

Ações que apoiam o Raciocínio Matemático desempenhadas por um professor da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias em uma turma de Engenharia

Tais Mara dos Santos

Secretaria de Educação do Paraná
Cambé, PR — Brasil
✉ taissantos@alunos.utfpr.edu.br
id 0000-0003-2638-2652

Henrique Rizek Elias

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Londrina, PR — Brasil
✉ henriqueelias@utfpr.edu.br
id 0000-0002-9660-7303

Eliane Maria de Oliveira Araman

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Londrina, PR — Brasil
✉ elianearaman@utfpr.edu.br
id 0000-0002-1808-2599



2238-0345 

10.37001/ripem.v15i2.4467 

Recebido • 03/02/2025
Aprovado • 16/04/2025
Publicado • 28/05/2025

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: Este artigo tem como objetivo identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático de estudantes durante a realização de uma tarefa em uma turma de Engenharia na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Os dados foram produzidos em um ambiente natural de sala de aula da disciplina de EDO ofertada conjuntamente para os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental. Ao longo de três dias de aula, o professor da disciplina trabalhou uma tarefa matemática dedicada a abordar EDO de primeira ordem. Para as análises, foram consideradas categorias *a priori* para as ações do professor (*convidar*, *guiar/apoiar*, *informar/sugerir* e *desafiar*) e para os processos de raciocínio matemático dos estudantes (*conjeturar*, *generalizar* e *justificar*). Os resultados indicam que o professor executou as ações previstas nas categorias e que estas deram suporte para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, permitindo que os objetivos propostos nas aulas fossem atingidos.

Palavras-chave: Ações do Professor. Raciocínio Matemático. Equações Diferenciais Ordinárias. Engenharia. Educação Matemática no Ensino Superior.

Actions that support Mathematical Reasoning performed by a teacher of the Ordinary Differential Equations course in an Engineering class

Abstract: This article aims to identify and discuss the teacher's actions that support students' mathematical reasoning while performing a task in an Engineering class during Ordinary Differential Equations (ODE) course. The data were produced in a natural classroom environment of the ODE course offered jointly for the Chemical Engineering and Environmental Engineering degree. Over the three days of class, the teacher worked on a mathematical task dedicated to addressing first-order ODE. For the analyses, a priori categories were considered for the teacher's actions (*inviting*, *guiding/supporting*, *informing/suggesting*, and *challenging*) and for the mathematical reasoning processes of the students (*conjecturing*, *generalizing*, and *justifying*). The results indicate that the teacher executed the actions outlined in the categories and that these supported the development of the students' mathematical reasoning, allowing the objectives proposed in the classes to be achieved.

Keywords: Teacher's Actions. Mathematical Reasoning. Ordinary Differential Equations. Engineering. Mathematics Education in Higher Education.

Ações que apoiam o Raciocínio Matemático realizadas por um docente da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias em uma classe de Engenharia

Resumen: Este artículo tiene como objetivo identificar y discutir las acciones del docente que apoyan el razonamiento matemático de los estudiantes durante la realización de una tarea en una clase de Ingeniería en la disciplina de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Los datos fueron producidos en un ambiente de aula natural de la disciplina ODE ofrecida conjuntamente para los cursos de Ingeniería Química e Ingeniería Ambiental. Durante los tres días de clase, el profesor de la asignatura trabajó en una tarea matemática dedicada a abordar EDO de primer orden. Para los análisis se consideraron categorías a priori para las acciones del docente (invitar, guiar/apoyar, informar/sugerir y desafiar) y para los procesos de razonamiento matemático de los estudiantes (conjeturar, generalizar y justificar). Los resultados indican que el docente ejecutó las acciones previstas en las categorías y que dichas acciones apoyaron el razonamiento matemático de los estudiantes, permitiendo alcanzar los objetivos planteados en dichas clases.

Palabras clave: Acciones del Docente. Raciocínio Matemático. Equações Diferenciais Ordinárias. Engenharia. Educação Matemática em la Educación Superior.

1 Introdução

A Resolução CNE/CES nº 2 de 24 de abril 2019, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, prevê que o curso de graduação em Engenharia deve proporcionar aos seus egressos, ao longo da formação, algumas competências gerais, dentre elas destacamos a importância de os futuros engenheiros serem capazes de “analisar e compreender os fenômenos físicos e químicos por meio de modelos simbólicos, físicos e outros, verificados e validados por experimentação” (Brasil, 2019, p. 2).

A matriz curricular de um curso de Engenharia é composta por diversas disciplinas matemáticas que têm o potencial de permitir ao aluno a oportunidade de modelar fenômenos físicos e químicos, uma delas é a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), já que vários modelos podem ser descritos por meio de uma equação diferencial ordinária. Evidentemente, esse potencial só se efetivará se tais disciplinas não forem pautadas pelas técnicas de resoluções e a partir da mera reprodução de modelos. A organização e a condução das disciplinas precisam promover um ambiente de sala de aula favorável para o trabalho com modelos desses fenômenos.

Com base em uma revisão da literatura considerando dissertações, teses e artigos em periódicos e em anais de congressos do campo da Educação Matemática, Santos (2025) notou que a maioria dos trabalhos sobre EDO, em cursos de Engenharia, visava investigar como uma determinada metodologia de ensino pode contribuir para a aprendizagem dos estudantes. No entanto, percebemos que nenhuma pesquisa do levantamento teve como foco as ações do professor que ensina EDO em cursos de Engenharia. A partir de um olhar para os trabalhos publicados nos anais das oito primeiras edições do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Lopes e Lima (2024) comentam que quase não há pesquisas que investigam aspectos relacionados à formação e aos conhecimentos dos professores que atuam em cursos universitários nos quais a Matemática está presente nas denominadas disciplinas de serviço, como Engenharias, Computação, Administração etc.

Segundo Araman, Serrazina e Ponte (2020), o professor desempenha um papel fundamental na construção do conhecimento matemático, abrangendo desde a seleção de tarefas apropriadas até o incentivo à participação dos alunos. Boaler e Brodie (2004), em estudo sobre a importância, a natureza e o impacto das perguntas do professor, concluem que as perguntas feitas pelos professores guiam os alunos no percurso matemático das aulas. Segundo os autores, essas perguntas ensinam os alunos a fazerem perguntas importantes sobre seu próprio trabalho. Por exemplo, quando os professores fazem mais questões conceituais, os alunos começam a realizar questões da mesma natureza, indicando que as perguntas dos professores ajudam a moldar o fluxo e a direção das aulas (Boaler & Brodie, 2004).

O professor desempenha um papel fundamental na sala de aula, desde o planejamento da tarefa até a sua execução, logo são as ações do professor que irão direcionar os alunos para a promoção do raciocínio matemático. Dada essa importância e diante da constatação, conforme a revisão da literatura mencionada, de que, no Brasil, não há pesquisa com foco nas ações do professor que ensina EDO em cursos de Engenharia, consideramos essencial que pesquisas científicas a esse respeito sejam realizadas. Nessa direção, este artigo apresenta resultados de uma pesquisa mais ampla (Santos, 2025)¹ e tem por objetivo *identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático de estudantes durante a realização de uma tarefa em uma turma de Engenharia na disciplina de EDO*.

Os dados foram produzidos em um ambiente natural de sala de aula da disciplina de EDO, cujo professor da turma é um dos autores desta pesquisa. No momento da produção dos dados, a disciplina foi ofertada conjuntamente para dois cursos de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental. Durante as aulas, o professor trabalhou com uma tarefa matemática que envolveu o tópico EDO de primeira ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do Resfriamento de Newton.

Na próxima seção, que trata dos referenciais teóricos, abordamos o raciocínio matemático, sua definição e seus processos, bem como as ações do professor que contribuem para o seu desenvolvimento nas aulas de matemática.

2 Raciocínio Matemático e as Ações do Professor

Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) consideram que “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Há diferentes modelos teóricos (ver, por exemplo, Oliveira (2008) e Lannin, Ellis & Elliot (2011)) que buscam descrever quais processos caracterizam o raciocínio matemático. Tais modelos apresentam uma variedade de aspectos e processos que podem estar envolvidos no raciocínio matemático, mas, neste artigo, concordamos com Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) quando afirmam que são essenciais os processos de *conjecturar, generalizar e justificar*.

Com base em Ellis, Özgür e Reiten (2018) e em Lannin, Ellis e Elliot (2011), Moraes, Serrazina e Ponte (2018) descrevem esses três processos da seguinte maneira: (i) conjecturar é um processo que envolve raciocinar sobre relações matemáticas, elaborando afirmações, denominadas conjecturas, que requerem maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não; (ii) generalizar é um processo que envolve a colaboração entre pessoas que partilham um contexto sócio matemático específico e envolve pelo menos uma de três ações: a) identificar

¹ Este artigo é recorte de uma dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Cornélio Proκόpio e Londrina), escrita pela primeira autora e orientada pelo segundo autor.

pontos em comum entre os casos; b) estender o raciocínio para além do caso inicial; ou c) extrair resultados mais amplos de casos particulares; e (iii) justificar é um processo que visa convencer a si mesmo e aos outros, fornecendo razões pelas quais uma afirmação pode ser considerada verdadeira ou válida em todos os casos possíveis.

A Figura 1 traz mais informações sobre as características desses três processos essenciais para o raciocínio matemático.

Figura 1: Os processos de conjecturar, generalizar e justificar

Conjeturar	<i>Podem ter por base</i> - observação; - construção;	<i>Pode assumir formas como</i> - identificar uma possível solução para um problema; - formular uma estratégia para resolver um problema;
Generalizar	- transformação do conhecimento prévio; - combinações de observação, construção e transformação.	<i>Pode assumir formas como</i> - reconhecer um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos; - alargar o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais alargado de objetos.
Justificar	<i>Pode ter por base</i> - definições; - axiomas, propriedades, princípios gerais; - representações; - combinações de definições, propriedades e representações.	<i>Pode assumir formas como</i> - coerência lógica; - uso de exemplos genéricos; - uso contraexemplos; - por exaustão; - por absurdo.

Fonte: Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020)

Para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, é imprescindível, além de tarefas matemáticas desafiadoras, “[...] considerar a própria prática profissional do professor, nomeadamente saber quais as ações de ensino que melhor apoiam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos” (Mata-Pereira & Ponte, 2018, p. 782). Araman, Serrazina e Ponte (2019) elaboraram um quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos alunos, apresentado na Figura 2. Os autores apresentam as categorias de ações e como elas podem ser executadas pelo professor durante o desenvolvimento de uma tarefa.

Figura 2: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

C A T E G O R I A S	Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.	A Ç Õ E S
	Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.	
	Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.	
	Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476)

De acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), a categoria *Convidar* envolve as ações do professor que solicitam informações dos alunos a respeito do que fizeram, tendo como objeto observar como os alunos estão pensando e qual compreensão estão tendo sobre aquele tema. A categoria *Guiar/Apoiar* envolve as ações “em que o professor, a partir de perguntas ou explicações, conduz o pensamento do aluno para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda quando o professor fornece pistas aos alunos e os encoraja a pensarem sobre suas respostas” (Araman, Serrazina & Ponte, 2019, p. 476). A categoria *Informar/Sugerir* abarca as ações pelas quais o professor valida ou corrige uma resposta dada pelos alunos, ou, ainda, quando fornece explicações ou informações e solicita ou apresenta outras estratégias de solução. A categoria *Desafiar* envolve “as ações nas quais o professor tenta colocar os alunos em situação desafiadora de modo que estes avancem em seu raciocínio matemático, procurando novas formas de representação, estabelecendo novas conexões, refletindo e avaliando a situação, generalizando e justificando” (Araman, Serrazina & Ponte, 2019, p. 476).

Os autores destacam que, apesar de o quadro apresentar as categorias em uma ordem, não existe obrigatoriedade de sequência entre elas, nem de hierarquização. Entretanto, é relevante reconhecer que as ações da categoria *convidar* têm menor potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, enquanto as ações da categoria *desafiar* possuem maior potencial. Apesar disso, todas as ações são necessárias, pois as ações de *desafiar* “requerem uma preparação e um suporte de ações de guiar/apoiar e até de informar” (Araman, Serrazina & Ponte, 2019, p. 488).

Além das ações do professor, a abordagem de ensino e a escolha da tarefa são fundamentais. A tarefa escolhida precisa ter o potencial de promover o desenvolvimento do raciocínio matemático e, juntamente com as ações do professor, possibilitem aos alunos avançarem nas aprendizagens matemáticas, recorrendo às informações matemáticas já conhecidas para obter, justificadamente, novas conclusões.

Na próxima seção, detalhamos o contexto da pesquisa.

3 Contexto da Pesquisa

Os dados desta pesquisa foram produzidos nas aulas da disciplina de EDO de uma turma composta por alunos dos cursos² de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da UTFPR. Foram seis aulas de 50 minutos cada, realizadas ao longo de três dias (100 minutos em cada dia) no mês de abril de 2023.

Ao longo dos três dias de aula, o professor da disciplina (um dos autores deste artigo), pôs em prática uma tarefa matemática dedicada a abordar o tópico EDO de primeira ordem. O modelo matemático escolhido foi a Lei do Resfriamento de Newton. A tarefa, apresentada no Quadro 1, pretendia que os alunos construíssem, analisassem e discutissem um modelo matemático para descrever o resfriamento ou o aquecimento de um recipiente com água (quente ou fria) quando colocada em temperatura ambiente. Para tanto, a tarefa foi organizada para ocorrer em três momentos, considerando os três dias dedicados à pesquisa. A abordagem de ensino adotada pelo professor foi a do Ensino Exploratório (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Quadro 1: Tarefa matemática

Primeiro momento (dia 12 de abril)	Realize as medições de temperaturas da água.
---	--

² Na UTFPR, as disciplinas são semestrais e, no ano de 2023, a matéria de EDO era oferecida no terceiro período do curso, com a ementa: Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Equações Diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem e ordem superior. Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares. Resolução de Equações Diferenciais em Séries de Potências.

Segundo momento (dia 17 de abril)	Com base nos dados, encontre um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .
Terceiro momento (dia 19 de abril)	Discuta e analise o modelo matemático obtido na aula anterior.

Fonte: os autores

No primeiro dia, o professor introduziu a tarefa, separando os alunos em pequenos grupos (cinco grupos com seis alunos e um grupo com cinco alunos) e explicou o que seria feito e a dinâmica da aula. Em seguida, entregou aos grupos os materiais necessários para a coleta das informações: cada grupo recebeu um recipiente com água, de acordo com o Quadro 2, juntamente com uma folha para anotarem as medições, conforme a Figura 3.

Quadro 2: Recipiente e temperatura da água referente a cada Grupo.

Grupo	Recipiente	Água
1	Caneca de Plástico	Quente
2	Caneca <i>Stanley</i>	Gelada
3	Caneca de Plástico	Gelada
4	Copo de vidro	Gelada
5	Caneca de alumínio	Quente
6	Garrafa Plástica	Gelada

Fonte: dados da pesquisa.

Figura 3: Folha para anotação das medições de temperatura.

Grupo ____

Nomes dos integrantes do grupo:

Tipo de material (copo ou garrafa) utilizado: _____

Temperatura do ambiente: _____

Horário	Temperatura da água

Fonte: dados da pesquisa.

Os alunos anotaram a temperatura ambiente naquele exato momento (início da aula), que era de 26,4 °C, e, após isso, iniciaram a atividade de medir a temperatura da água. A partir de então, cada grupo mediu a temperatura da água, deixada em temperatura ambiente, a cada 10 minutos, por cerca de 100 minutos e registraram os valores. Os alunos colocavam o termômetro culinário dentro do recipiente com água, esperavam um tempo até a medida do termômetro estabilizar e, em seguida, anotavam na folha qual era o horário e a temperatura do líquido naquele momento. A Figura 4 mostra as informações coletadas pelos grupos ao final do primeiro dia de aula.

Figura 4: Medições de temperatura feitas pelos grupos

Grupo 1 (Caneca de Plástico)		Grupo 2 (Copo Stanley)		Grupo 3 (Caneca de Plástico)	
Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água
16h10	74,6° C	16h07	0,9° C	16h13	4,1° C
16h19	61° C	16h19	1,1° C	16h22	5,9° C
16h29	53,8° C	16h29	1,3° C	16h31	8,4° C
16h39	48,1° C	16h39	1,8° C	16h42	10,7° C
16h50	43,6° C	16h49	2,1° C	16h56	13,3° C
17h	40,2° C	16h59	2,8° C	17h04	14,9° C
17h10	38,1° C	17h09	3,3° C	17h14	16,1° C
17h21	36,3° C	17h19	3,8° C	17h22	17,2° C

Grupo 4 (Copo de vidro)		Grupo 5 (Caneca de alumínio)		Grupo 6 (Garrafa de plástico)	
Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água
16h06	3,3° C	16h16	87,1° C	16h14	2,6° C
16h18	8,9° C	16h24	66,8° C	16h22	3,6° C
16h28	12,1° C	16h33	56,1° C	16h32	5,9° C
16h38	15° C	16h44	47,8° C	16h42	6,2° C
16h49	17,3° C	16h58	40,8° C	16h56	6,6° C
17h	19,2° C	17h07	38° C	17h05	8,9° C
17h09	20,1° C	17h16	36° C	17h14	11,2° C
17h19	20,9° C	17h26	34,1° C	17h24	13,4° C

Fonte: dados da pesquisa

Conforme as orientações dadas pelo professor, as medições deveriam ser realizadas a cada 10 minutos. No entanto, os intervalos de tempo variaram, pois só tinha um termômetro culinário e ele estava sendo compartilhado entre todos os grupos, o que, por vezes, ampliou ou reduziu o intervalo de tempo considerado entre as medições.

No segundo dia, o professor pediu aos alunos que se organizassem nos mesmos grupos da aula anterior e, então, entregou, em duas folhas separadas, os dados coletados pelos Grupos 1 e 4 no primeiro dia. As folhas, apresentadas na Figura 5, também continham a orientação: “Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t ”. Todos os seis grupos discutiram a tarefa e geraram um modelo a partir das observações e análises dos dados obtidos pelos Grupos 1 e 4.

Figura 5: Duas folhas entregues aos alunos no segundo dia, contendo informações registradas pelos alunos do Grupo 1 e do Grupo 4.

Dados coletados no dia 12 de abril.

Tipo de material utilizado: Copo UTFPR (Plástico)

Temperatura do ambiente: 26,4° C

Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário
16h10	74,6° C
16h19	61° C
16h29	53,8° C
16h39	48,1° C
16h50	43,6° C
17h	40,2° C
17h10	38,1° C
17h21	36,3° C

Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .

Dados coletados no dia 12 de abril.

Tipo de material utilizado: Copo de vidro (água gelada)

Temperatura do ambiente: 26,4° C

Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário
16h06	3,3° C
16h18	8,9° C
16h28	12,1° C
16h38	15° C
16h49	17,3° C
17h	19,2° C
17h09	20,1° C
17h19	20,9° C

Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .

Fonte: dados da pesquisa

Neste dia, os alunos poderiam utilizar *notebooks*, pois, caso desejassem, poderiam utilizar o *software GeoGebra* (ou outro *software*) para trabalhar com os dados e identificar o comportamento do gráfico da função que descreveria a situação. Durante essa aula, o professor

circulou entre os grupos com o objetivo de dialogar com os alunos e conduzi-los a chegarem a um modelo matemático. Ele visava estimulá-los a compreenderem que, na situação proposta, tal como indicam Bassanezi e Ferreira Junior (1988), a taxa de variação da temperatura em relação à variação tempo é proporcional à diferença entre a temperatura T e a temperatura ambiente T_a , isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (\text{onde } k \text{ é uma constante real e } k > 0).$$

Ou seja, o professor desejava chegar no modelo matemático que representa a Lei do Resfriamento de Newton, uma EDO de 1º ordem, linear e de variáveis separáveis (Zill & Cullen, 2008).

No terceiro dia, o professor iniciou a aula realizando a discussão da tarefa, convidando os alunos a apresentarem seus modelos para a turma e fazendo questionamentos. Após os seis grupos apresentarem as EDO que construíram, o professor orientou-os a resolverem suas EDO (sem indicar um método específico para resolução) e validar o modelo construído, utilizando também os dados coletados pelos seus próprios grupos no primeiro dia, não apenas os dados dos Grupos 1 e 4 entregues pelo professor no segundo dia de aula.

Na próxima seção, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados para a produção e análise de dados.

4 Procedimentos metodológicos

Para Esteban (2010, p. 127),

[...] a pesquisa qualitativa é uma atividade sistemática orientada à compreensão em profundidade de fenômenos educativos e sociais, à transformação de práticas e cenários socioeducativos, à tomada de decisões e também ao descobrimento e desenvolvimento de um corpo organizado de conhecimentos.

Nessa direção, esta pesquisa é de caráter qualitativo, de acordo com a concepção de Esteban (2010). Para a coleta dos dados, durante os três dias de aula, o professor colocou um gravador de áudio na mesa de cada grupo e permaneceu com um gravador consigo, para capturar todos os diálogos entre ele e os alunos. Para esta pesquisa, utilizamos os áudios gravados durante as interações que o professor fez no Grupo 1. Essa delimitação foi necessária, uma vez que, ao todo, temos sete gravadores (seis dos grupos mais o gravador do professor) com cerca de 300 minutos cada. Escolhemos o Grupo 1, pois foi um dos grupos que mais interagiu com o professor durante as aulas. Outro motivo foi o fato de o grupo, composto por seis integrantes, ter contado com a participação de todos, durante os três dias de desenvolvimento da tarefa.

Portanto, os dados analisados nesta pesquisa são: os áudios do gravador que ficou sobre a mesa do Grupo 1, durante os três dias de aplicação, e os áudios do gravador que ficou com o professor, enquanto caminhava pela sala e interagiu com os alunos, durante os três dias de aplicação, especialmente nos momentos de interação com o Grupo 1. Esses áudios foram transcritos e, nas análises, identificamos, ao lado de cada fala do professor nos diálogos apresentados, as ações do professor de acordo com as categorias *a priori* de *convidar*, *guiar/apoiar*, *informar/sugerir* e *desafiar* (Araman, Serrazina & Ponte, 2019) e discutimos seu impacto no desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático dos alunos, a saber *conjecturar*, *generalizar* e *justificar*.

A pesquisa teve aprovação do Comitê de Ética em Pesquisas envolvendo Seres Humanos (CEP – UTFPR) sob o número CAAE: 65033822.6.0000.5547. Para manter o anonimato dos participantes, demos nomes fictícios a eles, a saber: Lucas, Daniela, Mário, Talita, Jairo e Carlos.

Para apresentar e analisar os dados, fizemos uso de dois episódios ocorridos durante as aulas. A escolha por eles justifica-se por serem “eventos críticos” (Powell, Francisco & Maher, 2004) para nossa pesquisa. Segundo Powell, Francisco e Maher (2004), um evento é chamado crítico quando demonstra momentos contrastantes significativos que confirmam ou contradizem hipóteses de pesquisa, isto é, eventos que sejam, de alguma forma, significativos para a investigação. Portanto, um “evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa” (Powell, Francisco & Maher, 2004, p. 22). Em nosso caso, entendemos que os eventos críticos selecionados (aqui representados pelos dois episódios) evidenciam situações em que as ações do professor apoiaram o raciocínio matemático dos alunos durante a resolução da tarefa.

O primeiro episódio refere-se ao momento em que os alunos do Grupo 1 estão discutindo, no primeiro dia de aula, sobre o comportamento dos dados que estavam sendo coletados naquele momento. O segundo episódio diz respeito ao momento em que os alunos do Grupo 1 estão debatendo, no segundo dia de aula, sobre uma função que descreva o comportamento dos dados e, em seguida, sobre uma EDO que modele a situação-problema do resfriamento/aquecimento da água.

Na próxima seção, apresentamos as análises dos dados.

5 Análise dos dados³

Primeiro episódio: o comportamento dos dados

O professor inicia o primeiro dia explicando a tarefa aos alunos, informando como seria a medição da temperatura, dividindo os alunos em grupos e entregando os materiais (copo/garrafa com água quente/fria e a folha para os alunos anotarem o horário e a temperatura da água). Ele informa a temperatura ambiente naquele momento, 26,4° C, e começa a circular entre os grupos para auxiliar na medição e iniciar discussões matemáticas sobre a tarefa que estava sendo realizada. Após alguns minutos e algumas temperaturas registradas, o professor aproxima-se do Grupo 1 (que estava com água quente em uma caneca de plástico).

- [1] Professor: *Deixa eu fazer uma pergunta pra vocês, com esses dados que vocês já coletaram, o que esses dados indicam? O que vocês podem dizer a partir desses dados?* [convidar – solicita relatos de como fizeram]
- [2] Lucas: *Com o tempo a variação foi diminuindo.*
- [3] Daniela: *A variação vai diminuindo.*
- [4] Professor: *A variação foi diminuindo!* [informar/sugerir - valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]. *Quando você diz variação...* [guiar/apoiar – incentiva explicação]
- [5] Lucas: *É tipo a temperatura, porque o daqui deu 13, aí daqui já deu 8 e aqui já deu menos.*
- [6] Daniela: *Eu acho que tem alguma relação, sei lá, com a temperatura do ambiente, tipo 26, então pode ser que a variação seja menor conforme vai chegando mais perto do 26.*

³ As respostas obtidas foram transcritas de modo literal, sem passar por critérios de correção gramatical, no intuito de garantir a análise fidedigna dos fenômenos investigados nesta pesquisa.

- [7] Professor: *Que seria, o 26 que você está falando seria a temperatura ambiente.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]
- [8] Daniela: *Eu já fiz um exercício parecido com isso daí, tipo, se t, se o tempo né, tender ao infinito, a temperatura do líquido vai ser igual a temperatura ambiente.*
- [9] Professor: *E você viu isso, você concordou com isso?* [desafiar – encoraja a avaliação]
- [10] Daniela: *Sim.*
- [11] Professor: *O que isso daqui indica? Esses dados que vocês estão botando aí, esses valores* [guiar/apoiar – encoraja os alunos a redizerem suas respostas]
- [12] Daniela: *Está se aproximando da temperatura ambiente, aí quanto mais esfria, mais devagar é esse processo.*

O professor, logo de início, executa ação da categoria *Convidar*, solicitando aos alunos que relatem como fizeram [1]. Lucas [2] e Daniela [3] apresentam a conjectura formulada por eles, de que a variação da temperatura estava diminuindo ao longo do tempo. O professor valida a conjectura inicial dos alunos [4] e incentiva a explicação [4] em relação à variação da temperatura, ações previstas nas categorias *informar/sugerir* e *guiar/apoiar*, o que exigiu que Lucas [5] elaborasse uma justificativa e Daniela [6] avançasse na sua conjectura, ao dizer que deve ter alguma relação com a temperatura ambiente. Quando Daniela [8] menciona já ter resolvido uma tarefa semelhante, ele a encoraja a avaliar se ela está de acordo com isso na tarefa proposta, ação da categoria *Desafiar*. O professor [11] incentiva Daniela a redizer sua resposta a partir dos dados apresentados e não com base em um exercício que ela viu anteriormente [8]. Daniela justifica [12] sua resposta dizendo que está se aproximando da temperatura ambiente e que quanto mais esfria mais devagar é esse processo, ou seja, Daniela avança para uma resposta mais refletida do que havia dado em [6].

Após alguns minutos e novas coletas de temperatura da água, o professor retorna ao Grupo 1. Os alunos estão discutindo sobre a construção de um gráfico a partir dos dados coletados.

- [13] Lucas: *Eu acho que é tempo por temperatura, não é? Ou não, temperatura por tempo... É temperatura por tempo.*
- [14] Mário: *Vai criar uma assíntota né, que fala?*
- [15] Daniela: *É, tendendo até o infinito.*
- [...]
- [16] Professor: *Beleza, matematicamente o que a assíntota representa?* [desafiar – encoraja a reflexão]
- [17] Lucas: *É tipo uma...*
- [18] Mário: *A gente pode pensar em termos de limite.*
- [19] Professor: *Mas, por que você chamou de assíntota? Por que você está enxergando uma assíntota?* [desafiar – encoraja a reflexão]
- [20] Daniela: *Porque ela vai diminuindo cada vez mais, vai ficando constante.*
- [21] Professor: *Vai diminuindo e aí no infinito o que isso vai acontecer?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]
- [22] Lucas: *Vai ficar na temperatura ambiente.*

- [23] Professor: *Vai se aproximar ali.* [informar/sugerir – reelabora resposta fornecida pelo estudante]
- [24] Mário: *É se fosse ideal, se a temperatura da sala não tivesse mudando também, eu acho que a temperatura do copo, quer dizer da água, iria equilibrar com a do ambiente, então não ia passar, não ia descer de 26.*
- [25] Professor: *Certo,* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] *então se a gente deixar o copo aqui eternamente, a temperatura do copo não iria ultrapassar a temperatura do ambiente. Matematicamente, então, no infinito, essa curva vai se aproximar, mas não vai chegar a uma reta horizontal (assíntota horizontal), que no caso é a temperatura ambiente.* [informar/sugerir - fornece informações e explicações]

No trecho anterior, os alunos iniciam a construção do gráfico organizando os dados nos eixos correspondentes. Mário [14] elabora uma conjectura dizendo que o gráfico da função procurada terá uma assíntota, com isso o professor aproveita a oportunidade para desafiar [16 e 19] os alunos a justificarem por que acham que se trata de uma assíntota e qual é o seu significado matemático. Mario [18] sugere pensar em termos de limite e Daniela [20] destaca que “ela vai diminuindo cada vez mais, vai ficando constante”. A afirmação de Daniela evidencia sua percepção sobre o comportamento assintótico dos dados, no entanto a afirmação “vai ficando constante” não é precisa do ponto de vista matemático. De acordo com Leithold (1994, p. 94, destaque do autor), “A reta $y = b$ é denominada uma *assíntota horizontal* do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ e para um número N , se $x > N$, então $f(x) \neq b$; (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ e para um número N , se $x < N$, então $f(x) \neq b$ ”.

O professor [21], por meio de ações da categoria *guiar/apoiar*, incentiva os alunos a explicarem o que acontece quando a temperatura vai diminuindo quando t tende a infinito. Então, Lucas [22] explica que a temperatura do líquido vai “ficar na temperatura ambiente”. Mário [24] concorda com essa afirmação e destaca que, após o período de coletas, a temperatura ambiente não será, necessariamente, 26° C, pois não há garantias de que a temperatura do ambiente permanecerá estável devido a fatores externos (como janelas abertas, portas abertas, ausência de ar-condicionado, entre outros). No entanto, ele destaca que, em um ambiente ideal, onde a temperatura se mantém constante, a temperatura do líquido vai se igualar a temperatura do ambiente inicial.

O professor [23] reelabora a resposta fornecida por Lucas e fornece explicações [25], ações da categoria *informar/sugerir*, sobre o fato de que, matematicamente, a ideia de assíntota horizontal mencionada pelos alunos indicaria que, quando t tende a infinito, a temperatura da água se aproximaria da temperatura ambiente, mas não se igualaria a ela. Isso foi retomado e discutido na análise do modelo matemático, realizada no terceiro dia, já que, na realidade, a temperatura da água se igualaria à temperatura ambiente. Deste modo, os alunos tiveram a possibilidade de encontrar um modelo matemático para fazer uma generalização, evitando assim a necessidade de coletar os dados até atingir a temperatura ambiente.

Segundo episódio: a elaboração de um modelo matemático

No segundo dia, o professor distribuiu as folhas aos grupos contendo os dados coletados pelos Grupos 1 e 4 na aula anterior. Em seguida, forneceu informações e explicações para que os alunos pudessem dar continuidade à tarefa, modelando a situação-problema. Novamente, o professor circulou entre os grupos na sala de aula, oferecendo suporte e orientação aos alunos

durante o desenvolvimento da tarefa. Em determinado momento, ele se aproxima do Grupo 1 e se inicia o seguinte diálogo:

[26] Professor: *O que vocês estão pensando? E aí? O que vocês chegaram?* [convidar – solicita relatos de como os alunos fizeram]

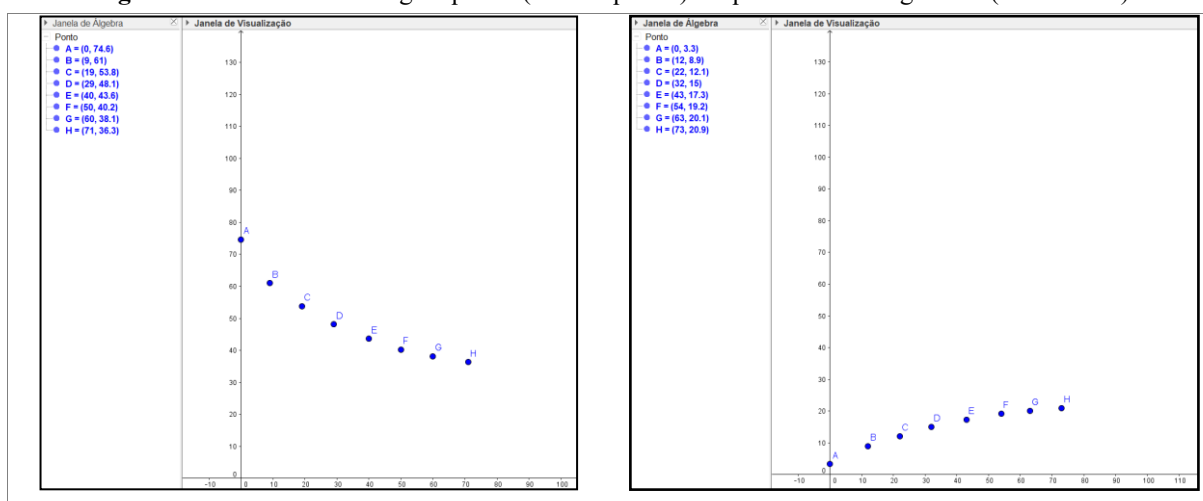
[27] Mário: *A gente está tentando ligar os pontos.*

[28] Daniela: *Fazer uma função.*

[29] Professor: *Tá. Vocês jogaram os pontos das duas colunas de dados.* [convidar – solicita relatos de como os alunos fizeram]

A Figura 5 apresenta os dados de temperatura coletados pelos Grupos 1 e 4 ao longo do tempo. O gráfico da esquerda mostra a temperatura da água quente diminuindo gradualmente, um comportamento típico de resfriamento. Em contraste, o gráfico da direita mostra um aumento de temperatura da água fria, indicando um processo de aquecimento.

Figura 5: Resfriamento da água quente (lado esquerdo) e aquecimento da água fria (lado direito)



Fonte: os autores

A Figura 5 não foi elaborada pelos alunos. Trata-se apenas de uma ilustração realizada pelos autores para auxiliar o leitor a compreender o comportamento dos dados e o diálogo, a seguir.

[30] Professor: *E o que vocês analisaram em relação a esse comportamento?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[31] Lucas: *Que eles estão tendendo para a temperatura ambiente.*

[32] Professor: *E de que modo que eles estão tendendo? Qual que é o comportamento desses pontos aí?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[33] Lucas: *Parece uma metade de parábola.*

[34] Professor: *Vocês acham que é uma parábola? Pedaco de uma parábola? Qual que é a questão?* [desafiar – encoraja a reflexão]

[35] Daniela: *É uma parte de uma parábola.*

[36] Mário: *É.*

[37] Professor: *Por quê?* [desafiar – solicita que os alunos apresentem razões (justificativas)]. *Se for uma parábola, eu imagino que vocês estão dizendo uma parábola porque ele tá vindo aqui, uma parábola ela tem algumas características, né? Em algum momento estamos com concavidade pra cima ou concavidade para baixo, então, no azulzinho* [gráfico que os alunos fizeram para o caso da água gelada], *em algum momento isso vai começar a baixar.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]. *Faz sentido isso? Em algum momento essa temperatura...* [guiar/apoiar – conduz o pensamento dos alunos]

A partir de ações da categoria *convidar* e *guiar/apoiar*, o professor [26, 29, 30 e 32] incentiva os alunos a relatarem e explicarem como resolveram a tarefa. Em resposta a essas ações, Lucas [33] elabora uma conjectura e o professor desafia os alunos [34], encorajando-os a praticar a reflexão. Daniela [35] e Mário [36] mantêm a conjectura (inválida) de Lucas, que diz respeito à parte de uma parábola. O professor [37] desafia os alunos a apresentarem razões matemáticas que os permitam justificar porque se trata da parte de uma parábola. Entretanto, ele mesmo respondeu seus questionamentos, fornecendo informações e explicações, conduzindo um pouco a discussão ao invés de deixar que os alunos respondessem. Considerando que, em momentos anteriores da aula, os alunos assumiram que o eixo vertical seria o da variável dependente T (temperatura) e que o eixo horizontal seria o da variável independente t (tempo), o professor [37] questionou o fato de que, se o gráfico fosse uma parábola, em algum momento a temperatura da água gelada, que estava aumentando, começaria a diminuir (ou, no caso da água quente, a temperatura que estaria diminuindo, começaria a aumentar), devido ao comportamento de uma parábola. A discussão do professor com os alunos continua.

[38] Lucas: *Eu acho que...*

[39] Daniela: *Não.*

[40] Lucas: *Eu acho que não vai baixar, por exemplo, essa daqui, né? A quente. Ela não vai começar a esquentar depois, então eu acho que não tem como ser uma parábola, nem...*

[41] Mário: *Então, mas eu imagino que a curva ali vai estar pra cá, né? Tipo aqui, ou aqui? Tá virada.*

[42] Professor: *Mas aí como que seria? Como que essa parábola viria daqui?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação].

[43] Mário: *Seria aqui.*

[44] Professor: *Onde que tá o vértice dessa parábola?* [desafiar – pressiona para precisão].

[45] Mário: *Seria por aqui, ó* [o aluno indica uma parábola deitada, com o eixo de simetria na horizontal].

[46] Professor: *Mas ela seria assim?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação].

[47] Mário: *É.*

[48] Professor: *Então, ela não seria uma função, né?* [desafiar – encoraja a reflexão]. *Ela estaria na horizontal, ela estaria deitada, não seria uma função, se a gente faz o teste da reta vertical* [informar/sugerir – fornece informações e explicações].

[49] Mário: *Isso, verdade.*

[50] Professor: *Pensa aí, pensa aí.* [guiar/apoiar – encoraja os alunos a reelaborarem suas respostas]

[51] Daniela: *É difícil pra chegar no ponto.*

[52] Mário: *Pra chegar no ponto, eu acho que não dá, acho que pode chegar perto.*

A partir das ações de *guiar/apoiar* e *informar/sugerir* realizadas pelo professor [37], Daniela e Lucas [38 e 39] reavaliam a conjectura e Lucas [40] apresenta uma justificativa para invalidar a conjectura feita anteriormente. Porém, Mário [41] explica ao professor que, para ele, essa parábola estaria “virada”, isto é, teria seu eixo de simetria na horizontal. O professor [42 e 44] incentiva a explicação e pressiona para precisão para que os alunos pensem sobre o gráfico que melhor descreve o comportamento dos pontos, ações das categorias *guiar/apoiar* e *desafiar*. Em resposta a essas ações, Mário [45] explica onde estaria a vértice da parábola e o professor [48] o desafia, argumentando que aquele gráfico não representaria uma função da temperatura em relação ao tempo, uma vez que os alunos estavam considerando a variável dependente (temperatura) no eixo vertical e a variável independente (tempo) no eixo horizontal, fornecendo informações e explicações ao aluno que pudessem contribuir para que ele avançasse na tarefa matemática proposta.

A fala [48] do professor conduz Mario a refletir sobre sua conjectura inicial [49], porém o professor fornece um caminho a seguir, reduzindo a demanda cognitiva da tarefa. O professor problematiza se o gráfico sugerido pelos alunos seria o de uma função, mas o próprio professor indica uma resposta, sugerindo o teste da reta vertical. Mesmo com um caminho proposto pelo professor, os alunos poderiam, por exemplo, conjecturar que se tratava de uma função do tipo $f(x) = \sqrt{x}$, o que não aconteceu. O professor dirigiu-se a outro grupo, no entanto, antes, desafiou [50] os alunos a continuarem refletindo sobre o assunto.

Os alunos continuaram testando para verificar se as funções se ajustavam bem aos dados. Após muitos testes e discussões, o professor aproxima-se novamente do grupo e apoia [53] os alunos a explicarem como está o andamento das discussões.

[53] Professor: *Como é que vocês chegaram aqui?* [convidar – solicita relatos de como fizeram].

[54] Lucas: *Aí professor tá difícil.*

[55] Professor: *Uma ideia é eu tentar imaginar uma equação, vamos tentar imaginar uma equação diferencial.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]. *Ó, o que vocês percebem aqui com relação à variação da temperatura?* [guiar/apoiar – incentiva explicação].

[56] Lucas: *Que ela vai diminuindo.*

[57] Professor: *A variação vai diminuindo, conforme o tempo passa.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]. *Pode falar...*

[58] Lucas: *Ah, não, eu tinha comentado sobre o tempo ser inverso à variação. Porque quanto mais o tempo passa, menor a variação, a gente estava pensando em alguma coisa assim.*

Lucas [54] externaliza a dificuldade que os alunos estão enfrentando para modelar a situação-problema. O professor [55], por meio de ações das categorias *guiar/apoiar* conduz o pensamento dos alunos, sugerindo pensarem em uma equação diferencial e os incentiva buscar explicações, o que permite Lucas [56] apresentar sua conjectura.

A intervenção do professor [55] foi importante para que passassem a pensar em uma EDO, uma vez que os alunos estavam focados em encontrar uma função que descrevesse o comportamento dos dados, estratégia válida e que poderia oferecer uma resposta para a tarefa. No entanto, como o objetivo da aula e o da tarefa matemática era o de utilizar uma EDO para modelar a situação-problema, as intervenções do professor podem ter conduzido a discussão para uma direção que impediu que os alunos seguissem um caminho escolhido por eles.

O professor, então, comenta sobre a fala de Lucas [58].

- [59] Professor: *Então... essa é uma questão interessante, porque tem alguma relação de proporcionalidade. A variação da temperatura ela tá ocorrendo... proporcional a...* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]
- [60] Lucas: *Ao tempo.*
- [61] Professor: *Na verdade, proporcional...* [informar/sugerir – corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos]. *É que conforme o tempo passa, a dife...* [guiar/apoiar – focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes]
- [62] Daniela: *A diferença, ela [a variação da temperatura] é proporcional ao quão próximo ela está da temperatura ambiente.*
- [63] Professor: *Exato, [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] o que que é isso? Você estava falando, né? A diferença... O que seria? A diferença do quê? [desafiar – encoraja a reflexão]. É isso que você falou... Ela é proporcional... Ó, ó, a variação da temperatura, ela está acontecendo de uma maneira diferente, de um ponto para outro, né? Quanto mais próximo do t igual a zero, no início, quando a gente começou a medir, a temperatura ambiente e a temperatura do líquido tinham uma diferença grande. Aí, para o segundo momento, a variação foi uma variação grande. Mas, conforme o tempo foi passando, essa variação foi diminuindo, junto com a diferença entre a temperatura (da água) e a temperatura ambiente. [informar/sugerir – fornece informações e explicações]. O que que isso significa? Isso que eu acabei de falar, como eu expressei isso numa equação? [desafiar – pressiona para a generalização].*
- [64] Daniela: *Vamos falar que a taxa de temperatura perdida é “A linha” (A’). “A linha” é igual “A” vezes tempo e temperatura, não sei.*
- [65] Professor: *O que é “A”?* [guiar/apoiar – incentiva explicação]
- [66] Daniela: *O “A” vai ser... a temperatura no momento?*
- [67] Professor: *Ó, pensem sobre isso aqui, a variação, quando eu falo variação, taxa de variação, o que eu quero dizer com taxa de variação? [desafiar – encoraja a reflexão]. Derivada. Essa variação aí, ela está acontecendo numa relação que eu consigo perceber proporcional a essa diferença entre a temperatura do líquido e a temperatura do ambiente. Porque quanto maior, olha no gráfico [guiar/apoiar – focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes], quanto maior a diferença entre a temperatura do líquido e a temperatura do ambiente, maior a variação com o passar do tempo. Então, a taxa de variação, ela está sendo proporcional a essa diferença entre a temperatura e a temperatura do ambiente. [informar/sugerir – fornece informações e explicações]*

O professor [59 e 61], por meio das ações de *informar/sugerir* e *guiar/apoiar*, fornece explicações e corrige respostas incorretas dos alunos, o que abre espaço para Daniela [62] apresentar uma conjectura, que é validada pelo professor [63]. O docente faz questionamentos importantes (*A diferença... O que seria? A diferença do quê?*), mas responde seus próprios questionamentos, o que limita a exigência do raciocínio matemático dos alunos. Apesar disso, ele conclui seu comentário [63], desafiando-os a refletirem sobre como a variação da temperatura, explicada anteriormente, poderia ser considerada em um modelo matemático, visando uma generalização. Daniela [64] elabora uma conjectura, porém sem certeza. Novamente, o professor fornece explicações [67] e direciona demasiadamente o pensamento dos alunos. Ele pergunta aos alunos: “o que eu quero dizer com taxa de variação?” Este questionamento poderia ser visto como uma ação de *desafiar* (encoraja a reflexão), no entanto ele se antecipa e explica que a taxa de variação está relacionada ao conceito de derivada e explicita a relação de proporcionalidade que há entre a taxa de variação da temperatura e a diferença da temperatura do líquido com a temperatura ambiente, resultando, assim, em uma

ação de *informar/sugerir*. Logo em seguida, o professor se encaminha para outro grupo e os alunos começam a discutir qual seria o modelo matemático de representação desses dados.

Próximo ao término da aula, o Grupo 1 chama o professor.

[68] Daniela: *Professor, a gente pensou, o “A linha” (A’) de t é igual ao A de t menos a temperatura ambiente vezes alguma coisa.*

[69] Professor: *Certo* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]

[70] Daniela: *Uma constante.*

[71] Professor: *Isso.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]

[72] Daniela: *Alguma coisa ou uma função de alguma coisa, que a gente não sabe. Ai a gente pensou em pegar e colocar ela e substituir os valores e isolar o k de alguma coisa ali e tentar fazer...*

[73] Professor: *E achar esse valor do k* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno].

[74] Daniela: *É mais ou menos assim, uma função ou alguma coisa.*

Daniela [68 e 70] apresenta ao professor a conjectura feita pelo grupo, que resulta em um modelo matemático expresso por: $A'(t) = (A(t) - 26,4)k$. Ela ainda tem dúvidas em relação ao k , pois não consegue definir se é uma função ou uma constante [72 e 74]. Por mais que ainda restassem algumas dúvidas, o Grupo 1 chegou a uma EDO esperada pelo professor, generalizando uma expressão. A resolução da EDO e a discussão sobre o modelo (e o significado da constante de proporcionalidade k) ficaram para o terceiro e último dia de aula, não relatado neste artigo.

6 Discussão

Neste artigo, tivemos como objetivo identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático durante a realização de uma tarefa em uma turma de Engenharia na disciplina de EDO. A análise realizada considerou as categorias de ações proposta por Araman, Serrazina e Ponte (2019) que apoiaram os processos de raciocínio matemático (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020), dos alunos ao resolverem a tarefa matemática proposta. A partir da análise realizada, consideramos que o professor executou as ações previstas, *convidar*, *guiar/apoiar*, *informar/sugerir* e *desafiar* (Araman, Serrazina & Ponte, 2019), e que estas apoiaram o raciocínio matemático dos alunos, uma vez que, durante as discussões, observamos os processos de *conjecturar*, *generalizar* e *justificar* (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020) serem manifestados.

Na categoria de *convidar*, as ações tiveram como objetivo solicitar relatos de como os alunos estavam realizando a tarefa. Em geral, as ações relacionadas a essa categoria aconteceram quando o professor se reaproximava do grupo, após circular pelos outros grupos [1, 26, 29 e 53]. As ações dessa categoria servem para inserir os alunos na discussão e não deixar que ela acabe antes do previsto (Araman, Serrazina & Ponte, 2019). Na categoria *guiar/apoiar*, as ações apareceram frequentemente no formato de perguntas aos alunos, na tentativa de incentivar a explicação [4, 21, 30, 32, 42, 46, 55 e 65], ou em momentos em que o professor conduz o pensamento dos alunos para aspectos importantes da tarefa [7, 37, 55 e 73]. As ações da categoria *guiar/apoiar* também apareceram em momentos em que o professor encoraja os alunos a redizerem [11] ou reelaborarem [50] suas respostas ou em momentos em que o professor buscava focalizar o pensamento dos alunos para fatos importantes. Na categoria *informar/sugerir*, duas ações do professor foram comuns, a de *validar* respostas corretas dos

alunos [4, 25, 57, 63, 6 e 71] e a de *fornecer* informações e explicações [25, 37, 48, 59, 63 e 67]. Outras ações menos comuns foram a de *reelaborar* [23] e a de *corrigir* [61] respostas fornecidas pelos alunos. Embora as ações das categorias *guiar/apoiar* e *informar/sugerir* apresentem um potencial menor para processos de raciocínio matemático mais elaborados, como *generalizar* e *justificar*, elas são fundamentais para subsidiar os alunos com entendimentos que são necessários a esses processos, portanto elas têm papel relevante na discussão das tarefas matemáticas (Araman, Serrazina & Ponte, 2019). Por fim, na categoria *desafiar*, as ações sempre ocorreram na forma de questionamentos aos alunos. As ações desta categoria foram: *encorajar* a avaliação [9] ou a reflexão [16, 19, 34, 48, 63, e 67], *pressionar* para a precisão [44] ou para a generalização [63] e *solicitar* que os alunos apresentem razões (justificativas) [37].

Notamos que nas intervenções mais longas do professor, isto é, nos trechos [37], [63] e [67], há ações da categoria *desafiar* com grande potencial para promover o raciocínio dos alunos (Araman, Serrazina & Ponte, 2019), mas há, nos mesmos trechos, a ação de *fornecer* explicações, o que acaba por reduzir o desafio aos alunos. Tal fato leva-nos a avaliar que a ação de *fornecer* explicações poderia ter sido evitada em algumas circunstâncias para permitir que os alunos tirassem suas próprias conclusões. Entretanto, isso não significa que a ação de *fornecer* informações e explicações não apoiou o raciocínio matemático dos alunos. Em [59], o professor fornece explicações que contribuem para a conjectura feita por Daniela [62] e validada pelo professor [63].

Ainda sobre as ações relacionadas à categoria *desafiar*, percebemos que elas aconteceram, especialmente, em três situações relevantes de discussão sobre matemática conceitual. A primeira foi quando os alunos falavam sobre assíntota horizontal e o professor os desafiou [16 e 19] a dizerem o que seria e qual o motivo de eles estarem considerando como uma assíntota. A segunda foi quando os alunos falavam sobre o comportamento dos dados, a respeito do plano cartesiano se parecer com uma parábola e o professor os desafiou [34, 37 e 48] a dizerem o motivo de ser uma parábola e, sendo uma parábola com eixo de simetria na horizontal, se esta representaria o gráfico de uma função. A terceira foi quando o professor pressionava os alunos para uma generalização [63], esperando que escrevessem uma EDO ao passo que os encorajava a refletirem sobre o que seria a taxa de variação [67] naquele contexto.

As ações das categorias *guiar/apoiar* e *informar/sugerir* foram executas mais vezes pelo professor. Conforme Araman, Serrazina e Ponte (2019), essas ações são fundamentais para subsidiar a discussão e possibilitar que os alunos avancem em seu entendimento sobre a tarefa e possam responder ao professor, quando são desafiados por ele. Concluímos, assim, que as ações do professor, em conjunto, apoiaram o raciocínio matemático dos alunos, que atingiram os objetivos propostos pelo docente para aquelas duas aulas, a saber: (i) os alunos compreenderem [12 e 62] que, na situação proposta, a taxa de variação da temperatura em relação à variação de tempo é proporcional à diferença entre a temperatura T e a temperatura ambiente T_a ; e (ii) os discentes elaborarem um modelo matemático [68] utilizando uma EDO. Essas ideias foram consolidadas na terceira aula, quando puderam resolver a EDO e analisar o significado da constante de proporcionalidade k .

7 Considerações Finais

Como mencionamos na introdução, são escassas as investigações envolvendo o conhecimento de professores que ensinam Matemática em cursos como Engenharia (Lopes & Lima, 2024). Há, sim, especificidades no conhecimento desses docentes, uma vez que o ensino de EDO (e de outras disciplinas, como Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real) não deve ficar restrito ao uso das técnicas de resolução (porque, atualmente, há

aplicativos que resolvem facilmente uma EDO) ou às demonstrações de teoremas (porque este não é o propósito do ensino da Matemática para os Engenheiros). Assim, consideramos que este artigo traz resultados e informações que vão na direção de outras pesquisas (Araman, Serrazina & Ponte, 2019, 2020; Mata-Pereira & Ponte, 2017) sobre as ações do professor e, ao mesmo tempo, diferencia-se pelo contexto em que este estudo foi realizado, analisando as ações de um professor do Ensino Superior em uma disciplina de um curso de Engenharia.

A análise dos dados revelou que as ações do professor apresentam grande potencial para o envolvimento dos alunos em tarefas matemáticas e no desenvolvimento do raciocínio matemático deles. A partir dos dados obtidos, foi possível perceber a relação entre tais ações e as diferentes formas como os alunos responderam a elas e, principalmente, como avançaram em seus conhecimentos matemáticos a partir da tarefa proposta e da maneira de abordá-la realizada pelo professor. Dessa maneira, os resultados que apresentamos neste artigo evidenciam a relevância e a pertinência de pesquisas que considerem os contextos de professores que ensinam matemática nos cursos de Engenharia, investigando suas práticas e os seus conhecimentos.

Por fim, vale destacar, como limitação da pesquisa, que a análise se concentrou em um único grupo de estudantes, o que restringe a compreensão global dos processos de raciocínio matemático manifestados e apoiados pelas ações do professor no contexto investigado. Para futuras pesquisas, sugerimos a ampliação das análises, seja considerando um grupo maior de estudantes, seja considerando outras turmas (de outros cursos de Engenharias, inclusive); além de dar maior atenção às contribuições do uso diferentes *softwares* na promoção do raciocínio matemático dos estudantes.

Referências

- Araman, E. M. D. O.; Serrazina, M. D. L. & Ponte, J. P. (2019). “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(2), 466-490.
- Araman, E. M. D. O.; Serrazina, M. D. L. & Ponte, J. P. (2020). Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(67), 441-461.
- Araújo, A. M. R. (2008). *Modelagem matemática nas aulas de cálculo: uma estratégia que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de engenharia*. 2008. 94f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará. Belém, PA.
- Barros Filho, A. A. (2012). *A resolução de problemas físicos com equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem: análise gráfica com o software maple*. 2012. 228 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG.
- Bassanezi, R. C. & Ferreira Junior, W. C. (1988). *Equações Diferenciais com aplicações*. Editora Harbra Ltda.
- Boaler, J. & Brodie, K. (2004). The importance, nature and impact of teacher questions. In: D. E. McDougall, & J. A. Ross (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (North America, pp. 773-781). Toronto: OISE/UT.
- Brasil. Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Superior. *Resolução nº 2 de 24 de abril de 2019*. (2019). Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. Brasília, DF.

- Ellis, A.; Özgür, Z. & Reiten, L. (2018). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 30(2), 1-26.
- Esteban, M. P. S. (2010). *Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições*. Porto Alegre: Artmed.
- Laudares, J. B. & Miranda, D. F. (2007). Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais. *Educação Matemática Pesquisa*, 9(1), 103-120.
- Lannin, J.; Ellis, A. B. & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten -grade 8*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (3. ed. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra). São Paulo: HARBRA Ltda.
- Lopes, R. & Lima, G. L. (2024). Conhecimentos especializados de professores de Matemática para o ensino de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis na Engenharia Civil a partir de um problema de Transferência de Calor. In: *Anais do IX Seminário Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática* (pp. 1-15). Natal, RN.
- Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 2(96), 169-186.
- Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*. 32(62), 781–801.
- Morais, C.; Serrazina, L. & Ponte, J. P. (2018). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae*, 20(4).
- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, 100, 3–9.
- Oliveira, H.; Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29-54.
- Pinto, R. L. (2021). *Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis na engenharia civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor*. 2021. 313 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.
- Ponte, J. P.; Quaresma, M. & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7-11.
- Powell, A. B.; Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2004). Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Ideias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. *Bolema*, 17(21), 81-140.
- Santos, T. M. D. (2025). *Uma análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático na disciplina equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia*. 2025. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR.
- Zill, D. G. & Cullen, M. R. (2008). *Equações diferenciais*. v. 1. Pearson Makron Books.