Figura 4: Empilhamento das grandezas determinadas e indeterminadas



Fonte: Almeida (2024).

Acreditamos que a decisão de as professoras empilharem as grandezas determinadas e indeterminadas contribuiu para a reorganização do pensamento, tornando mais sintética a denotação da equação. Aqui, elas passam a visualizar a equação, no Sistema Semiótico Icônico – SSI[5], não apenas como "x + x + x + 1 = x + 1 + 1 + 1 + 1 + 1", mas também como "3x + 1 = x + 5". Segundo Radford (2022b, p. 10), "o que antes requeria muitas palavras e ações é reorganizado e contraído". Assim, percebemos, a partir dessa ação, que as professoras começaram a se esforçar para filtrar o necessário do desnecessário, bem como refinar suas atividades semióticas; o que vem a se configurar, posteriormente, uma *contração semiótica* (Radford, 2022b, 2021a), como podemos acompanhar na discussão a seguir.

2.122 Andréia: Então, qual a massa da esfera vermelha encontrada por elas? Considere a esfera bege com...

[5] No estudo introdutório das equações, Radford (2021b) propõe diferentes sistemas semióticos – o concreto, o icônico e o alfanumérico. Neste texto, damos ênfase ao sistema semiótico icônico, por meio das imagens icônicas no simulador; muito embora recorramos em alguns momentos à linguagem alfanumérica – envolvendo letras, números e símbolos – para sintetizarmos nossas análises.

2.123 Rosália: Um grama de massa!

2.124 Andréia: Aí aqui já mudou, né?! Porque veja...

2.125 Rosália: Eu gosto sempre de olhar para aqui [apontou para a relação de igualdade na simulação]. Você sempre tem que equilibrar ambos os lados... Porque se aqui [lado direito] já é cinco mais um, seis, três mais um, quatro... [ficou pensativa silenciosamente.]

2.126 Andréia: Ela [a questão] quer saber o valor da esfera vermelha.

2.127 Rosália: Certo!

2.128 Andréia: Aí veja... Está equilibrada, não está equilibrada?

2.129 Rosália: Está...

2.130 Sirlene: Então vamos tirar de um lado e do outro.

2.131 Andréia: E não podemos fazer como uma proporção?

2.132 Rosália: É...

2.133 Andréia: Então veja bem... Aqui...

2.134 Rosália: Vai tirando!

2.135 Andréia: Vou tirar então! Se eu tirar uma daqui... Vamos tirar as esferas vermelhas?

2.136 Rosália: Não! Vamos tirar logo as bolinhas [beges]?

2.137 Sirlene: Uma aqui e uma lá, né?

2.138 Andréia: Se eu tirar aqui [direita] e uma aqui [esquerda], aí vai ficar três esferas igual a...

2.139 Rosália e Andréia: Certo!

2.140 Andréia: Aí se eu tirar uma bolinha [vermelha] daqui [esquerda] e uma daqui [direita]

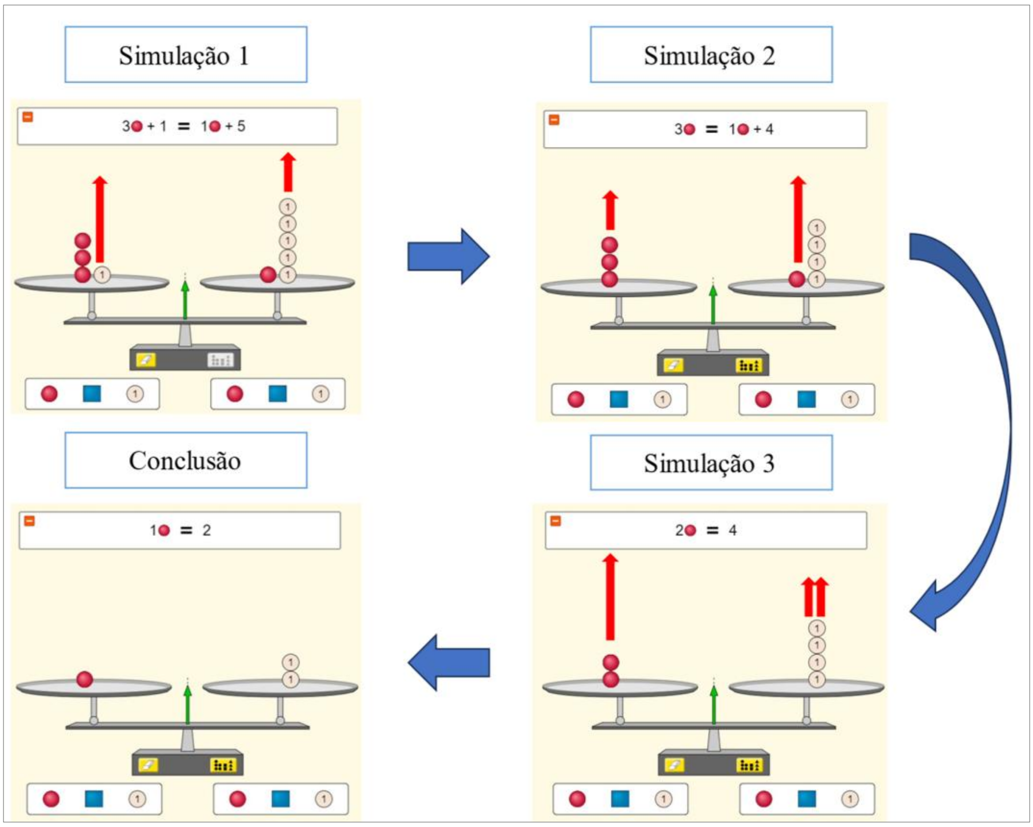
2.141 Rosália: Cada uma [esfera vermelha] vale dois gramas!

[Andréia retirou duas esferas beges do lado direito e uma esfera vermelha do lado esquerdo.]

A partir do discurso de Rosália (linha 2.125), percebemos que, na visualização da simulação, ela direcionou inicialmente o seu olhar para a relação de igualdade, enquanto Andréia focou no equilíbrio da balança de dois pratos (linha 2.128). Nesse cenário, Sirlene sugeriu operar em ambos os lados (linha 2.130) e Andréia perguntou se poderia iniciar pela subtração da incógnita em ambos os lados da equação (linha 2.135). Esse engajamento coletivo "se trata de um encontro que oferece a possibilidade de entrar em contato com outras vozes e perspectivas, não para benefício pessoal, mas para a criação de uma obra (uma ideia) comum" (Radford, 2021b, p 192).

No excerto do diálogo expresso nas linhas 2.122 a 2.141, observamos indícios de pensamento algébrico na resolução da equação. A *indeterminação* foi *denotada* por meio do discurso externo e do simulador, respectivamente, em linguagem corrente "massa da esfera vermelha" (linha 2.122) e elementos icônicos (Figura 4). Por sua vez, quando assumiram a premissa de "tirar de um lado e do outro" quantidades iguais (linha 2.130), as professoras eliminaram uma esfera bege (linha 2.138) e uma esfera vermelha (linha 2.140) de cada prato da balança, obtendo dedutivamente que duas esferas vermelhas equivaliam a quatro esferas beges. Por conseguinte, elas concluíram que uma esfera vermelha equivalia a duas beges (linha 2.141). Ao observarmos que o pequeno grupo *operou com o indeterminado* considerando a equivalência em ambos os lados, inferimos a presença da *analiticidade* e, consequentemente, que o *pensamento algébrico* emergiu. Ilustramos esse movimento na Figura 5.

Figura 5: Resolução algébrica do segundo problema de enunciado no SSI



Fonte: Almeida (2024).

Na resolução ilustrada na Figura 5, um ponto que nos intrigou foi a passagem da equação “2x = 4” (simulação 3) para “x = 2” (conclusão). Diferentemente da simplificação da equação “3x + 1 = x + 5” (simulação 2) para “2x = 4” (simulação 3), a qual deixou evidente o tipo de raciocínio emergente nos discursos externos supramencionados (linhas 2.138 e 2.140), não ficou claro como o pequeno grupo pensou a partir da simulação 3 para chegar à conclusão. Embora Andréia tenha simulado a resposta final apresentada por Rosália, houve uma predominância do cultivo do discurso interno, de modo que não conseguimos compreender a estratégia final utilizada. Conforme Radford (2021a), não acessamos os aspectos ideacionais do pensamento sem o amparo de aspectos materiais, isto é, dos meios semióticos de objetivação. Frente a esse impasse, para refinarmos nossa inferência, analisamos os dados produzidos na segunda categoria aqui proposta.

4.2 A emergência do pensamento algébrico no engajamento coletivo entre as professoras e o pesquisador-formador

Nesta categoria de análise, focamos no momento *c* da atividade formativa, isto é, nas discussões entre o pesquisador-formador e as professoras (ver Figura 3, exposta anteriormente). Adiante, acompanhamos o diálogo entre os envolvidos.

> **2.142 Pesquisador-formador:** Como vocês pensaram? Agora eu quero saber...
>
> **2.143 Rosália:** É... Andréia foi tirando as bolinhas aí...
>
> **2.144 Sirlene:** Andréia foi retirando...
>
> [O pesquisador retomou um comentário sobre a resolução de problemas.]

2.145 Pesquisador-formador: Uma coisa que não mencionei [na discussão geral do problema 1] é a questão da interpretação do problema. A gente precisa ler o enunciado, perceber a estrutura... Muitas vezes o aluno memoriza a forma que está escrita e já vai procurando os dados. Mas a gente precisa trabalhar, além do cálculo matemático, essa questão da interpretação mesmo...

2.146 Sirlene: É!

2.147 Rosália e Andréia: Isso!

No trecho retrotranscrito, o pesquisador-formador questionou as professoras como elas tinham pensado. Mas, antes de iniciar propriamente a discussão da resolução do problema 2, ele fez uma observação referente ao processo de interpretação do enunciado, particularmente sobre a estrutura da escrita, que deve ser levado em consideração no ensino-aprendizagem. Nesse cenário, constatamos o que as pesquisas no campo da formação de professores alicerçadas na TO têm evidenciado: as atividades formativas vão além dos saberes algébricos, contribuindo ainda para a emergência dos saberes relacionados à organização do seu ensino (Romeiro, Moretti & Raford, 2024; Moretti & Radford, 2023).

Em continuidade ao diálogo, Andréia começou a explicação da resolução.

2.148 Andréia: Sabemos que, de um lado, há três esferas vermelhas e uma bege. A gente foi colocando, né, como está aí... [apontou para a simulação já proposta por elas e retomou a pergunta do problema.] Qual a massa da esfera vermelha encontrada por elas?

2.149 Pesquisador-formador: E aí, como faríamos nesse caso?

2.150 Rosália: Tem que tirar logo as gramas [esferas beges]. Foi o que Andréia fez. Tirar gramas iguais [fez o gesto de retirada de um lado e do outro.]

2.151 Pesquisador-formador: Certo! Eu queria escutar um pouco você... [apontou para Sirlene.]

2.152 Sirlene: Sim, exatamente isso. Fomos retirando. Aí tiramos uma esfera [vermelha]. [aguardou Andréia manusear o simulador.] Precisamos tirar no outro lado [direito]. Aí identificamos que cada esfera [vermelha] vale duas [beges]. Aí tiramos mais uma esfera, mais duas beges e chegamos à conclusão de que uma esfera vale duas [gramas].

2.153 Rosália: Perfeito!

A partir do excerto retroexposto, observamos que, apesar de Rosália ter iniciado a apresentação da argumentação (linha 2.150), a discussão tomou outro rumo. Preocupado com as posições que as professoras estavam assumindo até o momento – praticamente as mesmas funções da atividade anterior –, o pesquisador-formador convidou Sirlene para falar (linha 1.152). Essa postura convidativa evidencia que o projeto didático da formação não estava alicerçado apenas pelo eixo da produção de saberes, como também pelo eixo da produção de subjetividades. Conforme Radford (2021a), para que um coletivo se constitua como não alienante, precisamos da participação ativa de todos norteada por princípios éticos que busquem dar abertura para o outro se expressar, bem como acolher o seu ponto de vista.

Por sua vez, Sirlene continuou descrevendo a resolução (linha 2.152), mas não argumentou o porquê de ter tirado uma esfera bege de um lado e duas esferas beges do outro. Até esse momento, não tínhamos elementos discursivos ou gestuais que nos permitissem inferir a justificativa para elas terem eliminado grandezas equivalentes, mas distintas, em ambos os pratos da balança, ou seja, dividirem os dois lados por dois.

Em sequência à discussão, Andréia deu a seguinte explicação:

2.154 Andréia: Agora essa relação, eu também fiquei pensando... Ficou duas esferas [vermelhas] ali, okay?! Mas aí, a partir do momento que eu olho o outro lado, eu consigo fazer essa relação: lá eu tenho quatro [esferas beges] e aqui eu tenho dois [esferas vermelhas]. Eu faço uma multiplicação... Na minha cabeça. [...] E o resultado dá dois!

2.155 Sirlene: Já eu usei a divisão... Eu dividi, porque olha [apontou para a tela do notebook]... Duas dividi por dois e quatro divido por dois.

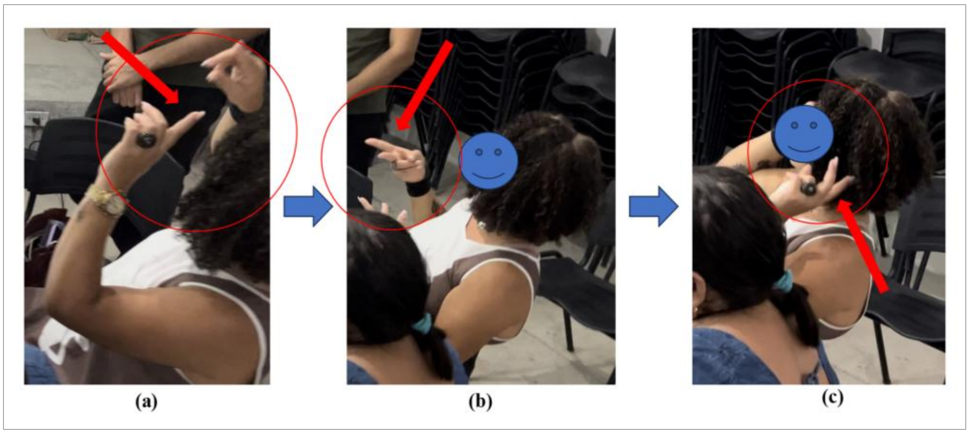
2.156 Pesquisador-formador: Isso, exatamente!

2.157 Sirlene: Foi isso que eu fiz.

Como podemos perceber, nessa parte do diálogo (linhas 2.153 a 2.157), sem precisar simular novamente a equação, as professoras desprenderam-se do artefato tecnológico digital e apresentaram dois argumentos sobre o raciocínio que tiveram para concluir o problema.

O primeiro argumento estava relacionado à operação de multiplicação. Nesse contexto, Andréia recorreu à ideia de proporcionalidade entre ambos os lados da equação (linha 2.156). Considerando que “2x = 4” (Figura 6 (a)) e “2 . 2 = 4” (Figura 6 (b)), ela concluiu que “x = 2” (Figura 6 (c)). Não ficou evidente que a multiplicação realizada mentalmente por Andréia foi, de fato, “2 . 2 = 4”, mas, pelo discurso externo e gestos (*denotação* da *indeterminação* na Figura 6), inferimos isso. Nesse sentido, em termos matemáticos, teríamos uma linha de raciocínio pautada na propriedade transitiva da relação de igualdade: ao assumir duas premissas – a equação em cena e a multiplicação mental –, Andréia inferiu dedutivamente que a massa da esfera vermelha era de dois gramas. Portanto, constatamos indícios de *raciocínio analítico* e, consequentemente, de *pensamento algébrico* na perspectiva da TO (Radford, 2022a, 2022b, 2022c).

Figura 6: Gestos de Andréia na resolução do problema 2



Fonte: Almeida (2024).

Por conseguinte, o segundo argumento referia-se à operação da divisão. Nesse cenário, Sirlene, partindo da equação “2x = 4”, dividiu ambos os lados por dois e concluiu que “x = 2” (linha 2.166). Portanto, na resolução do segundo problema, pelos discursos dispostos nas linhas 2.130, 2.138, 2.140 e 2.155 (*denotação das grandezas conhecida e desconhecida*), constatamos explicitamente que, ao assumir como premissas que podiam realizar as operações matemáticas de “eliminar” (subtrair) e “separar” (dividir) em ambos os membros da balança de dois pratos equilibrada (equação), o pequeno grupo: (i) operou *dedutivamente* e (ii) trabalhou com o *indeterminado* (“a massa da esfera vermelha”, linha 2.122) como se fosse determinado. Nesses pontos, ficou evidente a presença da *analiticidade*.

Amparados nos estudos de Radford (2022a, 2022b, 2021a, 2021b), concluímos que a forma de pensar e proceder corrobora as três condições dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, haja vista que: a) a massa desconhecida da esfera vermelha (a incógnita) foi identificada como uma *indeterminação*; b) a incógnita ou o termo desconhecido foi *denotado* por intermédio dos discursos externos e gestos; e c) o resultado (a massa da esfera vermelha é 2g) foi *deduzido* a partir de equações equivalentes entre si.

Na finalização desse momento, tivemos as seguintes considerações.

2.158 Pesquisador-formador: Percebam que esse problema é parecido com outro, mas tem algumas coisas que mudam. E principalmente que vocês mobilizaram outras estratégias.

2.159 Sirlene: Eu percebo também que nós vamos ser melhores professores. Isso eu tenho percebido... Porque faz a gente pensar em possibilidades. Eu usei aqui a multiplicação e ela [Andréia] a divisão. E a gente sabe que tirando de um lado tem que tirar do outro [fez os gestos de retirada, movimentando a mão de cima para baixo] para poder haver a equivalência, a igualdade [fez o gesto movimentando as duas mãos na horizontal fechadas e depois abrindo].

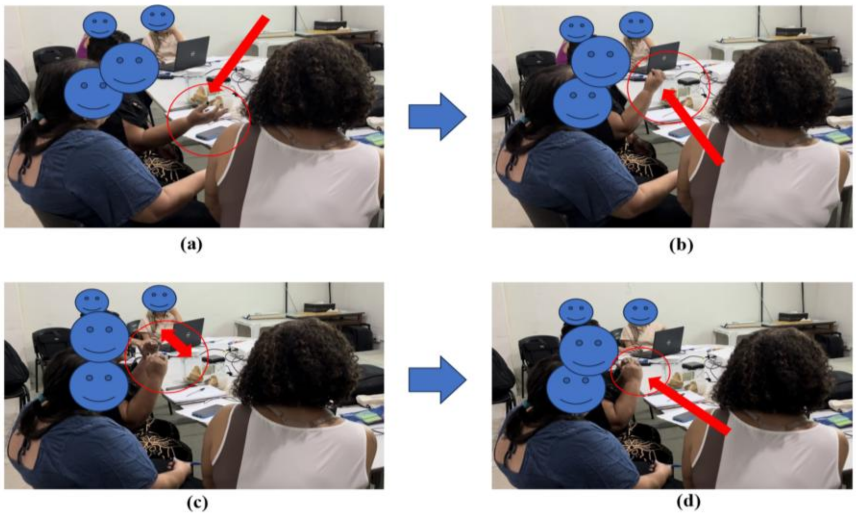
2.160 Rosália: Com certeza!

Nesse diálogo, o pesquisador-formador teceu um comentário geral sobre as resoluções dos problemas. Em seguida, a professora Sirlene reiterou as estratégias mobilizadas e corroborou nossa constatação de que elas pensaram *analiticamente*, ao afirmar que: “a gente sabe que tirando de um lado tem que tirar do outro para poder haver a equivalência, a igualdade” (linha 2.159).

Além disso, Sirlene ressaltou a importância do processo formativo para o ser docente, quando afirmou, na linha 2.159, que “nós vamos ser melhores professores”, principalmente porque o processo formativo contribuiu para “pensar em possibilidades” acerca da introdução à álgebra escolar. Tal assertiva ilustra que a aprendizagem, na perspectiva da TO, se dá por um processo que abrange tanto o encontro com novos saberes, como o vir a ser, nesse caso, professoras que ensinam álgebra nos anos iniciais a partir de outras possibilidades.

Atrelados aos elementos discursivos na linha 2.159, observamos que Sirlene utilizou o corpo para denotar a operação da subtração (Figura 7, (a) e (b)) e a equivalência na equação (Figura 7, (c) e (d)).

Figura 7: Gestos de Sirlene na resolução do problema 2



Fonte: Almeida (2024).

A Figura 7 ilustra exatamente o fato de que podemos observar a materialização do pensamento por meio do movimento corpóreo (Radford, 2021a). Nesse caso, os gestos com as mãos, denotando a retirada de um objeto e a igualdade entre ambos os lados, reforçam que o pensamento algébrico é uma prática social tangível, na qual o corpo materializa o componente ideacional (Radford, 2011c).

Como síntese das análises das discussões do pequeno grupo, ponderamos que, inicialmente, a operação "eliminar" (subtração), em ambos os lados da equação, ficou clara, enquanto a operação "separar" (dividir) não. Nesse caminho, para caracterizarmos o pensamento algébrico, foi fundamental nos debruçarmos sobre o engajamento coletivo em que professoras e pesquisador-formador "se implicam em comparações, distinções e tomadas de posição com respeito ao saber, o qual gera novas ideias ao longo do caminho, enquanto todos se constituem como subjetividades" (Radford, 2022b, p. 192).

Ponderamos, por fim, que, apesar de não ter sido o foco deste texto, para a Teoria da Objetivação, há um entrelaçamento entre a produção de saberes e subjetividades na área da Educação Matemática. Com isso, explicitamos aqui a nossa expectativa em que sejam aprofundados esses aspectos em investigações futuras.

5 Considerações finais

A partir do objetivo de discutir sobre a caracterização de pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação a fim de suscitar reflexões necessárias à formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental; apresentamos alguns excertos de uma pesquisa de mestrado que ilustram esse movimento.

No contexto da atividade formativa em análise, referente ao problema de enunciado que pode ser traduzido para a equação $3x + 1 = x + 5$, constatamos evidências de que as professoras encontraram-se com uma forma de pensar algebricamente as equações, mobilizando a estratégia de neutralizar termos ou coeficientes, isto é, operando com grandezas determinadas (esferas beges) e indeterminadas (esferas vermelhas) em ambos os membros da igualdade. Em resumo, sintetizamos as discussões delas na linguagem alfanumérica, nas quais obtiveram as seguintes equações equivalentes entre si: "$3x + 1 = x + 5$" (subtraiu 1 em ambos os lados); "$3x = x + 4$" (subtraiu x em ambos os lados); "$2x = 4$" (dividiu ambos os lados por 2); (e concluiu que) "$x = 2$". Nos termos de Radford (2022a, 2022b, 2021b), o pequeno grupo encontrou-se com os procedimentos algébricos de eliminar os objetos iguais (subtração) e separar os objetos em partes proporcionais (divisão) em ambos os lados da equação, assumindo uma perspectiva relacional da igualdade. Logo, o *raciocínio analítico* emergiu por meio do trabalho dedutivo com o *desconhecido* em primeiro plano, o qual foi *denotado* por meio de falas e gestos.

Ao longo das análises, nos questionamos sobre a reconceitualização dos significados atribuídos pelas participantes da pesquisa quanto: (i) ao indeterminado – É trabalhado em primeiro plano? É deduzido a partir de premissas? –; (ii) à noção de igualdade – É em uma perspectiva relacional? Recorre-se à noção de equivalência? –; e (ii) às operações matemáticas – Opera-se com as grandezas determinadas e indeterminadas em ambos os lados da equação? –. Assim, deixamos essas perguntas guias que podem auxiliar pesquisas futuras, na área da Educação Matemática, que tenham como foco de análise o pensamento algébrico, na vertente da TO, a partir de atividades envolvendo resolução de equações.

Ademais, convém ressaltar que os tipos de raciocínios manifestados nas resoluções dos problemas propostos foram identificados por intermédio do reconhecimento e cruzamento de diversos meios semióticos de objetivação, como: os gestos com as mãos que remetem às noções de equilíbrio e de igualdade; apontamentos com os dedos para indicar e contar as grandezas determinadas e indeterminadas; gestos com as mãos que remetem ao movimento de retirar e separar (operações de subtração e divisão); discurso externo para socializar, argumentar e fundamentar o raciocínio; etc. Esses elementos reforçam a pertinência e legitimidade de uma análise do pensamento algébrico na formação de professores pautada na abordagem multimodal (Romeiro, Moretti & Radford, 2024; Moretti & Radford, 2023a).

Reiteramos ainda que, apesar do curto período e do pequeno espaço amostral de participantes da pesquisa-formação, os resultados apresentados reafirmam a defesa de Radford (2022a, 2022b, 2021a, 2021b, 2011c) de que a caracterização do pensamento algébrico está além da identificação dos vetores (indeterminação, denotação e analiticidade) e do reconhecimento dos meios semióticos de objetivação; pois é necessário observar como esses aspectos emergem nas vivências das atividades – no nosso contexto, as atividades das professoras e do pesquisador-formador, o trabalho lado a lado entre professoras-pesquisador. Assim sendo, torna-se indispensável considerar que o pensamento algébrico na perspectiva da TO não é algo abstrato, mas que se dá na concretude da atividade humana, ou seja, mais do que provar (a), (b) e (c), é essencial ater-se às nuances do engajamento coletivo.

Em suma, para além das reflexões no campo da Formação de Professores que Ensinam Matemática, acreditamos que este estudo tem implicações para o chão da sala de aula da Educação Básica; principalmente ao convocar problematizações em torno das prescrições curriculares propostas pela BNCC no que diz respeito ao processo de organização do ensino da álgebra escolar, em particular do saber equações, a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse sentido, pode-se considerar a diversidade de meios semióticos e artefatos culturais, característicos de cada etapa de escolarização, para o trabalho com o pensamento algébrico em uma perspectiva dinâmica, multimodal, dialética e coletiva.

Agradecimentos

Este artigo resulta de uma pesquisa de mestrado financiada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco (FACEPE) e desenvolvida no âmbito do Grupo Al-Jabr de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra (certificado no Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil do CNPq e vinculado à UFRPE).

Referências

Almeida, J. R. (2017). Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária. *Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 8(1), 1-18.

Almeida, M. S. (2024). *Pensamento algébrico e o uso de artefatos tecnológicos digitais: um processo formativo com professoras dos anos iniciais do ensino fundamental*. 2024. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME – Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 267-300.

Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação, DF.

Blanton, M. (2010). Early algebra. *Future curricular trends in school algebra and geometry*, 45-61.

Carraher, D. W.; Schliemann, A. D. & Schwartz, J. L. (2017). Early algebra is not the same as algebra early. In *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Routledge.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra.

For the learning of mathematics, 9(2), 19-25.

Fiorentini, D.; Miorim, M. A. & Miguel, A. (1993). A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. *Pro-posições*, 4(1), 78-91.

Kieran, C.; Pang, J.; Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. *Springer Nature*.

Longarezi, A. M. & Silva, J. L. (2008). Interface entre pesquisa e formação de professores: delimitando o conceito de pesquisa-formação. In *Anais do 8º Congresso Nacional de Educação – EDUCERE*. (pp. 4048-4061). Curitiba, Brasil.

Moretti, V. D. & Radford, L. (2023a). Abordagem histórico-dialética dos conceitos na organização do ensino da matemática. *Educação e Pesquisa*, 49, 1-16.

Moretti, V. D. & Radford, L. (2023b). Análise multimodal de vídeos: contribuições da Teoria da Objetivação para a pesquisa sobre formação de professores que ensinam Matemática. Revista Eletrônica de Educação, 17, 1-17.

Moretti, V. D. & Radford, L. (2015). História do Conceito culturalmente significada e a Organização da Atividade de Ensino de Matemática. In *Anais do VI SIPEM – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. (pp. 1-12). Pirenópolis, Brasil.

Panossian, M. L.; Sousa, M. C. & Moura, M. O. (2017). Nexos conceituais do conhecimento algébrico: um estudo a partir do movimento histórico e lógico. In: V. D. Moretti & W. L. Cedro (Orgs.). *Educação matemática e a teoria histórico-cultural: um olhar sobre as pesquisas*. (pp. 125-160). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83-96.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.

Radford, L. (2011a). Sobre psicologia, epistemologia histórica e o ensono da Matemática: rumo a uma história sociocultural da Matemática. In Morey, B. & Mendes, I. A. (Eds.). *Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia*. (pp. 93-97). São Paulo: Livraria da Física.

Radford, L. (2011b). A origem histórica do pensamento algébrico. In Morey, B. & Mendes, I. A. (Eds.). *Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia*. (pp. 117-153). São Paulo: Livraria da Física.

Radford, L. (2011c). *Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking*. In *Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education*. Ankara, Turkey, 4, 17-24.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 547-567.

Radford, L.; Arzarello, F.; Edwards, L. & Sabena, C. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. In *Compendium for research in mathematics education* (pp. 700-721). National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2021a). *Teoria da objetivação: uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática*. São Paulo: Livraria da Física;

Radford, L. (2021b). O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação. In: V. Moretti & L. Radford (Orgs.). *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural*. (pp. 171-195). São Paulo: Livraria da Física.

Radford, L. (2022a). Introducing equations in early algebra. *ZDM – Mathematics Education*, 54(6), 1151-1167.

Radford, L. (2022b). Álgebra temprana: La simplificación de ecuaciones. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática*, 6(1).

Radford, L. (2022c). Early algebra: Simplifying equations. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (No. 16).

Radford, L.; Arzarello, F.; Edwards, L. & Sabena, C. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. In *Compendium for research in mathematics education* (pp. 700-721). National Council of Teachers of Mathematics.

Romeiro, I. O.; Moretti, V. D. & Radford, L. (2024). Da formação à pesquisa sobre professores que ensinam Matemática: contribuições da Teoria da Objetivação para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico. *Paradigma*, 45(2), 1-23.

Sousa, M. C.; Panossian, M. L. & Cedro, W. L. (2014). *Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014. (Série Educação Matemática).