

Princípio da Indução na Formação Inicial de Professores

Marcos Grilo

Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, BA — Brasil

✉ grilo@uefs.br

🆎 0000-0002-6382-3907

Jaqueline de Souza Pereira Grilo

Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, BA — Brasil

✉ jspgrilo@uefs.br

🆎 0000-0002-0408-047X



2238-0345 

10.37001/ripem.v15i3.4594 

Recebido • 04/05/2025

Aprovado • 31/07/2025

Publicado • 01/09/2025

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: O Princípio da Indução é um método que permite generalizações na teoria dos números naturais e, a partir dele, é possível discutir a noção de infinito em Matemática na educação básica. Dada a importância do referido método, foi desenvolvida uma pesquisa empírica, com o objetivo de identificar conhecimentos especializados sobre o Princípio da Indução, os quais foram apresentados por licenciandos em Matemática. À luz das teorizações sobre o conhecimento especializado do professor de Matemática, os dados foram produzidos a partir de um estudo qualitativo, que adotou como procedimento metodológico a entrevista em grupo e a análise documental. Os resultados apontam que os licenciandos apresentam conhecimentos especializados sobre o método, ao serem capazes de diferenciá-lo da indução empírica. Quanto ao Princípio da Indução na educação básica, o grupo defendeu o uso de materiais manipuláveis e indução empírica, salientando a importância de considerar as necessidades individuais dos estudantes na passagem da Aritmética para a Álgebra.

Palavras-chave: Indução Finita. Indução Matemática. Formação de Professores. Educação Básica.

Principle of Induction in Initial Teacher Training

Abstract: The Principle of Induction is a method that allows generalisations in the theory of natural numbers and, based on it, it is possible to discuss the notion of infinity in Mathematics in basic education. Given the importance of this method, an empirical study was carried out with the aim of identifying specialised knowledge about the Principle of Induction, which was presented by mathematics licentiate undergraduates. In the light of the theories on the specialised knowledge of mathematics teachers, the data was produced from a qualitative study, which used group interviews and document analysis as its methodological procedure. The results show that the undergraduates have specialised knowledge about the method, as they are able to differentiate it from empirical induction. As for the Principle of Induction in basic education, the group defended the use of manipulable materials and empirical induction, emphasising the importance of considering the individual needs of students in the transition from Arithmetic to Algebra.

Keywords: Finite Induction. Mathematical Induction. Teacher Training. Basic Education.

Principio de Inducción en la Formación Inicial de Profesores

Resumen: El Principio de Inducción es un método que permite generalizaciones en la teoría de los números naturales y, a partir de él, es posible discutir la noción de infinito en Matemáticas en la Educación Básica. Dada la importancia de este método, desarrollamos esta investigación empírica con el objetivo de identificar conocimientos especializados sobre el Principio de

Inducción presentados por estudiantes de licenciatura en Matemáticas. A la luz de las teorizaciones sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, los datos se produjeron a partir de un estudio cualitativo que adoptó como procedimiento metodológico la entrevista grupal y el análisis documental. Los resultados indican que los licenciandos demuestran conocimientos especializados sobre el Principio de Inducción al ser capaces de diferenciarlo de la inducción empírica. En cuanto al Principio de Inducción en la Educación Básica, el grupo defendió el uso de materiales manipulativos e inducción empírica, destacando la importancia de considerar las necesidades individuales de los estudiantes en la transición de la Aritmética al Álgebra.

Palabras clave: Inducción Finita. Inducción Matemática. Formación de Profesores. Educación Básica.

1 Introdução

O Princípio da Indução é um método que garante definições e demonstrações na teoria do conjunto dos números naturais (IN). De outro modo, generalizações nos números naturais são permitidas, haja vista que o método pode ser enunciado de duas formas equivalentes:

Princípio da Indução Matemática - seja $P(n)$ uma sentença definida no conjunto dos números naturais, se:

- (i) $P(0)$ é uma sentença verdadeira;
- (ii) Dado n natural, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira;

Logo, a sentença $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

Princípio da Indução Finita - seja X subconjunto de IN , se:

- (i) 0 pertence a X ;
- (ii) Dado n natural, se n pertence a X , então $n+1$ pertence a X .

Então, $X = IN$.

É possível formalizar a teoria dos números naturais de modo construtivo, através da teoria dos conjuntos (Halmos, 1970). Dessa forma, pode-se demonstrar o Princípio da Indução. Outra maneira de formalização é axiomática (Ferreira, 2010; Lima, 1976), comumente adotada nos cursos de formação de professores de Matemática. Nesse caso, toda a teoria dos números naturais pode ser estabelecida a partir dos axiomas de Peano, que, além do Princípio da Indução, possui dois outros axiomas: 1) se dois números naturais são distintos, então seus sucessores são distintos; 2) o zero não é sucessor de nenhum número natural. Na axiomática de Peano, número natural e sucessor são admitidos como termos primitivos.

A indução matemática difere da indução empírica nas ciências naturais. Nesta, parte-se do particular para o geral, de modo que a verificação de fórmulas ou enunciados é realizada a partir do exame de alguns casos particulares. Nesse contexto, cabe destacar que a Matemática utiliza a indução empírica apenas para a elaboração de conjecturas, e recorre ao método axiomático para, por meio da dedução e da indução, definir entes e demonstrar teoremas. Desse modo, a indução matemática é um método que permite definir por recorrência e demonstrar teoremas no campo dos números naturais.

Silva e Savioli (2012) investigaram a compreensão de licenciandos em Matemática

acerca da diferença entre a indução empírica e a indução matemática. Por meio da análise de registros escritos, os autores identificaram que os licenciandos entendem, equivocadamente, a indução empírica e a indução matemática como métodos semelhantes. Com isso, os resultados encontrados por Silva e Savioli (2012) apontaram que os licenciandos aplicam o Princípio da Indução de forma tecnicista, sem refletirem o porquê do método validar generalizações nos números naturais.

Nesse contexto, através da aplicação de uma Engenharia Didática envolvendo sequências de Fibonacci para licenciandos em Matemática, Vieira (2016) investigou, dentre outras questões, a percepção de licenciandos ao definir a sequência de Fibonacci indutivamente. Ainda, Rodrigues, Costa e Custódio (2018) analisaram aspectos da indução empírica e da indução matemática em livros didáticos do nono ano do ensino fundamental.

Pinto, Grilo e Grilo (2020), por sua vez, identificaram a presença de tópicos de Teoria dos Números em livros didáticos. Os autores observaram que os axiomas de Peano aparecem explicitamente no livro didático, em uma linguagem distinta da que é apresentada na Teoria dos Números para a licenciatura em Matemática. Para Pinto *et al.* (2020, p. 69), as duas abordagens, na educação básica e no ensino superior, “têm como objetivo construir uma teoria do Conjunto dos Números Naturais que fundamenta as propriedades de suas operações usuais e da relação de ordem”.

Além disso, Souza e Oliveira (2023) explicitaram que é possível desenvolver, por meio da modelagem matemática, atividades, para estudantes do ensino médio, que envolvam demonstrações com o Princípio da Indução. Segundo Borges (1995, p. 6), “os métodos de indução e dedução atingem na Matemática a sua plenitude. As operações mentais de análise, síntese, abstração e generalização surgem naturalmente em cada página de um livro de Matemática”. Para o autor, tal afirmação dá margem à pergunta: “quais as implicações de tudo isso na formação de um professor de Matemática?” (Borges, 1995, p. 6).

Nessa direção, propomo-nos a identificar conhecimentos especializados sobre o Princípio da Indução apresentados por licenciandos em Matemática. Para isso, tomou-se a noção de conhecimento especializado de Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013), conforme discussão realizada na próxima seção.

2 Que Matemática para a formação de professores?

Há algum tempo, pesquisadores têm buscado responder ao questionamento que se coloca no título desta seção, com o propósito de argumentarem a favor de uma necessária aproximação entre a formação matemática oferecida nos cursos de licenciatura em Matemática e a futura prática profissional na educação básica (Fiorentini & Oliveira, 2013; Moreira & David, 2010). Essa aproximação se justifica, conforme Santos e Lins (2016), por meio da compreensão de que as práticas de trabalho do matemático não são as mesmas práticas dos professores da educação básica, nem mesmo as práticas dos professores que atuam na formação de professores.

Sendo assim, em busca de identificar a especificidade da Matemática a ser ensinada nos cursos de licenciatura, estudos têm se distanciado de argumentos políticos para justificar a existência ou não de determinados conteúdos matemáticos na formação inicial, para apoiarem-se em questões mais conceituais (Almouloud, Figueroa & Fonseca, 2021; Dorantes & Vargas, 2019; Moreira & Viana, 2016; Resende & Machado, 2012). Portanto, como assinalam Santos e Lins (2016, p. 370), não “se trata de pensar que o professor precise de uma formação matemática menos sofisticada e ‘pesada’ do que o bacharel em matemática, mas uma formação [...] que ofereça alguns modos de lidar com as demandas matemáticas de sua prática profissional”.

Nessa direção, diferentes teorizações circulam na área de Educação Matemática, tratando de uma Matemática específica para o ensino, e que difere do conhecimento matemático necessário a outros profissionais (Ball & Bass, 2003). Na perspectiva de Ma (1999), não basta que os professores conheçam a estrutura conceitual e as atitudes básicas inerentes à matemática elementar, haja vista que é preciso que ensinem aos estudantes.

Apoiados em Shulman (1987), os esforços em torno da conceitualização sobre Conhecimento Matemático para o Ensino (CME) (Ball, Thames & Phelps, 2008) possibilitaram uma ampla frente de pesquisas que pretendem mapear o conhecimento matemático necessário para executar as tarefas referentes ao ensino de Matemática e fornecer informações para subsidiar o processo de formação dos professores. Por outro lado, Carrillo *et al.* (2013) propõem que o conhecimento dos professores é especializado, de modo a configurar o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (CEPM), eliminando a referência ao Conhecimento Comum do Conteúdo (CCC) proposto por Ball *et al.* (2018). Tendo isso em vista, no Quadro 1, foram sintetizados os subdomínios correspondentes ao CEPM.

Quadro 1: Subdomínios do CEPM

Domínios	Subdomínios	
Conhecimento Matemático	Conhecimento de Tópicos	Inclui o conhecimento de conceitos e procedimentos matemáticos, juntamente com seus fundamentos teóricos, incluindo um certo grau de formalização.
	Conhecimento da Estrutura da Matemática	Inclui o conhecimento das ideias e principais estruturas relativas a itens específicos que estão sendo abordados, ou o conhecimento das conexões entre tópicos atuais e anteriores e próximos itens.
	Conhecimento da Prática Matemática	Inclui o modo de proceder na matemática, o conhecimento das formas de conhecer e criar ou produzir em matemática, envolve o uso de demonstrações e provas, saber definir e usar definições, argumentar, generalizar ou explorar aspectos da comunicação matemática.
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo	Conhecimento do Ensino da Matemática	Permite que o professor eleja uma determinada representação ou um material para o ensino de um conceito ou procedimento, seja capaz de selecionar exemplos, tarefas e recursos didáticos adequados para a aprendizagem dos conteúdos e inclui o conhecimento das teorias de ensino.
	Conhecimento das Características da Aprendizagem Matemática	Permite que o professor conheça o modo de pensar dos estudantes sobre as tarefas matemáticas, que identifique as dificuldades mais frequentes dos estudantes, assim como saber detectar as respostas erradas.
	Conhecimento das Diretrizes Curriculares para o Ensino de	Inclui conhecer os objetivos, conteúdos, procedimentos e materiais propostos pelas normativas curriculares oficiais, os materiais de apoio convencionais, as formas de avaliação.

	Matemática	
--	------------	--

Fonte: Adaptado de Carrillo *et al.* (2013).

Um CCC é aquele que qualquer pessoa com formação matemática possui, mas o utiliza como uma ferramenta, sem saber, necessariamente, explicar o porquê ou a origem do que faz (Ribeiro, 2009). Qualquer pessoa escolarizada deve saber que, no conjunto dos números inteiros, não é possível realizar uma divisão por zero, mas pode não saber explicar em que situações essa divisão é indefinida ou indeterminada. Nesse contexto, espera-se que o professor de Matemática possua um tipo de Conhecimento Especializado do Conteúdo (CEC) que o habilite a saber explicar cada uma dessas situações de forma compreensível aos seus estudantes.

Diferentemente da perspectiva do CCC, o CEC se diferencia da habilidade matemática geral e, segundo Ball *et al.* (2008), requer mais estudos, no intuito de entender as dimensões mais importantes do conhecimento profissional dos professores. Diante disso, Grilo, Barbosa e Maknamara (2020) sistematizaram algumas dessas dimensões, quando identificaram supostas capacidades e habilidades que o professor de matemática precisa assumir para ser capaz de ensinar adequadamente. Dentre as habilidades, Grilo *et al.* (2020, p. 12) destacam que o professor que ensina Matemática deve ser capaz de “descompactar, conectar, antecipar, articular, compreender e provar ideias matemáticas de forma associada às demandas específicas do ensino”.

Tendo isso em vista, pode-se exemplificar tais habilidades no contexto do Princípio da Indução por meio de um problema que aparece frequentemente na educação básica: mostrar que o número de diagonais de um polígono convexo de n -lados é dado por $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$. A habilidade de descompactar requer que o professor apresente o enunciado tornando explícitas as ideias e os procedimentos matemáticos a serem adotados. Assim, tal problema poderia ser “descompactado” do seguinte modo, conforme Quadro 2:

Quadro 2: Proposta de atividade “descompactada” para provar, por indução, o número de diagonais de um polígono convexo

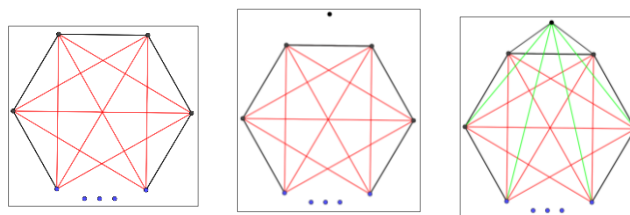
Responda cada um dos itens a seguir para mostrar por indução que o número de diagonais de um polígono convexo de n -lados é dado por $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, para $n \geq 3$.

- Qual é o conceito de diagonal de um polígono convexo?
- Qual é a quantidade mínima de lados de um polígono convexo? Qual é o nome desse polígono?
- O que é possível afirmar sobre o número de diagonais de um polígono convexo que tem exatamente 3 lados?
- Considerando $n = 3$, a igualdade $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ é verdadeira ou falsa?
- Se acrescentarmos um novo vértice a um polígono convexo de n -lados, quantos lados serão acrescentados ao polígono “original”? E quantas diagonais?
- Considerando que, para um dado $n \geq 3$, $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, é verdadeira para um polígono convexo de n lados, o que é possível afirmar sobre o número de diagonais de um polígono convexo de $n + 1$ lados?

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ainda, segundo as habilidades citadas por Grilo *et al.* (2020, p. 12), esse exemplo nos mostra também a habilidade do professor em: conectar diferentes áreas da Matemática – Aritmética e Geometria; articular diferentes estratégias metodológicas, visto que tal situação permite que o professor recorra a desenhos ou ao uso de *softwares*, conforme Figura 1, e não apenas à manipulação algébrica; provar as ideias matemáticas envolvidas.

Figura 1: Uso de *software* para mostrar o número de diagonais de um polígono convexo



Fonte: Elaborado pelos autores.

Sobre a última habilidade, Steele e Rogers (2012) discorreram sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino de Demonstrações (CME-D), que tem como um dos componentes fundamentais a habilidade de saber se uma argumentação matemática é ou não uma prova. Segundo os autores, é comum os professores preferirem argumentos empíricos a provas dedutivas, pois os consideram mais convincentes ou fáceis de usá-los em sala de aula, além de classificarem que a prova é um tópico reservado para estudantes de alto desempenho.

Esse posicionamento entra em conflito com o papel da prova na Matemática, como uma forma de pensar e raciocinar a sua própria natureza. Visto isso, para Grilo, Barbosa e Luna (2016), a ausência de discussões sobre diferentes estratégias de ensino para o uso de provas e demonstrações, na formação inicial de professores, não favorece o uso destas nas salas de aula da educação básica. Logo, numa tentativa de aproximar o processo de formação inicial com discussões que relacionam o Princípio da Indução a tópicos estudados na educação básica, objetivou-se identificar conhecimentos especializados sobre indução matemática apresentados por um grupo de licenciandos.

3 Aspectos metodológicos

De acordo com o objetivo proposto, a pesquisa foi desenvolvida com base nos aportes da pesquisa qualitativa, pois busca entender os significados atribuídos pelos sujeitos participantes da pesquisa às situações investigadas de forma indutiva, de modo que as interpretações apresentadas partem de situações particulares para sistematizar questões gerais (Creswell, 2016). Por esse viés, cabe destacar que, para responder à questão norteadora do estudo – que conhecimentos especializados sobre o Princípio da Indução são apresentados por licenciandos em Matemática? –, foram utilizadas como estratégias de produção de dados a entrevista em grupo e a análise documental.

De acordo com Lichtman (2010), nas pesquisas qualitativas, as entrevistas são amplamente utilizadas e podem ser realizadas individualmente ou em grupo (também chamadas de grupo focal). No caso do grupo focal, o pesquisador possibilitará a interação entre cada um dos membros do grupo, estimulando a reflexão de todos os integrantes, sem se preocupar em alcançar um consenso (Lichtman, 2010).

Nesse processo, participaram do grupo focal 12 estudantes matriculados na disciplina Conjuntos Numéricos, que faz parte do 5º semestre da matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana. A análise documental se debruçou sobre as respostas dos estudantes na avaliação escrita da disciplina, que abordou o tópico de números naturais e números inteiros. Na perspectiva de Gil (2008), tais avaliações podem ser caracterizadas como documentos pessoais, e contribuem para a compreensão do problema de pesquisa, quando utilizados para completar os dados obtidos por outros procedimentos.

Visto isso, ao considerar as ementas e os planos de ensino disponibilizados no site do curso (www.matematica.uefs.br), o Princípio da Indução aparece explicitamente nas disciplinas

Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos M (1º semestre), Teoria dos Números (2º semestre) e Conjuntos Numéricos (5º semestre), como um conhecimento matemático especializado a ser ensinado. Assim, justifica-se a escolha pelo grupo de estudantes.

Cabe mencionar que, antes do início do grupo focal, os estudantes foram informados sobre os objetivos e procedimentos adotados na pesquisa. Então, após a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, foi disponibilizado um questionário que continha questões abertas e fechadas acerca do contato com o Princípio da Indução nas disciplinas do curso.

O grupo focal teve duração de 1h40min e foi gravado mediante o uso de dois equipamentos de captura de áudio e um equipamento de áudio e vídeo. Nesse momento, a pergunta motivadora foi: o que é o Princípio da Indução? Assim, após terem esgotado as interações entre os participantes, os pesquisadores realizaram a exposição de imagens retiradas de alguns livros didáticos da educação básica, com o intuito de que houvesse a identificação, ou não, pelos participantes, do Princípio da Indução.

Para a análise dos dados, recorreu-se aos passos da Análise Textual Discursiva, proposta por Moraes (2003). Logo, para a unitarização de dados, as respostas foram agrupadas tomando como parâmetro os subdomínios do conhecimento especializado do professor de matemática. Tal procedimento possibilitou uma leitura minuciosa dos dados e a separação em unidades significativas que geraram os excertos apresentados em cada subdomínio.

Os excertos, por sua vez, foram apresentados em nome do grupo focal, visto que os trechos apresentados são fruto de opiniões consensuais. Dessa maneira, a captação do novo emergente, fruto das construções discursivas, elaboradas pelos participantes e construídas pelos pesquisadores, deu-se em diálogo com as teorizações que ancoram a pesquisa.

4 Resultados e discussão

Para a apresentação dos dados, foram estabelecidas duas categorias analíticas. Na primeira, foram reunidos os dados que explicitam o conhecimento do conteúdo, de modo que foram identificados: o conhecimento dos estudantes sobre tópicos de Indução (definição), sua estrutura (relações) e prática matemática (demonstração). Na segunda categoria, os dados focalizam o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, e elencaram-se estratégias didáticas para o uso da indução matemática na educação básica, bem como dificuldades a serem enfrentadas no ensino e conhecimento sobre organização curricular.

4.1 Conhecimento Matemático

Os três subdomínios relacionados ao conhecimento do conteúdo foram identificados no grupo focal. Em relação ao Conhecimento de Tópicos, os licenciandos, ao serem questionados sobre o que é o Princípio da Indução, foram capazes de enunciá-lo, conforme excerto que sintetiza a discussão ocorrida no grupo frente a tal questionamento.

Eu acho que puxaria para um exercício que eu fiz na aula de Conjuntos [Numéricos]. A gente estava pra um, que é como [cita o nome do colega] disse, que se a gente quer provar, generalizar, que é como [cita o nome de outro colega] falou, eu já tenho um ponto de partida. Eu suponho que para uma quantidade vale, então eu vou garantir que vale para essa quantidade mais um. Eu acho que seria essa ideia aí, generalizando, tomando como ponto de partida um elemento mínimo.

O grupo demonstrou clareza quanto ao propósito do Princípio da Indução, que busca garantir generalizações no conjunto dos números naturais. Ademais, os estudantes mostraram

ter conhecimento da existência de duas condições que devem ser verificadas para o Princípio da Indução. Ao explicitarem a necessidade de se verificar um ponto de partida ou elemento mínimo, o grupo se refere à primeira condição do Princípio da Indução, conhecida como base da indução. A segunda condição, conhecida como hipótese da indução, é descrita pelo grupo com a suposição de que se vale para “uma quantidade”, então é preciso garantir que seja válida também para “essa quantidade mais um”.

Ainda, vale ressaltar que os estudantes assumiram a noção de cardinalidade para um número natural, servindo como um modelo de contagem. Contudo, percebe-se que a compreensão conceitual ainda se mantém vinculada ao uso de fórmulas, de modo a utilizar o Princípio da Indução mais como uma técnica de demonstração do que como um método que garante definições na teoria do conjunto dos números naturais. Por exemplo, mesmo sendo instigado pelos pesquisadores com base na imagem do livro didático que trata do processo de fatoração, por meio de divisões sucessivas, o grupo não conseguiu estabelecer uma associação com o Princípio da Boa Ordenação, que é equivalente ao Princípio da Indução.

Quando a gente vê a fórmula a gente já pensa em Indução (...) Se a fórmula generaliza, então é indução.

Então quando a gente vê aí, tem uma formulazinha e generaliza, então é uma indução. No outro caso, não tinha [se referindo a uma imagem do livro didático que mostrava um processo de divisões sucessivas].

A gente viu isso em Princípios [Metodológicos aplicados à Educação]. (...) Aí a gente fez aquele processo das questões abertas que a gente sempre tentava generalizar. Nesse processo de investigação, primeiro tentava achar um tipo de fórmula para generalizar aquilo que a gente primeiramente tinha deixado em aberto. E sempre essa ideia: tinha as sequências e aí voltava e fazia... Era exatamente indução, era igual, igual. No final a gente chegava. Era indução! Partia desse ponto e no final generalizava para todos.

Nesse contexto, relataram a experiência vivenciada em outra disciplina, a qual julgam envolver indução. Com isso, ao serem questionados se, na época, tinham essa mesma percepção, os estudantes afirmaram que não. Dessa maneira, analisou-se que a experiência relatada pelo grupo mantém uma aproximação da indução matemática com a indução empírica, visto que se tratava de uma atividade que envolvia a participação de estudantes da educação básica.

Além disso, ao tratar do processo de investigação, para tentar encontrar uma fórmula, vê-se que o grupo, inicialmente, não demarca a diferença entre a identificação de padrões e a validação de uma generalização. Isto é, não demarca a distinção entre a indução empírica e a indução matemática.

Sobre o subdomínio “Conhecimento da Estrutura Matemática”, o grupo estabeleceu relações entre o Princípio da Indução e ideias associadas a sequências, progressão aritmética (PA), progressão geométrica (PG), geometria e cálculo diferencial e integral. Esta última foi relacionada pelo grupo quando foram apresentados a uma página de um livro didático que aborda a região limitada por um polígono regular.

Grupo: Não tem jeito, né? Se tem uma fórmula, qualquer que seja o tamanho dessa figura, a gente vai conseguir dizer qual é o ...

Pesquisadores: Vocês estão falando tanto em fórmula, então eu posso entender que vocês estão olhando para o Princípio da Indução como um método de demonstração daquela fórmula

[aponta para o slide]? A área de uma figura geométrica, em geral, a gente define. Se a gente tomar isso como uma definição, a gente pode dizer, mesmo assim, na definição, que a gente enxerga o Princípio da Indução?

Grupo: Mas, a gente define de uma forma geral, né?

Pesquisadores: Sim, de uma forma geral. Por que na Educação Básica não se preza muito pelas demonstrações. Aqui é uma definição, né? Então, o livro está definindo que a área da região de um polígono regular é desse jeito [apontando para o slide]. Ainda assim, a gente pode usar ou aplicar o Princípio da Indução nessa definição?

Grupo: Eu acredito que sim, pois tudo depende da quantidade de lados.

Pesquisadores: A gente pode definir a área de um polígono de 3, 4, 5, 6 lados, mas a generalização vai ocorrer a partir do momento que tem algum instrumento forte na Matemática que garante a validade para todo n . Esse instrumento seria a indução? É isso que vocês estão tentando dizer?

Grupo: Eu acredito que sim.

Grupo: Mas, se tender ao infinito vai ser um círculo, né?

[Surge um burburinho no grupo]

Grupo: Mas, se o n chegar ao infinito, ele não vira um círculo?

Pesquisadores: [Cita o nome do estudante] fez uma pergunta importante: são duas visões distintas. (...) A primeira é: você escolhe um n aleatório, aí você define. A segunda, você faz o n tender ao infinito, que é crescer sem parar. Fazendo o n tender a infinito, ou seja, fazendo o n variar, a gente tem o Princípio da Indução?

Grupo: Creio que não, porque o Princípio da Indução é... Vamos supor, tem a reta numérica infinita, aí eu pego um número dessa reta e vale pra esse número, e infinito não é um número. Aí não se aplicaria o Princípio da Indução.

Nesse processo, o grupo observou que, se o número n de lados de um polígono inscrito em um círculo tender a infinito, o polígono tende a um círculo. Com isso, apesar de se ter uma generalização, no sentido de que, ao aumentar o número de lados do polígono, este se aproxima de um círculo, os estudantes assinalaram que não se trata do Princípio da Indução. Dessa maneira, parece-nos que o grupo conseguiu demarcar, explicitamente, a diferença entre o método da exaustão, considerado como precursor do cálculo diferencial e integral, e o método de demonstração por indução.

Também, estabeleceram conexões entre o Princípio da Indução e outros tópicos vistos na educação básica, como PA e PG. Isso, especialmente quando envolve a soma dos termos de uma PA finita, número de diagonais de um polígono convexo e sequências.

Na Educação Básica eu vi, mas não era para generalizar usando indução, sobre PA e PG. A gente ia testando para o primeiro, aí botava o segundo, o terceiro, até encontrar um padrão, no sucessor. Entendeu? O sucessor na sequência. Se encaixa, isso é o que eu vejo.

Mais uma vez, no excerto acima, percebe-se a presença da indução empírica, mas, dessa vez, sendo demarcada como um princípio que difere da indução. Isso, tendo em vista que não se tinha a intenção de generalizar.

Outra coisa também que a gente discutiu bastante nas aulas [Conjuntos Numéricos] foi o conservar a metodologia que a gente usa. Mesmo que o Princípio da Indução Matemática e o Princípio da Indução Finita sejam um pouco diferentes, nas questões você conserva a metodologia de

resolução. Então, você tem esse poder lógico de resolução.

Ainda, observa-se acima que além de demonstrar um conhecimento sobre a estrutura matemática, ao relacionar o Princípio da Indução Matemática com o Princípio da Indução Finita, o grupo demonstra conhecimento sobre o modo de produzir em Matemática, explicitando também um Conhecimento da Prática Matemática. Posto isso, os estudantes perceberam a existência de uma unidade metodológica, quando se trata de demonstrar usando o Princípio da Indução Matemática ou o Princípio da Indução Finita. Tal conhecimento também foi verificado quando foi requerido que os estudantes realizassem demonstrações nas avaliações, conforme Figura 2.

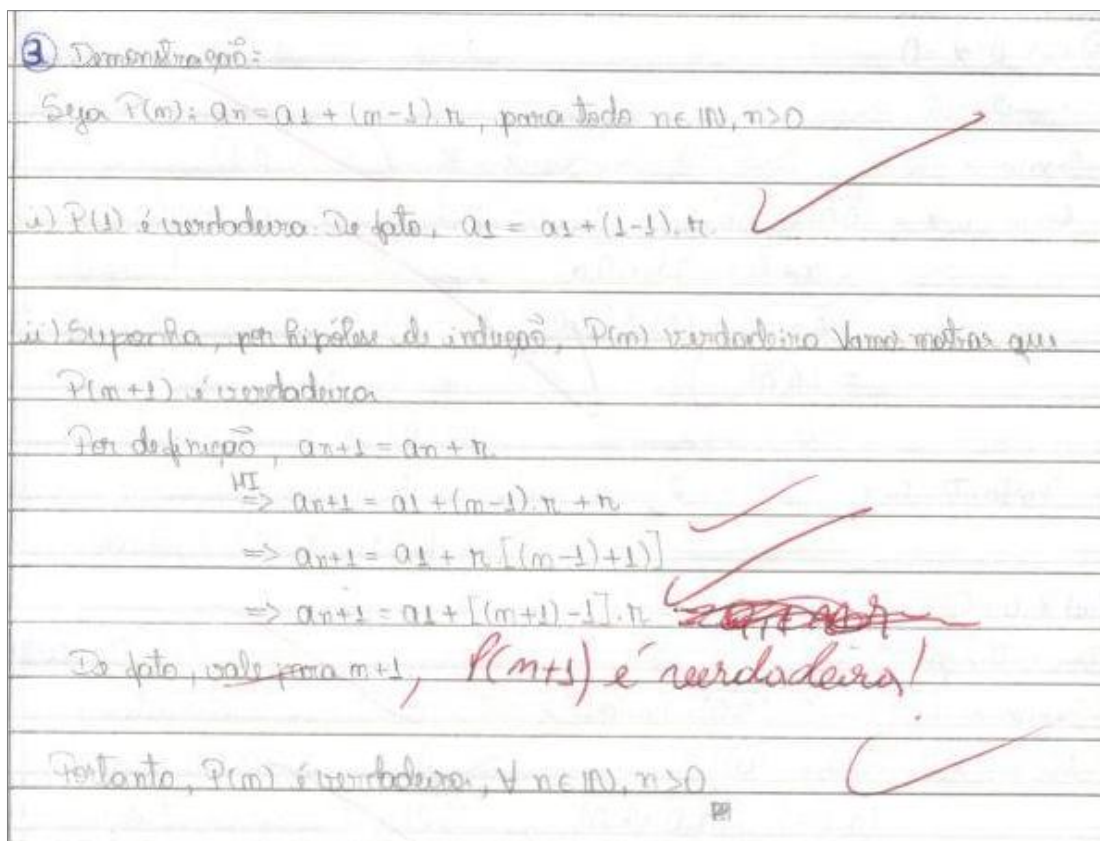
Figura 2: Demonstração do termo geral de uma progressão aritmética

Fonte: Dados da pesquisa.

3. Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tem-se que

$$a_{n+1} = a_n + r$$

onde r é um número real fixo chamado razão. Mostre que $a_n = a_1 + (n - 1)r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 2, tem-se a demonstração, pelo Princípio da Indução Matemática, do termo geral de uma PA realizada em uma avaliação. Na demonstração, percebe-se, evidentemente, a base da indução, no item (i), e o uso da hipótese de indução, na implicação em que aparece a sigla HI, no item (ii). No item (ii), observa-se o uso da expressão “vale para $n + 1$ ”, bem como uma manipulação que envolve sucessores, sem efetivar a subtração.

Nesse caso, analisa-se que, como a subtração não é uma operação definida no conjunto dos números naturais, na demonstração emprega-se, além da noção de sucessor, a de antecessor:

o número natural $n - 1$ é antecessor de n , pois n é o sucessor de $n - 1$. Logo, considerando que o conceito de antecessor decorre dos axiomas de Peano, na demonstração, o número $(n - 1) + 1$ é o sucessor de $n - 1$; o número $(n + 1) - 1$ é o antecessor de $n + 1$; ambos, $(n - 1) + 1$ e $(n + 1) - 1$, são iguais.

5 Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Em relação ao subdomínio “Conhecimento do Ensino da Matemática”, o grupo considerou relevante o uso de materiais manipuláveis, da indução empírica e do uso de imagens, para facilitar o entendimento dos estudantes da educação básica. Isso, especialmente quando se tratou de sequências e da possibilidade de inferências com vistas à generalização.

Na disciplina [Instrumentalização para o Ensino de Matemática] INEM 5, a gente está trabalhando com algumas aplicações dos assuntos e a gente está vendo algumas realizações desses assuntos nos livros didáticos. O autor traz várias realizações para desenvolver o pensamento algébrico do aluno. Por exemplo, ele pega aquela questão dos palitinhos e fala: eu consigo criar dois quadrados com sete palitinhos e pergunta: com 16 palitos eu consigo fazer quantos? De acordo com isso, pede para o aluno criar uma forma algébrica para generalizar para quantos palitos ele queira. E também vimos isso em uma questão de Geometria, que diz: vale para tal figura geométrica, digamos. Aí fala: crie, de acordo com a indução, uma figura maior e agora imagine que seja maior numa dada proporção. E depois: você conseguiria generalizar uma fórmula que dê pra fazer? Então, dá para observar na Educação Básica.

Eu acho que de modo geral os alunos têm muita resistência com esse tipo de exemplo assim [se referindo ao exemplo de PA e PG]. Apesar de os dois exemplos seguirem o mesmo princípio, o mesmo raciocínio, quando a gente vai pra essa parte mais formal, que envolve letras, que são conceitos diferentes, eu acho que eles têm mais resistência [se referindo aos estudantes da Educação Básica]. Mas, quando vai pra outra forma, usando materiais manipuláveis ou até outras contextualizações mesmo com imagens, eles são mais receptivos. Mas acho que é uma outra forma também de mostrar, pelo menos eu já vi dessa outra forma e aprendi, mas isso não envolve todos os alunos.

Os excertos acima apontam que o grupo não considera a possibilidade do uso de recursos tecnológicos, bem como elege o uso de materiais manipuláveis como mais adequado para o trabalho com o Princípio da Indução na educação básica, sem desconsiderar a possibilidade de envolver processos de indução empírica. Essas escolhas surgiram imbricadas no Conhecimento das Características da Aprendizagem Matemática, quando os estudantes ponderam a importância de o professor observar as características individuais dos seus alunos e de cada turma, como exposto abaixo:

Às vezes, você quer trabalhar tudo, quer seguir o cronograma, só que uma turma não é igual a outra. Então, é muito importante observar os nossos alunos. A gente tem um mal de querer comparar uma turma com a outra... Se eu explico de uma forma e o meu aluno não aprende, eu posso explicar dez vezes dessa mesma forma e o meu aluno vai continuar sem entender. Então, eu acho que é importante a gente falar da mesma coisa só que de maneiras diferentes.

Diante disso, tal preocupação com o processo de aprendizagem na educação básica ganha destaque, mais uma vez, quando o grupo apresenta situações que remetem ao Conhecimento das Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática. Isso, nos momentos em que destacam que uma das maiores dificuldades enfrentadas na educação básica é a passagem da Aritmética para a Álgebra.

Eu acho que não é nem tanto por parte dos alunos. Tem uma parte que é a forma como é colocado em sala de aula. Não falo tanto dos professores, mas quando você analisa a vida escolar, chega um determinado momento, que troca tudo e que o estudante precisa se reinventar: o que antes usava como letra, agora, a matemática já começa a entrar nisso. Então, o aluno cria essa resistência porque ele não foi preparado previamente, ouvindo: a Matemática é isso, é exata, só pode dar um valor, você só pode fazer de uma forma. Aí pronto, eles usam os números de uma forma. Depois surge uma letra e diz que essa letra pode assumir tal valor, tal valor, tal valor. Então, acaba que o aluno vive sempre esse choque, e esse choque gera resistência: Ah, eu não gosto de matemática. Mas, não gosta por quê? Por que não entendo! Aí quando você coloca um assunto que precisa fazer uma generalização, eles falam que isso aí é muito difícil, que não conseguem entender. Tem a questão que até o 5º ano é a Pedagogia, e quando chega no 6º ano a gente mesmo começa a pegar essas turmas, e eles começam a perceber esse choque e quando a gente traz uma coisa diferente eles dizem que é muito difícil.

Só complementando a fala dela, isso é muito comum na passagem da Aritmética para a Álgebra, que é isso que a gente está vendo no INEM agora. Os alunos quando trabalham com números têm facilidade, mas quando coloca uma letra já sentem uma dificuldade tamanha. Então, eu acho que esse processo aí depende muito da transição de sair da Aritmética para Álgebra.

Nesse viés, cabe destacar que, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o trabalho com as ideias relacionadas à regularidade, generalização de padrões e propriedade da igualdade deve ser iniciado nos primeiros anos do ensino fundamental e aprofundado nos anos finais. O documento também destaca a evidente relação entre as unidades temáticas “Números” e “Álgebra”, especialmente, no trabalho com sequências nos anos iniciais. Ainda, a BNCC sugere que, no decorrer da escolarização, outros campos devem ser explorados, como os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, a generalização de propriedades e padrões e associações com o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018).

6 Considerações finais

Com o objetivo de identificar conhecimentos especializados sobre Indução Matemática, apresentados por licenciandos em Matemática, foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa, realizada a partir de um grupo focal. O grupo, composto por 12 licenciandos, apresentou clareza quanto a uma das finalidades do Princípio da Indução – a de demonstrar teoremas na teoria do conjunto dos números naturais.

Contudo, o grupo não reconheceu que o Princípio da Indução garante definições por recorrências. Ademais, seus registros escritos, oriundos de questões de avaliações, demonstraram um domínio da técnica de demonstração, tanto na verificação do passo denominado “base da indução” quanto, no segundo passo, na aplicação correta da hipótese da indução.

Cabe explicitar, também, que o grupo possui uma concepção precisa de que o Princípio da Indução é uma forma de garantir generalizações no conjunto dos números naturais, que difere da indução empírica. Os licenciandos compreenderam que a indução empírica é uma forma de identificar padrões, comportamento relevante para produzir conhecimento matemático, mas não é um método de demonstração que garante verdades matemáticas. Para a educação básica, o grupo defendeu o uso de materiais manipuláveis conjuntamente com a indução empírica, tendo cuidado para a passagem da Aritmética para a Álgebra.

Por fim, evidenciou-se o fato de o grupo citar, recorrentemente, disciplinas do curso que compõem o eixo da Prática como Componente Curricular (e.g. INEM), ao relatar experiências

anteriores com o Princípio da Indução. Com exceção da disciplina Conjuntos Numéricos, *locus* da produção dos dados, não foram identificados relatos de experiência em disciplinas do eixo do Conhecimento Matemático já cursadas pelos participantes.

Portanto, tal fato leva a ponderar sobre a necessidade da ampliação da discussão sobre o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, de modo a desenvolver estudos que tratem do Conhecimento Especializado do Professor Formador que atua nos cursos de licenciatura em Matemática. Sendo assim, investigar o Conhecimento Especializado do Professor Formador, a partir dos subdomínios do CEPMP, poderá desvelar as lacunas na formação inicial, no que tange ao domínio do Conhecimento Matemático e do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, e, conseqüentemente, os desdobramentos na prática do futuro professor de Matemática na educação básica.

Agradecimentos

A pesquisa contou com financiamento da Universidade Estadual de Feira de Santana, por meio do FINAPESQ.

Referências

- Almouloud, S. A.; Figueroa, T. P. & Fonseca, R. V. (2021). Análise epistemológica de teoria dos números e criptografia: importância dessas áreas nos currículos de licenciatura em Matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 10(21), 22-43.
- Amorim, F. L.; Santos, J. C. & Santos, N. C. (2020). Aplicação do método de Indução Matemática em Progressões Aritméticas e Geométricas. *Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIT*, 6(1), 39-56. <https://doi.org/10.0000/cadernoexatas.v6i1.8415>
- Batista, A. P. (2020). *Uma visão geral sobre a análise real no país e uma proposta em sequências didáticas para a disciplina em cursos de licenciatura em Matemática*. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Goiás. Goiânia, GO.
- Borges, C. C. (1995). O Ensino da Matemática. *Folhetim de Educação Matemática*, 45, 1-15.
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre, RS: Artmed.
- Dorantes, E. & Vargas, A. (2019). ¿Cómo enseñar a un estudiante de licenciatura una introducción a la teoría de grupos y el álgebra moderna con rompecabezas? *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 4, 244-246.
- Ferreira, J. (2010). *A construção dos números*. Rio de Janeiro, RJ: SBM.
- Fiorentini, D. & Oliveira, A. T. C. C. (2013). O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(47), 917-938. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400011>
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo, SP: Atlas.
- Grilo, J. S. P.; Barbosa, J. C. & Maknamara, M. (2020). Discurso da Matemática Específica para Ensinar e a Produção do Sujeito 'Professor(a)-de-Matemática'. *Ciência & Educação*, 26, e20040. <https://doi.org/10.0000/ciedu.v26i0.20040>

- Halmos, P. (2001). *Teoria ingênua dos conjuntos*. Rio de Janeiro, RJ: Ciência Moderna.
- Lichtman, M. (2010). *Qualitative research in education: a user's guide* (2. ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.
- Lima, E. L. (1976). *Curso de análise* (v. 1). Rio de Janeiro, RJ: IMPA.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Moraes, R. (2003). Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Ciência & Educação*, 9(2), 191-211.
- Moreira, P. C. & David, M. M. S. (2010). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Moreira, P. C. & Vianna, C. R. (2016). Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 515-534. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a11>
- Pinto, M. P. S.; Grilo, J. S. P. & Grilo, M. (2020). Tópicos de Teoria dos Números abordados na Educação Básica: Uma análise sobre um livro didático. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(58), 1-20.
- Resende, M. R. & Machado, S. D. (2012). O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina teoria elementar dos números. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 257-278.
- Ribeiro, C. M. (2009). O conhecimento do conteúdo no tema de Geometria: algumas situações críticas evidenciadas por futuros professores na Licenciatura em Educação Básica. In: *Atas do XXV Encontro Nacional de Professores de Matemática—ProfMat* (pp. 1-15). Viana do Castelo, PT: APM.
- Rodriguês, J. S.; Costa, D. A. & Custódio, J. F. (2018). O método da indução nas ciências empíricas e na matemática vistos em livros didáticos. *Ensino & Multidisciplinaridade*, 4(2), 15-32.
- Santos, J. R. V. & Lins, R. C. (2016). Uma Discussão a Respeito da(s) Matemática(s) na Formação Inicial de Professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(1), 1-25.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reforms. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Silva, E. M. & Savioli, A. M. P. D. (2012). O conceito de indução finita na compreensão de estudantes de um curso de matemática. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 5(3), 127-148.
- Souza, F. A. C. P. & Oliveira, A. M. L. (2023). Modelagem Matemática e o uso do Princípio da Indução Finita no conteúdo PA e PG do 2º ano do Ensino Médio. *Itinerarius Reflectionis*, 19(2), 1-16.
- Vieira, F. R. (2016). Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(1), 61-93.