

Construcción Relacional del Objeto Algebraico: una estrategia cognitivo-lingüística para desarrollar el pensamiento algebraico

Fredy Enrique González

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Maracay — Venezuela

✉ fredy.gonzalez@ufop.edu.br

ORCID [0000-0002-8079-3826](https://orcid.org/0000-0002-8079-3826)

Andrés Avelino González Rondell

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Maracay — Venezuela

✉ agorondell@yahoo.es

ORCID [0000-0003-0815-1279](https://orcid.org/0000-0003-0815-1279)



2238-0345 

10.37001/ripen.v15i3.4566 

Recibido • 27/04/2025

Aprobado • 02/07/2025

Publicado • 01/09/2025

Editor • Gilberto Januario 

Resumen: En este estudio se procuró identificar dimensiones del pensamiento algebraico que impactan la formación inicial de docentes de matemáticas. Realizado en el marco de un curso obligatorio de Álgebra Lineal en una universidad pedagógica venezolana, se fundamentó teóricamente en: registros semióticos (Duval, 1993), teoría de la objetivación (Radford, 2008), epistemografía, enfoques socioculturales del aprendizaje y cognición matemática. Mediante metodología cualitativa con observación participante y análisis de diarios de clase, se estableció el constructo construcción relacional del objeto algebraico, que explica el aprendizaje de conceptos algebraicos a través de la articulación dialéctica entre el lenguaje algebraico significativo y las metáforas algebraicas significativas.

Palabras clave: Formación Inicial Docente. Pensamiento Algebraico. Lenguaje Algebraicamente Significativo. Álgebra Universitaria. Metáforas Algebraicamente Significativas.

Algebraic Object Relational Construction: a cognitive-linguistic strategy to develop algebraic thinking

Abstract: This study aimed to identify the dimensions of algebraic thinking that impact the preparation of prospective secondary mathematics teachers. Conducted during a required Linear Algebra course within a Venezuelan pedagogical university's mathematics teacher education program, the research adopted registers of semiotic representation (Duval, 1993), objectification theory (Radford, 2008), epistemography, sociocultural learning perspectives, and mathematical cognition as theoretical foundations. Employing a qualitative methodology through participant observation and class diary analysis, researchers developed the relational construction of the algebraic object framework—a process in which algebraic concept learning occurs through dynamic interactions between meaningful algebraic language and meaningful algebraic metaphors.

Keywords: Initial Teacher Education. Algebraic Thinking. Meaningful Algebraic Language. University Algebra. Meaningful Algebraic Metaphors.

Construção Relacional do Objeto Algébrico: uma estratégia cognitivo-lingüística para desenvolver o pensamento algébrico

Resumo: O objetivo deste estudo foi identificar os aspectos do pensamento algébrico que têm incidência na formação de futuros professores de matemática. A pesquisa foi realizada durante o desenvolvimento da disciplina Álgebra Linear, obrigatória no curso de Formação Inicial de Professores de Matemática oferecido por uma universidade pedagógica venezuelana. Como

referencial teórico, assumiram-se as seguintes noções: registros de representação semiótica; teoria da objetivação; epistemografia; aspectos socioculturais da aprendizagem; e cognição matemática. A metodologia teve cunho qualitativo, envolvendo observação participante e registros escritos em diários de aula. Com base na análise dos dados, foi definido o conceito denominado construção relacional do objeto algébrico, o qual se refere ao aprendizado de conceitos algébricos por meio da articulação entre a linguagem algébrica significativa e as metáforas algébricas significativas.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores. Pensamento Algébrico. Linguagem Algebricamente Significativa. Álgebra Universitária. Metáforas Algebricamente Significativas.

1 Introducción

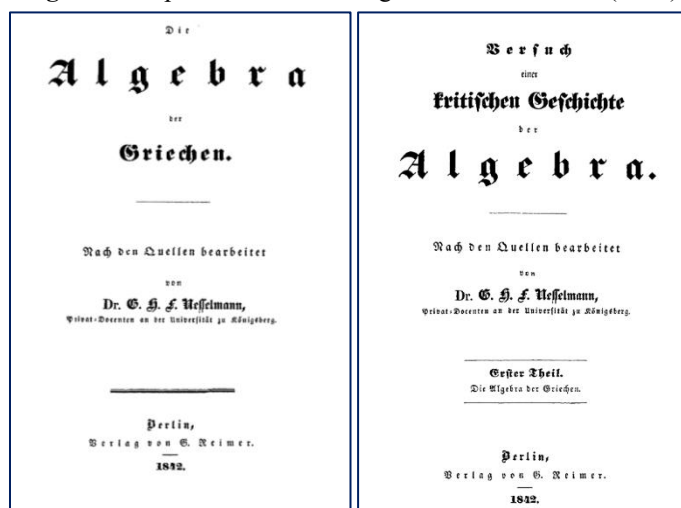
De acuerdo con Pimm (2002) para muchos estudiantes “la clase de matemática es, en gran medida, pasiva y auditiva, sentándose a escuchar al profesor mientras este habla sobre triángulos, multiplicación de decimales o manipulaciones algebraicas” (p.75). En nuestra experiencia como profesores de Álgebra en programas de formación inicial de estudiantes para profesor de matemática (EPPM) en una universidad pedagógica pública venezolana, hemos observado que tales estudiantes manifiestan dificultades para comprender los conceptos y procesos específicos de esa disciplina; además exhiben un inadecuado manejo del simbolismo algebraico. Tales limitaciones les hacen pensar que el álgebra que deben estudiar es muy compleja, lo cual los lleva a rechazarla. La comprensión de esta anomalía nos condujo a la realización del estudio aquí reportado, cuyo propósito central fue identificar las dimensiones del pensamiento algebraico (PA) que impactan la formación inicial de docentes de matemáticas.

La constatación de las dificultades para el aprendizaje del álgebra manifestada por los EPPM nos condujo a conjeturar que su comportamiento frente a esta disciplina está relacionado con el escaso, nulo o inadecuado uso del lenguaje algebraico oral, desaprovechándose así las posibilidades didácticas derivables del período retórico en la evolución del Álgebra, como fue descrita por Nesselmann (1842) en uno de los tratados más completos sobre la historia del álgebra.

De acuerdo con Eves (2011), en ese texto, Nesselmann

caracterizó con propiedad tres etapas en el desarrollo de la notación algebraica. Primero tenemos el *álgebra retórica* en la que los argumentos de la resolución de un problema están escritos en prosa pura, sin abreviaturas ni símbolos específicos. Luego viene el *álgebra sincopada* en la que se adoptan abreviaturas para algunas de las cantidades y operaciones que se repiten con más frecuencia. Finalmente se llega a la última etapa, la del *álgebra simbólica*, en la que las resoluciones se expresan en una especie de taquigrafía matemática formada por símbolos que aparentemente no tienen nada que ver con los entes que representan. Es razonablemente preciso decir que el álgebra anterior a la época de Diofanto era retórica. Una de las contribuciones más importantes de Diofanto a las matemáticas fue la *sincopación* del álgebra griega. El álgebra retórica, sin embargo, ha seguido bastante generalizada en el resto del mundo, excepto en la India, durante muchos cientos de años. En Europa occidental, específicamente, la mayor parte del álgebra permaneció retórica hasta el siglo XV. Y aunque la aparición del álgebra simbólica se dio en Europa occidental en el siglo XVI, solo a mediados del siglo XVII este estilo acabó imponiéndose. No es raro pasar desapercibido que el simbolismo usado en nuestros textos de álgebra elemental aún no tiene 400 años. (Eves, 2011, p. 206)

Figura 1: Capa de la Edición Original de Nesselmann (1842)



Fuente: Publicado por Brill | Degruyter (DOI: 10.1515/9783111585789)

No obstante, los vínculos entre lenguaje retórico y álgebra (Pimm, 2002) no son utilizados a favor de su enseñanza ni de su aprendizaje; percibimos de este modo que los estudiantes *no hablan algebraicamente*, ni emplean el lenguaje oral natural para referirse a los procesos y a los objetos algebraicos, entendidos estos últimos en la perspectiva de Drouhard (2009), para quien un objeto algebraico es todo aquello que se usa, se trabaja, se estudia cuando uno “hace matemática”. Son los “contenidos” de las clases de matemática: los números, las operaciones, las ecuaciones, los polígonos, las curvas, las funciones, las series, los espacios vectoriales, las integrales, etc.

Basados en su experiencia como formadores de futuros profesores de matemática, los autores de este trabajo han podido constatar que en los cursos de Álgebra predomina la *cultura del silencio* (Freire, 1970). Esta expresión freireana es usada, *ad hoc*, en términos metafóricos, para caracterizar el ambiente del salón de clases, en donde los alumnos, la mayor parte del tiempo, se mantienen sin pronunciar palabra alguna, copiando lo que el profesor escribe en el pizarrón cuando enseña álgebra, enfatizando el modo escritural, sin enfatizar la verbalización de los discentes, como medio idóneo para apropiarse de los conceptos algebraicos que están siendo estudiados.

Esta persistencia de la presentación escrita de los símbolos algebraicos incrementa el riesgo de aparición de fenómenos lingüísticos, tales como la sinonimia, la polisemia y otras características propias de la escritura en matemática; además, genera en los estudiantes la creencia de que símbolo y objeto matemático son intercambiables, pues los perciben como si fuesen equivalentes; todo esto se agrava pues ocurre en un contexto caracterizado por la riqueza simbólica del lenguaje algebraico. Sin embargo, en el otro extremo, es decir, cuando se hace uso sólo de la oralidad, se corre el riesgo de hacer una lectura literal de los símbolos, vaciándolos de su significado.

Ante las anomalías percibidas, decidimos llevar adelante el estudio reportado en este artículo, mediante el cual procuramos aprovechar didácticamente el desarrollo evolutivo del lenguaje algebraico (Nesselman, 1842; Stacey, Chick & Kendal, 2001), durante un proceso de formación inicial de futuros profesores de matemática, estudiantes de álgebra universitaria. El proceso de desarrollo evolutivo del álgebra, desde lo que se acepta como su período histórico fundacional hasta la compleja rama de las matemáticas como se le conoce hoy en día, conlleva interesantes elementos caracterizadores que pueden ser aprovechados con fines didácticos en

los diversos niveles educativos. En dicho proceso, el lenguaje natural, tanto como el simbólico, ha estado implicado; por ello, se cree que constituye un elemento que debe ser suficientemente explorado en la enseñanza del álgebra, en los diferentes niveles educativos, desde la educación básica hasta la universitaria.

2 Repertorio de Coordinadas Teóricas y Conceptuales de Referencia (RC T-C R)

Lakoff y Núñez (2000), al tratar el problema del ser de las matemáticas, actualizan interrogantes filosófico-ontológicas, como las siguientes: *¿Acaso las matemáticas existen en alguna parte del Universo?* De ser así, entonces la labor del matemático sería acceder a ellas mediante complejos mecanismos humanos de captación y descubrimiento; o *¿las matemáticas son una creación de la mente humana?* Si así fuese, entonces, se trataría de una obra producto de la imaginación.

Los autores responden estas dos interrogantes adoptando una visión cognitiva de la ciencia; lo destacable de su perspectiva es la naturaleza empírica de sus afirmaciones, asumiendo que los humanos, al nacer, traen consigo una base innata de aritmética. Siendo así, los logros en las matemáticas son obra de una creación. Según su punto de vista, la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones, ni en mundos trascendentes platónicos.

Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Por razones de tipo evolutivo, todos los seres humanos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas. Debido a su origen común, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son producidas por convenciones completamente sociales y culturales, aunque Lakoff y Núñez (2000) reconocen que los aspectos sociales e históricos juegan papeles importantes en la formación y desarrollo de estas ideas.

Uno de los dispositivos de los que se valen estos autores para explicitar sus puntos de vista es la metáfora, noción esta que les permite aprehender un concepto en términos de otro (Lakoff y Jonson, 1980). En las matemáticas, distinguen dos tipos: (a) *grounding metáforas*, las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo, “un espacio vectorial es una caja/paquete de cosas”, “un producto interno es una máquina”, “los puntos son objetos”, etc.; y, (b) *linking metáforas*, tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, “los números reales son los puntos de una recta”, “un operador lineal, en un espacio finito dimensional, es una matriz cuadrada”, “el espacio R^2 es el mismo espacio $R^{2 \times 1}$ ” (el par ordenado se interpreta como una matriz columna), etc. Nótese que, en este último caso, la metáfora se sustenta sobre el concepto de isomorfismo entre espacios vectoriales.

Como se aprecia, en el discurso de los autores antes citados, aparece con frecuencia la idea de “concepto”; de allí que sea necesario esclarecer el significado de este vocablo. González (2005) afirma que un concepto es

la representación lingüística de una idea abstracta que capacita al que la posee para clasificar objetos o eventos y para decidir si dichos objetos son ejemplos o no ejemplos de la idea abstracta en cuestión; se forma a partir de una elaboración cognitiva de los datos sensoriales y, una vez adquirido, constituye un mecanismo selectivo a través del cual deben pasar los estímulos externos con el fin de suscitar las respuestas pertinentes del sujeto, las cuales permiten a éste adaptarse a su entorno [...] los conceptos, una vez adquiridos, dotan al sujeto de una eficaz herramienta para enfrentarse a su ambiente. En efecto, mediante los conceptos el ser humano logra superar las particularidades específicas de la inmensa cantidad de estímulos, discriminativamente

diferentes, que percibe y reacciona ante ellos como miembros de una clase y no como unidades aisladas; como consecuencia de esto se produce una notable simplificación del ambiente; reduciéndose, por tanto, la cantidad de energía necesaria para enfrentarlo (González, 2005, pp. 41-42).

Por su parte, Arana y González (2006), ofrecen una perspectiva cognitiva relativa a la adquisición de los conceptos científicos, concibiéndolo como un proceso, denominado *enriquecimiento conceptual progresivo*, el cual consiste en establecer vínculos recursivos entre distintos procesos mentales que, progresivamente, se van haciendo más complejos: “El encadenamiento de estos procesos incide en un cambio progresivo de la imagen del concepto que se enriquece cada vez más tanto desde el punto de vista de los atributos estructurales como funcionales” (Arana y González, 2006, p. 227); así, el estudiante incrementa sus habilidades para operar sobre sus representaciones, aumentando su capacidad explicativa en términos de abstracciones. De acuerdo con Lakoff y Johnson (1980), en el desarrollo de estos procesos también están involucrados elementos de índole lingüística; en efecto “las expresiones lingüísticas son recipientes para los significados; se supone que las palabras y las oraciones tienen significado en sí mismas independientemente de cualquier objeto o hablante” (Lakoff y Johnson, 1980; p. 47).

Por otro lado, González (2005) también afirma que el aspecto verbal del lenguaje, la verbalización, es decir, la expresión de ideas mediante palabras, es la segunda de las cuatro fases por las que transita la construcción de conceptos matemáticos, luego de la fase manipulativa (juego libre y juego orientado) y antes de las fases ideográfica y simbólica; al verbalizar, “el matemático, profesional o aprendiz, *lenguajea* (Maturana, 2006; Maturana y Dávila, 2018); es decir, habla acerca de aquellos asuntos de los que se ha dado cuenta durante la fase, a la cual González (2005, p. 39) denomina como *manipulativa*, de juego libre o dirigido con los objetos, concretos o abstractos, durante la primera fase del proceso de adquisición de algún concepto.

Sin embargo, también es importante señalar que, en relación con los conceptos algebraicos, es posible invertir el sentido de la progresividad; en efecto, como lo señala Ursini (1996), en el campo del aprendizaje no necesariamente es cierto que los conceptos se aprenden de manera gradual, desde lo más simple a lo más complejo; por el contrario, si se cuenta con una mediación adecuada, es posible acceder a ideas complejas, que ayudan a tomar conciencia de otras más simples, reconsiderándolas desde una perspectiva diferente y transformando su significado; esto, en el caso del aprendizaje del álgebra, “amplía la comprensión de la aritmética y permite reconsiderarla desde una perspectiva más amplia” (Ursini, 1996; p. 48).

Otro aspecto importante de la construcción de los conceptos matemáticos es el papel desempeñado por lo representacional; por ello subscribimos las siguientes proposiciones de Duval (2006): (a) la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación, y (b) es muy importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos de representación y usarlos. Esto último es coherente con el hecho de que en matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos, sino para sustituirlos por otros (Radford, 2010a; Duval, 2006; Duval & Moretti, 2012). Adicionalmente, tomamos en cuenta que un concepto se entiende mejor en el conjunto de las relaciones dinámicas que lo ligán con otros conceptos, en los problemas en los que se aplica, y en los procedimientos y estrategias que se elaboran para resolver esos problemas (Radford, 1995a, 1995b).

Por otro lado, se asume la idea de medio semiótico de objetivación considerándola como un recurso semiótico que incluye: artefactos, gestos, símbolos y palabras. Para Radford (2010a,

2010b) los medios semióticos de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de nuestros actos intencionales. Para la teoría de la objetivación, las palabras y los gestos también pueden ser signos de naturaleza algebraica. Además, para Vygotsky (1979) los procesos de conocimiento son mediados por el lenguaje.

Por su parte, para Drouhard (2009), las palabras y los enunciados en lenguaje natural se constituyen en herramientas semiolingüísticas. A todas estas representaciones, Duval (2002) las denomina representaciones semióticas y son medios de exteriorización de las representaciones.

La teoría de Radford (2010a, 2010b) incluye la expresión *enseñanza y aprendizaje significativos*, con la cual alude a formas pedagógicas de acción que conllevan a una comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

De lo expuesto en los párrafos anteriores, cuando se aborda la formación inicial de los futuros profesores de matemática, resulta esclarecedor lo que tiene que ver con el lenguaje algebraico, pues es a través de él que se producen y se comunican las ideas matemáticas en la actualidad, siendo esto último un aspecto clave del desempeño docente que debe ser considerado en su especificidad. Considerando el valor que tiene el logro de un nivel deseable de pensamiento algebraico en los escolares, resulta importante que los profesores de matemáticas adquieran conciencia del papel que ocupa el álgebra educativa en el currículo, el cual tiene que ver con los procesos de razonamiento y generalización, los cuales se hacen presentes en los procesos modelación, resolución de problemas, entre otros.

En este proceso, es importante la elaboración de una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. En este sentido, el educador matemático debe ser competente en lo que se refiere al manejo del lenguaje algebraico: por eso, resulta importante que el profesor de matemática propenda al desarrollo del pensamiento algebraico de sus estudiantes de forma consciente, sin descuidar el rigor disciplinar y mediante el manejo de estrategias didácticas efectivas. De tal forma que el despliegue de este pensamiento adquiere particular relevancia en la formación inicial de estos profesores.

3 Método

Esta investigación fue concebida como un estudio de caso múltiple (Yin, 2018); esta estrategia se consideró adecuada porque el estudio procuraba información sobre los procesos de pensamiento algebraico puestos en juego durante el aprendizaje de nociones sobre álgebra lineal de los integrantes de un grupo de estudiantes para profesor de matemática, participantes de un curso sobre esta disciplina, en cuyo contexto fue desarrollada la investigación. Por tanto, se trató de situaciones únicas y concretas: las clases de Álgebra Lineal mediadas por el investigador quien, desde esta privilegiada posición (mediador-investigador) tuvo la posibilidad de observar directamente a los estudiantes en acción y obtener información útil para la pesquisa.

En cuanto al Ambiente y Participantes: La investigación se llevó a cabo en una universidad pedagógica pública situada en la ciudad de Maracay, Estado Aragua, Venezuela; en la misma participaron dos grupos de estudiantes para profesor de matemática (EPPM), matriculados en la especialidad de matemática, cursantes de la asignatura Álgebra Lineal, una de las disciplinas obligatorias, previstas en el Plan de Estudios previsto para la obtención del grado de Profesor de Matemáticas.

Uno de los grupos asistía a clases en el turno matutino (M) y el otro en el vespertino (T); en ambos grupos, el mediador del curso fue el primer autor de este artículo, quien es profesor universitario en la especialidad de matemática; los estudiantes consiente y voluntariamente aceptaron ser parte del estudio.

Para los dos grupos, el curso tuvo una duración de 14 semanas, contabilizadas desde el 14 de octubre (primera clase) hasta el viernes 06 de marzo (último día que aparece reseñado en los diarios); cada semana, martes y viernes, tuvieron lugar dos clases, tanto en la mañana como en la tarde; de las 59 clases previstas, efectivamente fueron desarrolladas 42, equivalentes al 71,19%; las otras 17 clases (28,81%) no ocurrieron por motivos varios (realización de evaluaciones, vacaciones, elecciones nacionales, días festivos, suspensiones por problemas de orden público, entre otros). Las actividades de aula se llevaron a cabo en uno de los salones de clase normalmente utilizados para tales fines y sin acondicionamiento especial alguno.

La Técnica aplicada para obtener la información útil al estudio, fue la *observación participante*, tal como ésta es concebida por Taylor y Bogdan (1984). La pertinencia del uso de esta técnica se fundamenta en que el investigador, al mismo tiempo, fue también el mediador del curso, y por ello, tuvo la posibilidad de interactuar directamente con los estudiantes en tanto que sujetos del estudio, sin que su presencia significara intrusión, lo cual facilitó la recaudación de la información. Además, en este caso, fueron satisfechos los principios indicados por Corbetta (2003): (1) comprensión del punto de vista de los estudiantes respecto del asunto investigado e (2) interacción continua y directa con ellos.

Los instrumentos para el registro de la información fueron dos: (1) Los *diarios de clase de los estudiantes*, y (2) El *diario de campo del profesor* (mediador-investigador). El diario de clase de los estudiantes consistió en un registro (manuscrito o digitalizado) exhaustivo de todos los acontecimientos que tuvieran lugar en cada una de las clases; al comienzo del período académico, el profesor les dijo a los estudiantes cómo deberían confeccionar sus respectivos diarios, proporcionándoles la siguiente orientación específica:

Orientación del Profesor para la confección de los diarios de clase: En este diario, siéntete en total libertad de expresar tus pensamientos, reflexiones, sentimientos y emociones en el contexto del aprendizaje del álgebra. Todo lo que te aconteció a nivel cognitivo y subjetivo resultará importante, sin embargo, a modo de sugerencia, puedes tomar en cuenta para guiarte: uso e interpretación de los símbolos matemáticos, razonamiento algebraico (abstracción) uso del lenguaje oral, escrito y gráfico; empleo de metáforas y analogías, resolución de problemas, etc.

Se trataba de apreciar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra universitaria desde la perspectiva de los participantes, con la expresa intención de acumular evidencias relativas a sus puntos de vista acerca de los conceptos, objetos y procesos algebraicos estudiados, tomando en cuenta sus reflexiones y experiencias personales vivenciadas durante el curso (González, 1998). En total se obtuvieron 30 diarios de clase de estudiantes.

En cuanto al diario de campo del profesor, quien ejerció simultáneamente las funciones de mediador de la disciplina e investigador, se trató de un registro, día tras día, de lo que, en su carácter de observador participante, conseguía percibir de las actuaciones de los estudiantes durante el desarrollo de la asignatura, tanto en las actividades sincrónicas, presenciales, en el aula de clases, como de las asíncronas, no presenciales, fuera de ella. Las anotaciones consignadas por el profesor en su diario estaban referidas a cuestiones observadas directamente por él, que le parecían significativas y, también, sus reflexiones sobre el desenvolvimiento del estudio, dado que como

pesquisador cualitativo, él constituía el dispositivo principal de su propia investigación (González, 2020, p. 6)

4 Análisis de la Información

Para analizar la información contenida en los 30 diarios de clase producidos por los estudiantes, se implementó un procedimiento que fue desarrollado en los tres momentos que se describen a continuación.

Durante el *Momento I*, correspondiente a la *Organización de la Información*, se pusieron en práctica los siguientes procesos

- I. *Lectura Preliminar*: cada uno de los diarios fue leído en su totalidad sin intervención alguna de parte del investigador; la finalidad de esta lectura fue familiarizarse con el contenido consignado por cada estudiante en su respectivo diario.
- II. *Re-escritura*: utilizando el Word como editor de texto, cada uno de los diarios fue transcrito a un formato digital para facilitar su manejo.
- III. *Ajustes formales*: en cada diario se hicieron correcciones de aspectos formales como, por ejemplo, errores ortográficos cometidos por los estudiantes.
- IV. *Estandarización*: a todos los diarios les fue dado un diseño uniforme en cuanto a tipo y tamaño de letra, tamaño de página, paginación entre otros detalles de formato; el contenido fue conservado en su totalidad.
- V. *Organización del corpus*: todos los diarios fueron reunidos en un libro único; para registrarlos y facilitar su ubicación, a cada diario le fue asignado un código de la forma DN°-XY; en esta codificación los números (N°) van desde el uno (1) hasta el treinta (30) y fueron asignados al azar, mientras que las letras son las iniciales del nombre y apellido del autor. Esto permitió identificar inequívocamente cada diario.
- VI. *Inserción de comentarios*: luego de digitalizados y agrupados en un libro, con la ayuda del editor de texto (Word), en cada diario fueron incluidos comentarios relacionados con aspectos considerados significativos por el investigador.
- VII. *Síntesis integrativa*: con el fin adquirir una visión global de todos los diarios, fue diseñada una matriz en la que fueron sintetizados los siguientes aspectos descriptivos: a) Número (N°) del diario; b) Turno (mañana (M) o tarde (T)); c) Cantidad de páginas; d) Estructura; y, e) Observaciones generales.
- VIII. *Elaboración de la matriz “Diario – Clase”*: Para apreciar la representación de las 42 clases en los 30 diarios, se elaboró una matriz de orden 30x42. En la primera columna, ordenados de forma ascendente, se ubicaron los códigos asignados a los 30 diarios (D_i , con $i = 1, \dots, 30$) y en la primera fila, también ordenados en forma ascendente, se ubicaron los códigos asignados a las 42 clases (C_j , $j = 1, \dots, 42$). Para elaborar esta matriz, se revisó minuciosamente cada diario; si el autor hacía referencia a una determinada clase, se marcaba una equis (X) en la celda resultante de la intersección de la fila del diario (D_i) con la columna de la clase correspondiente (C_j). El proceso terminó cuando se agotaron los diarios. En la matriz fueron omitidas las columnas correspondientes a las clases números 7, 8, 12, 13, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 36 y 39 que no fueron realizadas por diversos motivos. Así mismo, las filas correspondientes a los diarios D_1 , D_2 , D_{37} , D_{50} y D_{52} están vacías pues, de acuerdo al análisis preliminar de sus contenidos, la información arrojada resultó insuficiente, razón por la cual se decidió no considerarlos.

En el *Momento II* se realizó una *caracterización preliminar de las clases*; para ello fueron identificados los episodios y las acciones ejecutadas por los estudiantes durante el

tiempo de la clase. Los procesos implementados durante este momento, implicaron la lectura de todos los diarios que hacían referencia a una determinada clase. El proceso consistía en fijar una columna Cj y e interceptarla con la fila Di del diario que la menciona. Una vez detectado el número del diario (Di) que describía la clase Cj, ésta era ubicada en el libro y se procedía a leerla, tratando de identificar los episodios y las acciones referidas a los momentos de entrada, desarrollo y cierre de la respectiva clase; para esto, se puso en juego un proceso de captación de regularidades y patrones, lo cual es propio al pensamiento algebraico. Si alguna frase, afirmación, o cualquier idea del autor del diario resultaba significativa para el investigador, se accedía al documento digital correspondiente y se copiaba la frase textual. Una vez agotada la lectura y la revisión, se repetía el proceso con el siguiente diario, hasta completar el último de la columna fijada. Luego se continuaba con la siguiente columna para la descripción de la próxima clase.

Eventualmente, se presentaron discrepancias en cuanto a las circunstancias de la clase registrada o relacionadas con la precisión temporal de algún hecho particular o suceso cualquiera durante el desarrollo de la fase de campo de esta investigación (las sesiones de clase desarrolladas en el curso). Cuando ocurrió esta situación, se procedió a una revisión de todos los diarios, y tomando en cuenta un criterio de tipo frecuencial, se asignó su fecha de acaecimiento.

Durante el *Momento III*, fue cuando se elaboró para fines organizativos e interpretativos, el *esquema reestructivo del discurso del aula*. Para ello, se siguió una estrategia similar a la puesta en práctica por González (1998); por ello, se tomaron en cuenta las siguientes herramientas analíticas: (a) línea del tiempo; (b) esquema reestructivo del discurso del aula, todo lo cual condujo a lo que sería la trayectoria del curso (administración de la asignatura Álgebra Lineal a los estudiantes que conformaron la Sección 511 y cuyos diarios fueron seleccionados) a lo largo del tiempo; es decir su (c) cronogénesis, es decir, la descripción pormenorizada de todo lo acontecido entre la primera y última clase; sin embargo, fue más que eso pues finalmente permitió dar respuestas a las dos primeras preguntas de la Investigación. También se subdividió el trabajo de campo en cuatro fases, tomando en cuenta los momentos destinados para las evaluaciones, pues éstas marcaban un hito en el devenir del Curso.

La línea del tiempo constituye un resumen de los aspectos más resaltantes acontecidos en cada una de las clases, permitió el reconocimiento de regularidades y semejanzas las cuales, luego de un proceso continuo de análisis fenomenológico e interpretativo, se formalizaron mediante el establecimiento de categorías que generalizan la descripción de cada uno de sus distintos momentos (inicio, desarrollo y cierre); con estas categorías definidas se diseñó el esquema reestructivo del discurso del aula el cual se muestra en el Cuadro 1; y, finalmente, con la ayuda de esta herramienta analítica, se reconstruyeron las cuarenta y dos clases, obteniéndose así la cronogénesis del curso.

Cuadro 1: Esquema Reestructivo del Discurso del Aula

INTRODUCCIÓN	
Episodio	Descripción
1.1 Preparación del ambiente afectivo	Saludos, palabras motivacionales, comentarios generales
1.2 Revisión de responsabilidades	Recordatorio de tareas
1.3 Preparación logística	Verificación de las herramientas de trabajo: (a) Presencial: Libros que facilita el docente, algunos solicitados por los estudiantes, otros suministrados para

	fotocopiar una sección o tema específico; suministro de material <i>ad-hoc</i> elaborado por el docente (b) Virtual: Balance de lo acontecido en el aula virtual
DESARROLLO	
2.1 Empalme teórico pertinente y táctico	Retomar aspectos claves de la clase anterior para abordar la nueva clase, puede ser un ejemplo, una pregunta formulada (docente o estudiante), un problema, una definición o un teorema. O, cualquier contenido previo de cualquier área.
2.2 Refinamiento del lenguaje	Ajuste del lenguaje oral y escrito: Se hace tomando en cuenta las participaciones, tanto teóricas en las intervenciones orales de los estudiantes en las discusiones de los contenidos; así como sus aportaciones prácticas en el pizarrón. También se consideran aquí las distintas reflexiones acerca de los símbolos que se emplean en álgebra, destacando su naturaleza mediadora e instrumental; enfatizando su diferencia con el objeto algebraico. Se emplea el recurso de analizar lo que <i>se dice sin decir</i> y lo que <i>no se dice diciendo</i>, es decir el estudio de lo implícito, explícito y lo subyacente del discurso específico (es decir el discurso presente en la teoría que se discute). Tiene que ver con la precisión de las definiciones (buenas definiciones); manejo de las condiciones necesarias y suficientes de un teorema (en algunos casos está la presencia de una hipótesis general y una específica)
2.3 Resolución de problemas y ejercicios	Planteados directamente por el docente, y otros aportados por los estudiantes. O, luego de una evaluación escrita. En algunos casos, los resuelve el docente en interacción constante con los estudiantes; en otros, son los mismos estudiantes que solicitan expresamente la intervención.
2.4 Discusión, análisis y reflexión teórica	Exposición de los contenidos directamente por del docente, mediante escritos en el pizarrón, o lectura de un material por el docente y/o algún estudiante. Exposición de demostraciones
2.5 Incertidumbre inducida	Preguntas o comentarios cuya naturaleza requiere una reflexión profunda. Se pone en duda la teoría mediante aparentes vacíos en ella, ejemplos que parecen negarla. Se crea una atmósfera de silencio, de cavilación. Se incluye aquí el debilitamiento de condiciones de un teorema o de una definición mediante preguntas como: qué pasa si...? (cambiando, quitando o poniendo una condición)
2.6 Planteamiento de metáforas	Metáforas orales y gráficas relacionadas con el contenido que se discute. O, luego de la incertidumbre inducida

2.7 Consulta y despeje de dudas	Luego de una exposición directa o de la resolución de un problema o ejercicio. O, luego de un período de incertidumbre inducida
CIERRE	
3.1 Balance teórico y práctico	Resumen estratégico de lo dicho por el docente y por los estudiantes, selección de especie de “palabras claves”
3.2 Gestión del Curso	Repaso del desarrollo del plan de evaluación, los lapsos temporales del período académico
3.3 Asignación de responsabilidades	Asignación de lecturas, problemas y/o ejercicios
3.4 Puesta en perspectiva	Palabras: de aliento, de ánimo y de despedida

Fuente: Datos de la Investigación

5 Hallazgos

A partir del análisis e interpretación del contenido de los diarios fueron construidas las categorizaciones teóricas que son expuestas a continuación.

Tipos de lectura realizadas por los estudiantes — Pudo ser apreciado que los estudiantes realizan dos tipos de lectura de los materiales documentales con contenido algebraico; la primera es una lectura literal (*LL*), necesaria pero insuficiente, y otra que la trasciende que hemos denominado lectura algebraicamente significativa (*LEAS*).

Lenguaje Oral de los estudiantes — En relación con el lenguaje oral de los estudiantes, fue apreciada una modalidad identificada como expresión oral algebraicamente significativa (*EXOAS*); ésta es de naturaleza compleja y se desenvuelve a través de un proceso lento y gradual y junto con la *LEAS*, conforman lenguaje algebraicamente significativo (*LAS*).

Lenguaje algebraicamente significativo (LAS) — Producto del análisis de los diarios identificamos la presencia de un tipo de lenguaje que hemos denominado *lenguaje algebraicamente significativo*, (*LAS*), el cual se manifiesta mediante dos actividades: (a) *Lectura algebraicamente significativa (LEAS)* y (b) *Expresión oral algebraicamente significativa (EXOAS)*.

Metáforas algebraicamente significativas (METAS), asumidas como medio para expresar la comprensión de un concepto algebraico a partir de su parentesco, explícito, aparente o supuesto con otro concepto, matemático extra-matemático.

Tomando como referencia a Chumaceiro y Pérez (2011), asumimos la lectura como un proceso complejo, dinámico e interactivo; estos autores afirman que leer no constituye una simple

descodificación de signos, ni de transferencia de información desde la letra impresa a la memoria del lector. Leer es una forma de pensar, que se pone en marcha a partir del texto materializado. Supone una contribución activa del lector, quien apoyado en su propia experiencia cognoscitiva y en la aplicación de un conjunto de operaciones mentales complejas, debe llenar los vacíos de sentido que el texto le plantea y establecer nuevas relaciones con base en la información que ha extraído. Leer es, pues, en una primera aproximación, extraer y construir significado en la interacción con el texto (Chumaceiro & Pérez, 2011, p. 46)

La *lectura algebraicamente significativa* (González & González, 2024), no se realiza desagregando partes, sino mediante la integración y globalización, supone que el todo, que es la comprensión de lo que subyace en la simbolización, es mucho más que la suma aislada de las partes, ya que esto último implica una decodificación desconectada de cada una de las partes de los signos y símbolos. Es decir, *LEAS* es una opción trascendente ante la lectura literal (*LL*), es decir, al nivel inicial de lectura, en el cual el lector solamente decodifica los signos usados en el escrito que está siendo leído, sin adentrarse en su sentido ni en sus significados, es lo que **Cassany** (2012) denomina “leer las líneas”; sin embargo, *LEAS* no niega la *LL* ya que, en la práctica, el primer contacto del discente con el simbolismo es a través de una *LL*.

Desde el punto de vista didáctico, de modo análogo a como ocurre con el aprendizaje de la lectura en los primeros niveles de escolaridad, esta lectura algebraicamente significativa pasa por una fase retórica, semejante a la lectura en voz alta, denominada *expresión oral algebraicamente significativa*, que, luego de haber sido comprendida cabalmente, debe conducir a otra fase superior como es la lectura sin pronunciación; es decir, una lectura silenciosa que no va acompañada de oralidad ninguna; ésta ocurre cuando el lector realiza la lectura sin pronunciar palabras, como la que hacen los expertos. Esta expresión oral algebraicamente significativa es la puesta en práctica de la verbalización para comunicar ideas algebraicas, o sea, con contenidos algebraicos; en consecuencia, puede ocurrir como resultante de la puesta en práctica de *LEAS*, aunque también puede darse sin ella.

Para ejemplificar, creemos que las primeras lecturas (*LL*) que se hacen del símbolo $p \rightarrow q$ (por ejemplo, “ p implica q ”) son necesarias en un primer momento, pero no son suficientes. Esta forma trascendente de leer que hemos identificado no niega aquellas lecturas iniciales, sino que las incluye, porque las siguientes son otras lecturas válidas para este símbolo: “ q si p ”, “ q es una condición necesaria para p ”, o “ p es hipótesis y q es tesis”, etc. En el Cuadro 2, mostramos un ejemplo más concreto de aplicación de la *LEAS*, considerando el siguiente enunciado proposicional: *Si el entero c es raíz de f entonces c divide al término independiente de f* extraído del diario de AH (participante del curso).

Cuadro 2: Comparación entre *LL* y *LEAS* mediante la expresión $p \rightarrow q$

Lectura que plantea AH (<i>LEAS</i>)	Otras lecturas válidas
<i>Es necesario que c sea divisor del término independiente para que c sea una raíz del polinomio</i>	<i>c es raíz de f es la hipótesis, y la tesis es que c divide al término independiente de f</i>
	<i>c es raíz de f implica que c divide al término independiente de f</i>
	<i>c es raíz de f es el antecedente y c divide al término independiente de f es el consecuente</i>

Fuente: Datos de la Investigación

En la fila superior se muestra la proposición. En el contexto del aprendizaje de los polinomios un problema que ocurre con frecuencia está asociado con la pregunta: *¿cuáles son sus raíces?* En este caso, una manera de acceder al contenido de este símbolo (lo que el participante AP identifica con “*lo que nos quiere decir este ejercicio*”) es a través de la otra lectura basada en la identificación de las condiciones necesaria y suficiente, por lo que esta *LEAS*, en la columna de la derecha, se ve como una herramienta que mejora las lecturas plasmadas en la columna de la izquierda.

Otro hecho que no debe pasar inadvertido, en los tres comentarios anteriores, es que la *LEAS* develada en la expresión $p \rightarrow q$ se efectuó de derecha a izquierda, lo cual es un cambio en la manera usual de leer. Otro ejemplo de este cambio de orientación, mediante *LEAS*, se obtiene considerando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$, la cual puede ser leída verbalmente de izquierda a derecha como es lo usual, empleando, por ejemplo, las expresiones *a lo sumo*, *no sobrepasa*, etc. En este caso diremos, el valor absoluto del producto interno de dos vectores es, a lo sumo, el producto de las normas de cada uno de los dos vectores. Otra forma de leerla, menos usual, a través de *LEAS*, es de derecha a izquierda, enunciándola oralmente así: el producto de las normas de dos vectores es al menos (o por lo menos) el valor absoluto del producto interno de los dos vectores, etc. En el Cuadro 3 se compara la práctica de una *EXOAS* con otras dos expresiones que no lo son.

Cuadro 3: Comparación de uso de una *EXOAS* con otra expresión

EXOAS	OTRAS EXPRESIONES
<i>Aprendí que cada vez que tengamos $dF[x]$ no vamos a decir que “d por $F[x]$”, sino que se refiere a todos los múltiplos de d (GT)</i>	<i>Las matrices en general no son conmutativas (AH)</i> <i>Los polinomios en realidad son estructuras algebraicas (AH)</i>

Fuente: Datos de la Investigación

En la columna derecha se le atribuyen, respectivamente, a las matrices y polinomios las condiciones de ser *conmutativas* y de *estructura algebraica*. La primera, es una condición específicamente de una operación; mientras que la segunda, le corresponde a los conjuntos. En consecuencia, dichas expresiones carecen de significado; por lo tanto, no son representativas de una *EXOAS*.

En resumen, el *lenguaje algebraicamente significativo (LAS)* está constituido por: *lectura algebraicamente significativa (LEAS)* y la *expresión oral algebraicamente significativa (EXOAS)*. El primer caso, es un tipo de lectura que se hace de los símbolos algebraicos en la cual éstos son llenados de significados contextuales y precisos. El segundo, consiste en la comunicación efectiva de ideas algebraicas mediante la lengua hablada. Si en el primero la lectura es con pronunciación se convierte en *EXOAS*, pero puede suceder que se realice en forma silenciosa, leyendo e interpretando los símbolos de forma individual por las personas. En el Cuadro 4 se hace un resumen comparado de ambas modalidades de lecturas del lenguaje algebraico.

Cuadro 4: Comparación entre LL y LEAS

Lectura literal/lineal (LL)	LEAS
Ambiguo	Dinámica
Énfasis en la forma	Flexible
Rigidez –estática (sintáctica y semántica)	Énfasis en el fondo
Lectura direccionada, generalmente de izquierda a derecha	Expresivamente rica, buen desempeño ante la sinonimia y la polisemia
Se vincula con el anclaje contextual (Romero, 2009)	No hay sentido predefinido en la lectura

Pobreza discursiva (sin desplazamiento por la sinonimia y la polisemia)	Se vincula con el enriquecimiento conceptual progresivo (Arana y González, 2006)
Desconoce el SMS	Enriquece el SMS

Fuente: Datos de la Investigación

Para finalizar esta sección, creemos que la descripción que se ha hecho del lenguaje algebraicamente significativo (*LAS*) puede enmarcarse en el punto de vista metafórico que considera la matemática como un lenguaje, dicha asociación ha sido asumida por diversos autores (Pimm, 2002; Rojano 1994, Freudenthal, 1983; Papini, 2003) y fue nuestro soporte para la construcción de *LAS*.

Por su parte, las *metáforas algebraicamente significativas (METAS)*, en términos de Lakoff y Núñez (2000), permiten comprender un contenido en términos de otro. Aquí ubicamos la *imagen algebraicamente significativa (IMAS)*, y lo que conceptualizamos como *casos extremos*.

Las imágenes algebraicamente significativas (*IMAS*) vienen dadas por todos los gráficos, dibujos y esquemas realizados en el pizarrón, así como todos los gestos corporales o con ayuda de un material concreto, además de las metáforas verbales puestas en práctica por el docente como recursos al momento de la enseñanza del álgebra lineal. Por ejemplo, en nuestro caso era usual dibujar el espacio vectorial como un óvalo (vertical), mientras que el cuerpo lo representaba como con rectángulo cuyo lado más largo estaba en posición vertical, los vectores eran marcadores, borrador, etc.; mientras que el producto interno era una “especie de máquina” (*metáfora “grounding”*, según Lakoff y Núñez, 2000) que transformaba pares de vectores en elementos del cuerpo. Con las manos y brazos, “escenificaba” el movimiento de la máquina, mientras que el lenguaje verbal empleado era totalmente metafórico.

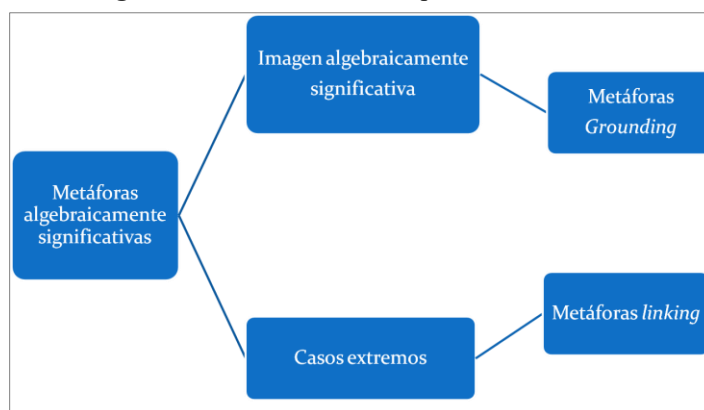
En las *METAS*, lo que identificamos como *casos extremos* son objetos particulares o abstractos que, al aplicarles una determinada propiedad, pueden arrojar resultados no esperados o, en cierta manera, pueden sorprender, varían de acuerdo con el tema que se estudia; además, puede significar una especie de delimitación del ámbito abstracto sin salirse de él. Por ejemplo, si lo que se analiza guarda relación directa con la definición de espacio vectorial, los casos extremos pueden ser el espacio nulo, $\{0\}$, y el espacio en su totalidad, V ; cuya existencia siempre se puede suponer sin necesidad de precisar un espacio concreto. En otros contextos, como la teoría de conjuntos, los *casos extremos* podrían ser el conjunto vacío, un conjunto unitario y el conjunto universal.

Estos *casos extremos* incluyen los casos particulares; situación en la cual sí es necesaria la presencia de referentes concretos; en estas circunstancias, se estudia el objeto tomando en cuenta su transformación (lo que le ocurre) cuando se hace específico en uno o más espacios conocidos como pueden ser, por ejemplo, en el espacio de las matrices reales $R^{2 \times 2}$; en éste, los *casos extremos* mencionados en el párrafo anterior se convierten en los *casos extremos particulares* $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ y $R^{2 \times 2}$.

De acuerdo con lo expuesto en los dos párrafos anteriores, interpretamos los casos extremos como un tipo de metáfora fundamentalmente conceptual que Lakoff y Núñez (2000) denominan metáfora “*linking*”; tal como la interpretamos en este estudio, son aplicaciones de las propiedades, o de la teoría, a elementos considerados como “destacables”, “notables” o “relevantes”, por la forma o la transformación que adquieren mediante esta aplicación. Usando un lenguaje sencillo, podría decirse que el caso extremo es un *caso particular de*

particularización. Por ejemplo, al estudiar las transformaciones lineales, los casos extremos podrían ser la transformación nula o la transformación identidad; todo el espacio vectorial es un caso extremo de un conjunto linealmente dependiente. Pueden emplearse para la construcción y formulación de preguntas tales como: ¿bajo qué condiciones un vector es ortogonal consigo mismo? ó ¿cuál vector de un determinado espacio es ortogonal a todos?, etc. En la Figura 1 se representa la ubicación conceptual que hacemos de las metáforas algebraicamente significativas, basándonos en Lakoff y Núñez (2000).

Figura 1: Identificación conceptual de las METAS

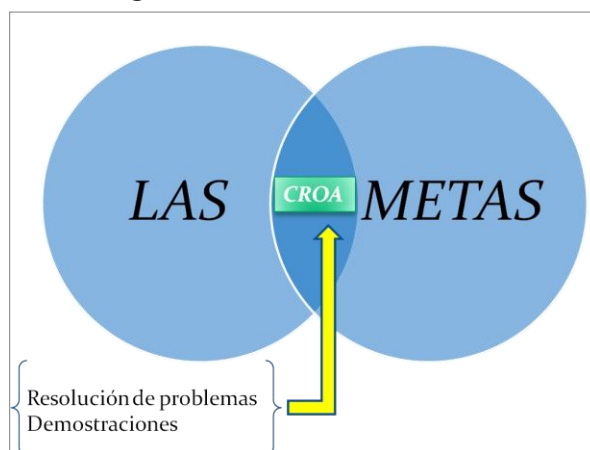


Fuente: Elaboración Propia

6 Propositiones

Construcción Relacional del Objeto Algebraico (CROA). En las secciones precedentes, presentamos descriptivamente nuestras ideas definitorias emergentes en relación con el lenguaje algebraicamente significativo (LAS) y las metáforas algebraicamente significativas (METAS). Los hallazgos nos muestran que, como consecuencia de una estratégica, consciente, sistemática y organizada ocurrencia simultánea de ambos constructos, el objeto algebraico se hace ostensible, comprensible y, en consecuencia, aprehensible para el discente. Esta emergencia del objeto la hemos denominado *Construcción Relacional del Objeto Algebraico (CROA)* la cual ocurre, como se ha dicho, en un contexto en el que se funden estratégicamente LAS y METAS. Eso significa que la CROA consiste en la develación, emergencia o aprendizaje de un objeto algebraico mediante la conjunción del lenguaje algebraicamente significativo y las metáforas algebraicamente significativas (ver Figura 2).

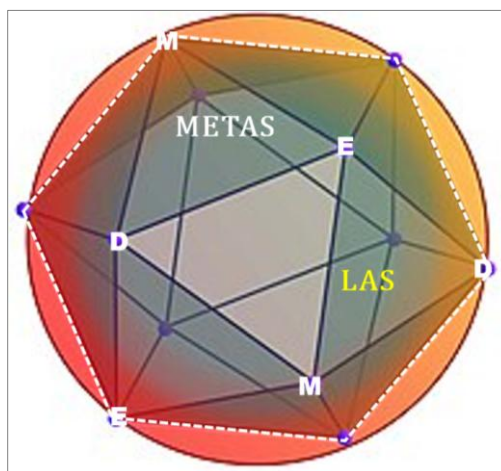
Figura 2: Visualización de la CROA.



Fuente: Elaboración Propia

Desde un punto de vista sistémico, la *CROA* es una estrategia cognitivo-lingüística para desarrollar el pensamiento algebraico. Constituye un modelo didáctico que integra los conceptos que hemos desarrollado en el estudio; es concebida como un sistema abierto, dinámico y complejo; dadas las gradaciones intersubjetivas que se manifiestan podemos visualizarla como un espectro de ilimitadas interacciones comunicativas (Figura 3) entre el docente, los estudiantes y los materiales instruccionales; es decir, las metáforas algebraicamente significativas y el lenguaje algebraicamente significativo se conjugan multidireccionalmente, docente-estudiantes, estudiantes-estudiantes, estudiante-material, docente-material y estudiantes-docente, en distintos momentos, con diferentes niveles de énfasis y de duración.

Figura 3: Espectro del sistema comunicacional que hace posible la *CROA*.



Docente (D); Materiales (M); Estudiantes (E);
Metáforas Algebraicamente Significativas (METAS);
Lenguaje Algebraicamente Significativo (LAS)

Fuente: Elaboración Propia.

Pudo ser observado que, durante las actividades de enseñanza puestas en juego en el desenvolvimiento del estudio, tuvo lugar una multiplicidad de interacciones entre los diferentes actores: docente, D; estudiantes, E; y materiales, M (aquí se incluyen las sugerencias, orientaciones y esclarecimientos que, eventualmente, los estudiantes compartían). Así, en cada situación podían ser apreciadas interacciones tales como E-D (estudiante comenta o pregunta al docente; D-E (docente da instrucciones a los estudiantes); E-E (estudiantes interactúan entre sí para resolver un problema); E-M (los estudiantes estudian los textos indicados por el docente); D-M (docente realiza una explicación sobre las acciones que los estudiantes deben ejercer sobre el material). En cada uno de los modos como se dan estas relaciones, tiene lugar una acción comunicativa, la cual se expresa lingüísticamente mediante el *LAS*, cuyo contenido recurrentemente tiene carácter metafórico, dando lugar a las *METAS* (ver Figura 3).

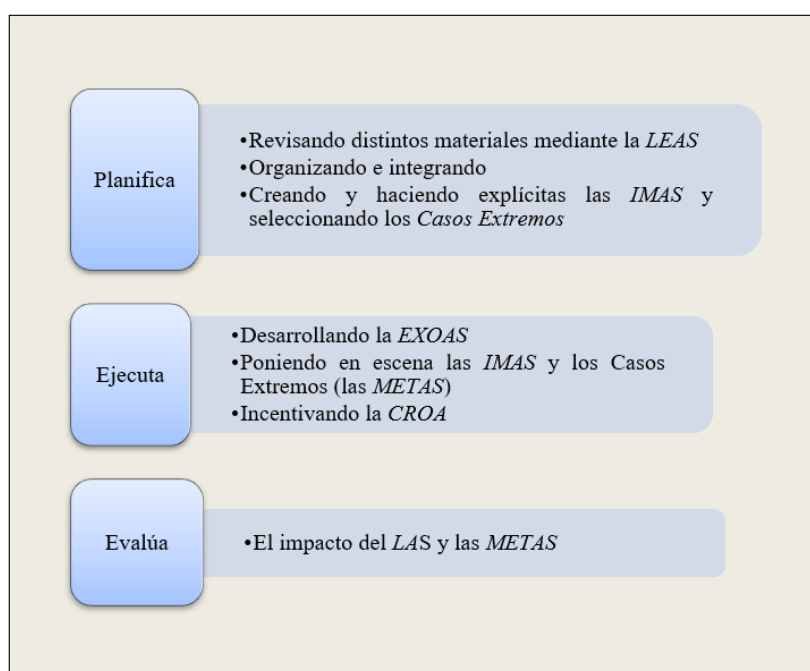
Por otro lado, se supone que cuando un docente administra un determinado curso de álgebra orientado al desarrollo del pensamiento algebraico, ya ha desarrollado un lenguaje algebraicamente significativo. Para él, la lectura algebraicamente significativa (*LEAS*) y la expresión oral algebraicamente significativa (*EXOAS*), en forma casi natural, han de ser sus principales herramientas de trabajo. Por ejemplo, aplica la *LEAS* cuando efectúa la revisión de las distintas fuentes (impresas y electrónicas) para la planificación de sus clases. En este proceso, lo más probable es que se hagan presentes distintas maneras de presentar los contenidos por los diversos autores, por lo que sólo mediante esta manera de procesar la lectura es posible alcanzar una síntesis. En algunos casos, ésta se manifiesta mediante la producción de materiales (guías, presentaciones, etc.) como recursos para la enseñanza. Durante esta

sistematización, mediante un proceso imaginativo el docente crea las *IMAS* y selecciona convenientemente los casos extremos que va a considerar y las técnicas didácticas bajo las cuales las va a poner en escena.

Por otra parte, la *EXOAS* es necesaria para la exposición de los contenidos. No sólo debe conservar la rigurosidad de los planteamientos, sino que, asumiendo dicha rigurosidad, debe ser abundante en expresiones lingüísticas para integrarla con el lenguaje natural para, de este modo, obtener el mayor provecho para propiciar la comprensión de sus estudiantes.

En este sentido, un aspecto que debe ser destacado es la necesaria conciencia del docente en cuanto a la presencia de términos del lenguaje natural que tienen connotaciones distintas a las que le son atribuidas en la enseñanza de un contenido algebraico particular. En torno a esto último, y a manera de ilustración, puede servir el caso del uso del verbo unir (o reunir), tanto en el lenguaje natural como en el algebraico. También, es importante distinguir entre los frecuentes y variados usos metafóricos de los vocablos. En Figura 4 se muestra una síntesis de las actividades que un docente debe llevar a cabo si pretende desarrollar el pensamiento algebraico de sus estudiantes mediante el empleo de la *CROA*.

Figura 4: Actividades de un docente de matemática que se orienta al desarrollo del pensamiento algebraico mediante *LAS+METAS*



Fuente: Elaboración Propia

Otro de los aspectos que se logró clarificar mediante la investigación, se refiere al papel que debe desempeñar el estudiante durante su aprendizaje del Álgebra. En efecto, para el estudiante que aspira aprender álgebra, el desarrollo del *LAS* debe ser un objetivo explícito a ser alcanzado; por una parte, la Lectura Algebraicamente Significativa (*LEAS*) puede desarrollarla a partir de la lectura natural de los materiales propios, diseñados por el docente, o directamente de las fuentes originales. Inicialmente, una manera de lograrla es incentivando la lectura en voz alta, seguida por la retroinformación de los compañeros y el docente.

El proceso dinámico mediante el cual se puede alcanzar la *LEAS* es sistemático mas no continuo, pues presenta interrupciones naturales. Tal proceso se activa cuando el estudiante, de manera sistemática y consecutiva: (a) hace la lectura (convencional) de alguno de los

contenidos; (b) realiza un parafraseo (el decir con sus propias palabras); y, (c) toma en cuenta la retroinformación suministrada por el docente (con o sin la participación del resto de los estudiantes), tomando en cuenta no sólo aquellos aspectos que resultaron positivos, sino considerando la enmienda de aquellos que deben ser mejorados.

7 Consideraciones Finales

Nuestros argumentos están contextualizados en el pensamiento algebraico, y más particularmente, focalizados en el lenguaje algebraico. Transcurrieron muchos siglos desde que, luego de la crisis generada por la aparición de segmentos inconmensurables, los griegos instauraron la geometría como un ambicioso programa que incluía un lenguaje de tipo geométrico que intrínsecamente validaba todas las construcciones y el hacer matemática. Esta epistemología se mantuvo vigente pese, al trabajo de Diofanto, hasta que F. Viete (s XVI) estableciera la distinción entre incógnita y parámetro. Este movimiento audaz permitió que el álgebra progresivamente fuera ganando un espacio propio, ya que su lenguaje mecanizaba —y por ende flexibilizaba— los razonamientos, al permitir operar con los símbolos como si fuesen los propios objetos matemáticos. En el siglo XIX, otra crisis desencadenada por la aparición de las geometrías no euclidianas dio el empuje necesario para que el lenguaje algebraico se convirtiera en el lenguaje específico de todas las matemáticas, consolidándose su papel fuera del ámbito del álgebra.

En la actualidad, toda la enseñanza de la matemática se lleva a cabo mediante la concurrencia del lenguaje natural y el lenguaje algebraico; ello motivó nuestro interés en indagar en torno a la enseñanza del álgebra universitaria para futuros educadores matemáticos. Mediante la observación e identificación de regularidades en este contexto, conjuntamente con el empleo de las metáforas, tal como es conceptualizada y descrita por los autores citados, pudimos elaborar los constructos que presentamos de forma transversal en este artículo.

Luego de la lectura literal de los símbolos, LL, proponemos la *Expresión Oral Algebraicamente Significativa*, EXOAS, y la *Lectura Algebraicamente Significativa*, LEAS; de esta manera, conformamos el lenguaje algebraicamente significativo, LAS. Con esta última caracterización del lenguaje creemos en la posibilidad de avanzar en el enriquecimiento lingüístico acerca de la naturaleza y propiedades de los objetos algebraicos. En particular, destacamos la importancia del lenguaje verbal, la oralidad, contra el hábito del aprendizaje silencioso que ha prevalecido. Esta descripción que hemos hecho del LAS está en correspondencia con el punto de vista metafórico que considera la matemática como un lenguaje, cuya asociación ha sido asumida por algunos autores (Pimm, 2002; Freudenthal, 1983).

También, este uso metafórico nos ofreció la oportunidad de elaborar una caracterización sobre como el discente se apropia de los objetos algebraicos, sus propiedades, y consecuentemente avanza en la resolución de problemas y en las demostraciones; a ese proceso lo denominamos *Construcción Relacional del Objeto Algebraico*, CROA, el cual tiene lugar en la intersección de LAS y METAS. En consecuencia, creemos que la enseñanza del álgebra universitaria para docentes puede considerar esta construcción entre sus objetivos.

Finalmente, creemos que a través del LAS podemos explicar algunos abusos notacionales (llamados también abusos del lenguaje), así como también muchas de las situaciones que emergen del hecho de que el lenguaje natural sea un metalenguaje en la enseñanza de la matemática. Además, es posible sacar provecho conscientemente del papel de las metáforas en este ámbito. Por ejemplo, en una definición o teorema es posible identificar sujetos (con sus adjetivos) y predicados (con sus correspondientes adverbios). Así, en un

teorema podemos emparejar sujetos con los objetos matemáticos involucrados, y el adjetivo con su especificidad contextual; mientras que el predicado es posible relacionarlo con lo que se afirma de tales objetos y sus consecuencias también caracterizadas contextualmente (adverbio). De lo que se trata, como puede verse, es que es posible el diseño de investigaciones en la educación matemática que consideren y validen este punto de vista.

Referencias

- Arana, A. & González, F. (2006). Enriquecimiento conceptual progresivo: Una explicación teórica del proceso de desarrollo de los conceptos científicos. *Revista de Pedagogía*, 27(79), 193-230. https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922006000200002&lng=es&tlng=es
- Cassany, D. (2012). *En línea. Leer y escribir en la red*. Anagrama.
- Chumaceiro, I. & Pérez, M. L. (2011). La literatura como puente para la lectura. In A. Bolívar & R. Beke (Comp.), *Lectura y escritura para la investigación* (pp. [page range]). Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela.
- Corbetta, P. (2003). *Metodología y técnicas de investigación social*. McGraw-Hill.
- Drouhard, J. P. (2009). Epistemography and algebra. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 479-488). https://www.academia.edu/66520299/Proceedings_of_the_Sixth_Congress_of_the_European_Society_for_Research_in_Mathematics_Education
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 1, pp. 3-26.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME*, 9(1), 143–168.
- Duval, R., & Moretti, M. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 266-287. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>
- Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática* (H. H. Domínguez, Trans.). UNICAMP Editora.
- Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido*. Siglo XXI Editores.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.
- González, A. (2015). *Procesos del pensamiento algebraico en entornos de aprendizaje mediados tecnológicamente* [Doctoral dissertation, Universidad Central de Venezuela].
- González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en Humanidades*, 6(1), 37-80. https://www.researchgate.net/publication/28111875_Algunas_cuestiones_basicas_acerca_de_la_ensenanza_de_conceptos_matematicos
- González, F. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de matemática. *Sapiens*, 11(1), 47-59. <https://biblat.unam.mx/hevila/Sapiens/2010/vol11/no1/3.pdf>

- González, F. E. (1998). Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos. *Educación Matemática*, 10(3), 172–181. <https://doi.org/10.24844/em1003.12>
- González, F. E. (2020). Reflexões sobre alguns conceitos da pesquisa qualitativa. *Revista Pesquisa Qualitativa*, 8(17), 155–183. <https://doi.org/10.33361/RPQ.2020.v.8.n.17.322>
- González R., A. A. & González, F. E. (2024). Lenguaje Algebraicamente Significativo en el Aprendizaje del Álgebra Universitaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 38, e220187. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a220187>
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metáforas de la vida cotidiana*. Teorema.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Maturana, H. (2006). Ontología del conversar. In J. Luzaro García (Comp.), *Desde la biología a la psicología* (pp. 84-95). Editorial Universitaria.
- Maturana, H. & Dávila, X. (2018). El lenguaje y el lenguajear. *Matriztica*. https://medium.com/@Matriztica_76766/el-len-guaje-y-el-lenguajear-d40ca92b70e5
- Nesselmann, G. H. F. (1842). *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, Theil 1. Die Algebra der Griechen* [Essay of a critical history of algebra, Part 1. The algebra of the Greeks]. De Gruyter Mouton. <https://doi.org/10.1515/9783111585789>
- Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones Vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 41–71. <https://relime.org/index.php/relime/article/view/554>
- Pimm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula*. Morata.
- Radford, L. (1995a). Before the other unknowns were invented: Didactic inquiries on the methods and problems of mediaeval Italian algebra. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 28–38. <http://www.jstor.org/stable/40248185>
- Radford, L. (1995b). Linking psychology and epistemology: Can the history of mathematics be a useful tool for teaching mathematics? *Proceedings of the Canadian Society for the History and Philosophy of Mathematics*, 8, 328–342. https://www.researchgate.net/publication/283461103_Linking_Psychology_and_Epistemology_Can_the_History_of_Mathematics_Be_a_Useful_Tool_for_Teaching_Mathematics
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 317–327. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3>
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1–19. https://www.luisradford.ca/pub/22_RME2010Algebraicthinkingfromaculturalsemioticperspective.pdf
- Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37–62. https://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf

- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(1), 45-56. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4483>
- Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Eds.). (2001). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study conference*. Kluwer Academic Publishers. <https://archive.org/details/proceedingsof12t0002unse>
- Taylor, S. J. & Bogdan, R. (1984). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación: La búsqueda de significados*. Paidós.
- Ursini, S. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotsky. *Educación Matemática*, 8(3), 42-49. <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/3/05Ursini.pdf>
- Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6 ed.). SAGE.