

Processos de Validação no Ensino de Geometria: Uma Análise Histórica de Livros Didáticos no Brasil (1930-1960)

Maria Célia Leme da Silva

Universidade Federal de São Paulo
São Paulo, SP — Brasil

✉ celia.leme@unifesp.br

id [0000-0001-6029-0490](https://orcid.org/0000-0001-6029-0490)

Ana Paula Jahn

Universidade de São Paulo
São Paulo, SP — Brasil

✉ anajahn@ime.usp.br

id [0000-0003-0515-7536](https://orcid.org/0000-0003-0515-7536)


Marizete Nink de Carvalho


Universidade Federal de Rondônia
Porto Velho, RO — Brasil

✉ marizete@unir.br

id [0000-0001-5324-0137](https://orcid.org/0000-0001-5324-0137)



2238-0345 


10.37001/ripem.v16i1.4634 

Recebido • 05/06/2025

Aprovado • 23/03/2026

Publicado • 30/04/2026

Editoria • Edvonete Souza de Alencar 

Veridiana Rezende 

Resumo: Este estudo investiga a abordagem de provas e demonstrações em geometria nas normativas e livros didáticos brasileiros para alunos de 13 anos, entre 1930 e 1970. Adotando uma perspectiva da história cultural, analisam-se dois momentos de modernização do ensino de matemática: a apropriação das recomendações da Comissão Internacional do Ensino de Matemática desde 1908 e a emergência da Matemática Moderna (MM) na década de 1950. Foram examinados quatro livros didáticos representativos. As análises permitem identificar a persistência da geometria dedutiva tradicional, enfatizando a memorização de teoremas até 1950, contrastando com as abordagens intuitivas propostas pelas reformas curriculares. Por outro lado, obra de Osvaldo Sangiorgi (década de 1960) sinaliza uma tentativa de ruptura com esse modelo baseado na memorização, introduzindo metodologias experimentais. O estudo evidencia as resistências e adaptações da cultura escolar brasileira frente aos movimentos internacionais de renovação pedagógica.

Palavras-chave: Provas e Demonstrações. Geometria Intuitiva. Geometria Dedutiva. Ensino Secundário. Movimentos Modernizadores.

Validation Processes in the Teaching of Geometry: A Historical Analysis of Brazilian Textbooks (1930-1960)

Abstract: This study investigates the approach to proofs and demonstrations in geometry in Brazilian regulations and textbooks for 13-year-old students between 1930 and 1970. Adopting a cultural history perspective, two moments of modernization in mathematics education are analyzed: the adoption of the recommendations of the International Commission on Mathematics Education since 1908 and the emergence of Modern Mathematics (MM) in the 1950s. Four representative textbooks were examined. The analyses identify the persistence of traditional deductive geometry, emphasizing the memorization of theorems until 1950, contrasting with the intuitive approaches proposed by curricular reforms. Conversely, the work of Osvaldo Sangiorgi (1960s) signals an attempt at a break with the past, introducing experimental methodologies influenced by MM. The study highlights the resistance and adaptations of Brazilian school culture in the face of international movements for pedagogical renewal.

Keywords: Proofs and Demonstrations. Intuitive Geometry. Deductive Geometry. Secondary

Education. Modernizing Movements.

Procesos de Validación en la Enseñanza de Geometría: Un Análisis Histórico de Libros Didácticos en Brasil (1930-1960)

Resumen: Este estudio investiga el enfoque de pruebas y demostraciones en geometría en normativas y libros de texto brasileños para estudiantes de 13 años (1930-1970). Bajo la perspectiva de la historia cultural, se analizan dos momentos de modernización educativa: la apropiación de las recomendaciones de la Comisión Internacional de la Enseñanza Matemática desde 1908 y la emergencia de la Matemática Moderna (MM) en la década de 1950. Se examinaron cuatro libros de texto representativos. Los análisis identifican la persistencia de la geometría deductiva tradicional, enfatizando la memorización de teoremas hasta 1950, lo que divergía de los enfoques intuitivos de las reformas curriculares. Por el contrario, la obra de Osvaldo Sangiorgi (década de 1960) señala un intento de ruptura con ese modelo memorístico, introduciendo metodologías experimentales influenciadas por la MM. El estudio evidencia las resistencias y adaptaciones de la cultura escolar brasileña frente a los movimientos internacionales de renovación pedagógica.

Palabras clave: Pruebas e Demostraciones. Geometría Intuitiva. Geometría Deductiva. Educación Secundaria. Movimientos Modernizadores.

1 Introdução

“Processos de validação” em contexto de geometria é a expressão que adotamos no título de um projeto coletivo de pesquisa para estudar, em perspectiva histórica, como os alunos foram convidados a conhecer, decorar ou realizar provas, demonstrações, argumentações, justificativas em geometria. O projeto em questão tem como objetivo realizar um exame amplo ao longo do século XX, envolvendo diferentes níveis de ensino, desde os primeiros anos escolares até o final da Educação Básica e na formação de professores.

Apostamos que a expressão “processos de validação” pode abranger diversos modos de produzir justificativas em geometria, considerando diferentes momentos históricos e diversos estágios de aprendizagem. Nessa perspectiva ampla, os processos de validação em geometria escolar não se restringem à demonstração formal no sentido estrito da matemática acadêmica. Eles englobam um espectro de práticas discursivas e ações que visam conferir credibilidade e aceitabilidade a afirmações geométricas. Nos primeiros anos, isso pode envolver a justificação de uma propriedade por meio da observação de múltiplos exemplos ou da manipulação de objetos. Em etapas posteriores, a validação pode ser realizada utilizando-se de provas experimentais com base em casos particulares ou recursos de ação – as chamadas *provas pragmáticas* segundo Balacheff (2000). Em anos mais avançados, pode evoluir para argumentações mais estruturadas, baseadas em propriedades previamente aceitas, culminando, idealmente, na construção de provas dedutivas. Todas essas ações pedagógicas são consideradas, no âmbito de nossa investigação, como constituintes de “processos de validação”. Registramos igualmente que a temática tem sido objeto de investigação atual, em especial nos cursos de licenciatura, como, por exemplo, nos trabalhos de Silva (2023) e Correia (2018, 2024).

Ao longo da história do ensino de geometria no Brasil, diferentes concepções sobre o que significa ‘fazer geometria’ e quais os objetivos da aprendizagem geométrica moldaram os ‘processos de validação’ privilegiados em sala de aula. As reformas curriculares, influenciadas por movimentos pedagógicos e por diferentes visões sobre a natureza do saber geométrico, também deixaram suas marcas nas formas como os alunos foram convidados a justificar suas ideias e a construir regimes de verdade em geometria.

Entretanto, nas primeiras apresentações do projeto, fomos questionados sobre a expressão “processos de validação”: o que entendemos por validação em geometria? Talvez a expressão “validação” seja exatamente nosso objeto de investigação, especialmente ao considerarmos, numa perspectiva histórica, como os entendimentos sobre o que significa validar foram sendo construídos e modificados em contextos de geometria escolar. Em outras palavras, o desafio analítico desta pesquisa reside em compreender como, ao longo do tempo, foram alteradas as maneiras, os procedimentos, as linguagens e as representações mobilizadas para oferecer ou elaborar justificativas em tarefas de geometria propostas no âmbito escolar - sintetizados por processos de validação. Essa investigação busca, portanto, analisar transformações nas formas de justificar em geometria, desde as explorações intuitivas e experimentais até as demonstrações formais, considerando como os diferentes fatores históricos, curriculares e pedagógicos influenciaram o que foi considerado uma validação aceitável em diferentes momentos do ensino de geometria no Brasil.

O presente artigo¹ circunscreve um recorte temporal (1930-1960) referente a um ano escolar específico – alunos de 13 anos de idade –, segmento que recebeu distintas denominações: 3º ano do 1º Ciclo do Curso Secundário (Reforma Francisco Campos de 1930) e 3º ano do Curso Ginásial (a partir da Reforma Capanema de 1942). Tomando como base uma perspectiva histórica, investigamos como os processos de validação foram propostos em diálogo com os ideários de dois movimentos internacionais que circularam no Brasil, no que concerne às propostas de introdução de uma geometria intuitiva como etapa propedêutica à geometria dedutiva. A pesquisa utiliza como fontes de investigação normativas educacionais e livros didáticos representativos dos períodos analisados. No primeiro período (1930 a 1950), a análise contextualiza o cenário brasileiro em geral e, subsequentemente, após a promulgação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 4.024/61), em 1961, momento em que os estados adquiriram autonomia para a organização curricular, o foco da análise se volta para o estado de São Paulo.

A delimitação temporal de 1930 a 1960 justifica-se por marcar o início da regularização do Ensino Secundário no Brasil. Anteriormente a 1930, o acesso ao ensino superior ocorria por meio de um regime misto, que combinava o ensino seriado oferecido por colégios secundários – tendo o Colégio Pedro II, fundado em 1838, como instituição paradigmática –, com exames parcelados (preparatórios) nos conteúdos de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. A década de 1960, por sua vez, representa outro momento significativo de transformação tanto no sistema educacional brasileiro quanto no ensino de matemática.

Antes de 1930, os livros adotados no Colégio Pedro II podem ser considerados referências para o Curso Secundário. Entre eles, durante a segunda metade do século XIX, estavam as obras compiladas por Cristiano Benedito Ottoni, senador do Império e professor de matemática da Academia Real dos Guardas-Marinha. O livro *Elementos de Geometria*, de Ottoni, constituiu uma referência central no Colégio Pedro II, sendo indicado nos programas de 1856, 1876, 1879 e 1881 (Valente, 2004). Uma breve análise do livro de Ottoni (1857) indica que, a partir da décima página, o autor introduz os conceitos de axioma, teorema, recíproca de um teorema, corolário, lema e problema. Em seguida, são apresentados três métodos de demonstração: demonstração direta, demonstração por absurdo e por superposição. A totalidade da obra desenvolve-se sob uma abordagem dedutiva, caracterizada pela presença de numerosos teoremas e suas respectivas demonstrações.

Valente (2000), ao analisar a circulação positivista nos rumos da educação brasileira por ocasião da República, toma como exemplo o livro *Os Elementos de Geometria* de Clairaut,

¹ Este artigo é uma versão revisada e ampliada de um estudo apresentado no *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 14), realizado em Bolzano, Itália, em fevereiro de 2025.

traduzido para o português em 1892. Essa obra desenvolvia uma geometria sem qualquer preocupação com o rigor matemático, numa abordagem intuitiva, a partir da necessidade prática de medir terrenos. Entretanto, o pesquisador conclui que “considerar o ensino da geometria de modo intuitivo e prático, a exemplo de Clairaut, foi algo que não fez escola. A geometria escolar vinha seguindo seu curso desde Ottoni com um acento no rigor geométrico e assim continuou” (Valente, 2000, p. 210).

Em síntese, podemos inferir que a geometria destinada ao Ensino Secundário brasileiro, ao longo do século XIX e até as primeiras décadas do século XX, caracterizava-se como uma geometria hipotético-dedutiva, com ênfase na demonstração de teoremas.

A partir de 1930, identifica-se a circulação em território nacional de dois ideários de âmbito internacional no período examinado: o primeiro, representado pela criação da *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM) no IV Congresso Internacional de Matemáticos, realizado na Itália em 1908; e o segundo, promovido pela Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE) no Seminário de *Royaumont*, na França, em 1959. No contexto brasileiro, esses movimentos foram caracterizados como iniciativas de modernização do ensino de matemática, reunindo representantes de diversos países, produzindo orientações curriculares e sendo apropriados ao cenário educacional nacional, tanto nas regulamentações quanto nos livros didáticos. A presente investigação busca responder às seguintes questões: – de que maneira as proposições dos movimentos internacionais foram apropriadas e ressignificadas no contexto brasileiro para a introdução do ensino de provas e demonstrações em geometria no curso secundário? Quais transformações podem ser observadas nas abordagens e nos exercícios introdutórios de provas e demonstrações para alunos de 13 anos de idade nos livros didáticos brasileiros no período analisado, em relação às apropriações dos movimentos internacionais?

O aporte teórico metodológico desta investigação fundamenta-se em pesquisas sobre a circulação internacional de ideias pedagógicas que, desde o século XIX, estabeleceram e mantiveram um extenso sistema de intercâmbios e observações mútuas, estruturados pelas missões pedagógicas (Matasci, 2016) e, a partir do século XX, os congressos científicos internacionais e a criação de comissões dedicadas à discussão de novos programas para o ensino de matemática possibilitaram a continuidade dessas transferências culturais, abrangendo a circulação de educadores, experiências, livros e saberes entre diferentes países.

Embora se reconheça a centralidade e a relevância da cultura europeia na gênese desses dois movimentos internacionais, liderados por matemáticos europeus influentes, os debates e as recomendações formuladas nesses fóruns alcançaram visibilidade global, transpondo o Atlântico e se tornando referências importantes para as reformas educacionais brasileiras. Cumpre destacar, contudo, que tais orientações foram objeto de adaptações aos contextos locais, considerando que

a força dos modelos culturais dominantes não anula o espaço de sua recepção [...], a imposição de disciplinas inéditas, a insinuação de novas submissões, a definição de novas regras de conduta sempre deve ceder ou negociar com as representações arraigadas e as tradições partilhadas (Chartier, 2009, p. 46-47).

O presente estudo tem como objetivo analisar o processo de apropriação² (Chartier, 1990) de dois importantes ideários modernizadores da cultura escolar brasileira. Abordando um

² A apropriação, tal como a entendemos, tem por objetivo uma história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais, culturais) e inscritas nas práticas específicas que as produzem (Chartier, 1990, p. 26).

período de aproximadamente 50 anos, a pesquisa foca nos processos de validação em geometria e, especificamente, na maneira como as provas e demonstrações geométricas eram introduzidas no ensino secundário para alunos a partir de 13 anos de idade. Com isso, busca-se identificar as dinâmicas de permanência, inovação e ressignificação das propostas internacionais no contexto nacional.

A contribuição deste estudo reside em não apenas inventariar conteúdos geométricos, mas em analisar a dinâmica das práticas de validação escolar no Brasil em um período de redefinição das orientações curriculares. Ao focalizar a introdução de provas e demonstrações para alunos de 13 anos, a pesquisa busca ampliar a compreensão sobre como a cultura escolar negociou, resistiu ou incorporou o rigor dedutivo e a experimentação intuitiva. Para desenvolver tal análise, o artigo está estruturado em quatro seções principais: inicialmente, apresenta-se o referencial teórico-metodológico baseado na história cultural e na circulação de ideias pedagógicas. Em seguida, examinam-se as normativas curriculares decorrentes dos dois movimentos de modernização e suas repercussões no cenário brasileiro. A terceira seção dedica-se à análise detalhada de quatro livros didáticos representativos, confrontando as prescrições oficiais com as práticas de validação propostas por autores como Euclides Roxo e Osvaldo Sangiorgi. Por fim, as considerações finais sintetizam as transformações observadas nas formas de justificar em geometria, evidenciando as tensões entre o ideário modernizador e a tradição escolar brasileira.

2 Primeiro movimento modernizador

Schubring (2003) assinala que as diretrizes oficiais da CIEM, sob a liderança de Félix Klein, preconizavam a inclusão de noções básicas de quantidades variáveis e dependência funcional nos conceitos matemáticos, concomitantemente a uma reorientação metodológica com ênfase na intuição e em aplicações práticas. Contudo, identificavam-se forças contrárias à retórica oficial, especialmente por parte das escolas secundárias clássicas na Itália, que rejeitavam as abordagens intuitivas em prol da busca pelo máximo rigor mediante o ensino axiomático da geometria. Tal cenário sugere que as propostas para o ensino da geometria não foram consensuais, refletindo um debate significativo entre uma perspectiva dedutiva e uma abordagem experimental.

Apesar de o Brasil não ter participado do IV Congresso Internacional de Matemática em Roma (1908), o professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia (1862-1919), do Colégio Pedro II – instituição de referência para a constituição do ensino secundário brasileiro –, representou o país no V Congresso, na Inglaterra, em 1912 (Schubring, 2003). No entanto, as discussões e propostas internacionais não foram efetivamente inseridas no ensino de matemática da comunidade brasileira, uma vez que não houve mudanças significativas nos programas do Colégio Pedro II durante as décadas de 1910 e 1920 (Valente, 2004).

Foi preciso aguardar a década de 1930 para que as propostas do 1º movimento modernizador do ensino de Matemática fossem incorporadas ao programa oficial do ensino secundário, com a Reforma Francisco Campos, em 1931. Esse processo ocorreu por intermédio de outro professor do Colégio Pedro II, Euclides Roxo (1890-1950), que introduziu, pela primeira vez, a disciplina Matemática como uma unidade integrada, reunindo aritmética, álgebra e geometria, em consonância com as recomendações de que:

Partindo da intuição viva e concreta, a feição lógica crescerá, a pouco e pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal; [...] os conhecimentos serão adquiridos, a princípio pela experimentação e pela percepção sensorial e, depois, lentamente, pelo raciocínio analítico. Assim, quanto à geometria, o estudo demonstrativo formal deve ser precedido de um curso propedêutico, destinado ao ensino intuitivo, de caráter

experimental e construtivo. (Bicudo, 1942, p. 157)

A citação precedente evidencia a persistência de uma geometria dedutiva, oriunda das práticas vigentes desde o século XIX, ao mesmo tempo em que ressalta a inovação introduzida nas recomendações: a inserção de uma geometria intuitiva, viva e concreta. Essa novidade representou um desafio a ser implementado pela nova regulamentação para o Ensino Secundário.

O programa de 1931 introduziu diversas inovações, que provocaram mudanças na concepção de ensino da época, suscitando intensos debates. Euclides Roxo foi alvo de críticas por parte de um público conservador, notadamente de seu colega catedrático do Colégio Pedro II, Almeida Lisboa. O *Jornal do Commercio* publicou diversos artigos que documentavam as polêmicas travadas entre os dois professores. O excerto a seguir é parte de uma das críticas proferidas por Lisboa no referido periódico:

O professor Euclides Roxo esqueceu qual a verdadeira finalidade da matemática na escola secundária. Seu principal destino não é uma colheita mais ou menos abundante de conhecimentos práticos e isolados. A Matemática é uma disciplina do espírito, uma inimitável e insubstituível educadora do raciocínio a que a mocidade deve ser submetida. (Almeida Lisboa, 1930³ *apud* Carvalho, 2003, p. 131)

A crítica de Lisboa concentrava-se na introdução de práticas intuitivas, concretas e experimentais no ensino. Segundo o professor, o Ensino Secundário deveria ser o momento dedicado ao desenvolvimento do raciocínio e da razão. Para ele, a geometria dedutiva seria fundamental para essa formação, constituindo, em sua visão, o pilar essencial da escola secundária.

A Reforma de 1931 teve curta duração e foi substituída em 1942 pela Reforma Capanema, mantendo a divisão entre geometria intuitiva e dedutiva. Já em 1951, com a Reforma Simões Filho, o ensino de geometria foi reduzido às séries finais. As três reformas prescreveram a geometria dedutiva, ou seja, a introdução ao estudo de provas e demonstrações em geometria para alunos de 13 anos, como mostra o Quadro 1.

Quadro 1: Geometria nos programas prescritos para alunos de 11 a 14 anos (1931-1951)

Reforma	Organização da Geometria	Orientações
1931	<i>Iniciação Geométrica</i> <i>Geometria</i>	- Partir da intuição para <i>atingir gradualmente</i> a exposição formal: da experimentação e percepção sensorial para o raciocínio analítico
1942	<i>Geometria Intuitiva</i> <i>Geometria Dedutiva</i>	- Geometria intuitiva como <i>transição suave</i> entre experiências com formas e concepção dedutiva da Geometria
1951	<i>Geometria</i> (alunos de 13 e 14 anos)	- <i>Despertar aos poucos</i> o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração

Fonte: Adaptado de Jahn e Leme da Silva (2023)

A análise do Quadro 1 sugere que, nas reformas de 1931 e 1942, a despeito das críticas às inovações pedagógicas, a geometria intuitiva foi incorporada como um espaço de preparação para a geometria dedutiva, em consonância com o movimento modernizador. Entretanto, em 1951, a abordagem experimental e intuitiva da geometria perdeu espaço no programa curricular.

³ Almeida Lisboa, Joaquim Ignácio de. Os programas de Matemática do Colégio Pedro II. *Jornal do Commercio*, Rio de Janeiro, 21 dez. 1930.

A análise das três normativas aponta resistências à introdução de uma geometria intuitiva e à incorporação plena dos preceitos modernizadores. Em 1951, essa resistência culminou na exclusão do espaço anteriormente reservado a uma preparação pautada em experiências, fundamental para subsidiar um processo de validação formal, que inclui o raciocínio analítico, concepções dedutivas e, sobretudo, a necessidade de provas e demonstrações.

3 Segundo movimento modernizador

De acordo com Kilpatrick (2012), o período entre 1950 e 1970 foi marcado por diversas tentativas de mudanças no ensino de matemática sob a denominação de “matemática moderna” (MM) ou “nova matemática”, com o objetivo de alinhar a matemática escolar à matemática científica do século XX. A criação e a elaboração de livros didáticos pelo *School Mathematics Study Group* (SMSG), em 1958, nos Estados Unidos da América (EUA), e a realização do Seminário de *Royaumont*, organizado pela Organização para Cooperação Econômica Europeia (OECE) em 1959, na França, seguido da publicação do Programa Moderno para Ensino Secundário, constituem marcos importantes para o contexto brasileiro.

O ensino de Geometria foi objeto de intensos debates, emergindo ao menos duas tendências significativas. A primeira, proposta por Birkhoff⁴, preconizava a modificação dos axiomas de Euclides, preservando a estrutura da geometria euclidiana. A segunda tendência recomendava o desenvolvimento da geometria por meio das transformações geométricas, abordagem que, em nosso entender, guarda relações com ideias de Felix Klein⁵.

Em 1960, o professor Osvaldo Sangiorgi (1927-2017), autor de livros didáticos de ampla circulação no Brasil, realizou estágio nos EUA. Ao retornar, em 1961, criou o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), em São Paulo, inspirado na perspectiva de Birkhoff. A primeira coleção de livros didáticos publicada com a abordagem moderna foi elaborada por Sangiorgi, alcançando grande repercussão, especialmente no estado de São Paulo (Valente, 2008). Concomitantemente, a segunda tendência da geometria, via transformações geométricas (TG), também encontrou espaço nos livros didáticos brasileiros. O estudo de Leme da Silva e Jahn (2024) analisou quatro livros didáticos de autores considerados líderes no Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil e concluiu pela existência de uma diversidade de abordagens: dois deles incluíam TG no apêndice; um apresentava um tratamento completo e formal de TG (com um dos principais autores tendo feito visitas a vários países europeus na década de 50); e um quarto incorporava apenas duas transformações (simetria axial e homotetia), visando integrá-las à geometria euclidiana, considerando seu potencial para facilitar o estudo das noções de congruência e semelhança de figuras.

Ainda em 1961, a LDB 4.024 descentralizou os programas nacionais, outorgando autonomia aos estados para a elaboração de seus próprios currículos. Nesse contexto, o estado de São Paulo foi pioneiro ao incorporar o ideário do MMM em seu programa, publicado em 1965 e objeto de discussão no âmbito do GEEM. O programa de 1965 retomou o estudo intuitivo da geometria apenas na 1ª série do curso ginásial, mantendo a geometria dedutiva na 3ª série, para alunos de 13 anos de idade.

Para investigar como as discussões e as propostas dos movimentos modernizadores se materializaram nos materiais didáticos da época, a seção seguinte se dedica à análise de quatro livros representativos do período compreendido entre 1930 e 1967, destinados ao ensino de

⁴ George David Birkhoff (1884-1944): matemático estadunidense; propôs uma axiomatização da geometria euclidiana alternativa à de Hilbert, consolidada em sua obra *Basic Geometry* (1941).

⁵ Felix Klein (1849-1925): matemático alemão; autor do Programa de Erlangen, que propôs a sistematização da geometria sob a ótica da teoria dos grupos e das transformações geométricas.

geometria para alunos de 13 anos.

4 Análise de provas e demonstrações nos livros didáticos

A presente investigação examina a abordagem de provas e demonstrações em dois conjuntos distintos de livros didáticos, organizados cronologicamente e alinhados aos movimentos de modernização do ensino de matemática no Brasil. A seleção deste *corpus* pautou-se por critérios de representatividade e circulação nacional. Foram selecionadas obras de autores que protagonizaram os debates curriculares de seus períodos: Euclides Roxo, articulador das ideias modernizadoras na década de 1930, e Osvaldo Sangiorgi, liderança central do MMM na década de 1960.

O estudo reconhece que a seleção das obras está situada no eixo Rio de Janeiro-São Paulo, polos que balizaram as principais reformas do período. Dessa forma, a investigação não pretende exaurir a totalidade da produção didática nacional, nem ignorar os regionalismos e as particularidades de um país de dimensões continentais como o Brasil, que poderiam apresentar dinâmicas de apropriação distintas. O objetivo, portanto, é balizar como os modelos de validação foram propostos em obras de significativa influência normativa da época, confrontando-as com as diretrizes nacionais vigentes.

O primeiro conjunto compreende as obras de Roxo, Mello e Souza e Thiré (1936, 1944) – doravante denominadas Livro 01 e Livro 02 –, que possibilita examinar as apropriações do primeiro movimento modernizador. O segundo conjunto abrange duas obras de Sangiorgi (1958, 1967) – referidas como Livro 03 e Livro 04 –, que permite analisar as apropriações trazidas pelo MMM. A ampla circulação dessas coleções, atestada por suas sucessivas edições, confere relevância à amostra para o entendimento da cultura escolar da época.

O acesso aos livros ocorreu por meio da digitalização das obras originais que se encontravam no CEMAT-GHEMAT Brasil⁶, por integrantes do grupo de pesquisa GEPGE⁷. Os arquivos obtidos nesse processo de digitalização foram formatados de modo a ter sua leitura facilitada em dispositivos eletrônicos e com a aplicação do Reconhecimento Ótico de Caracteres (OCR), possibilitando que o arquivo fosse pesquisável. Para garantir a fidedignidade, foi realizado o levantamento dos dados, cruzando a leitura qualitativa integral dos capítulos de geometria com buscas sistemáticas por termos-chave ('teorema', 'prova', 'demonstração', 'justificativa' e suas variações) nos arquivos digitais. Tal procedimento viabilizou o mapeamento exaustivo de situações de validação tanto no corpo teórico quanto nos exercícios.

Em termos metodológicos, os procedimentos analíticos foram estruturados em categorias que buscavam interpretar a natureza dos processos de validação: (i) o modo de introdução da geometria dedutiva, observando se a proposição decorre de atividade intuitiva ou experimental ou de apresentação axiomática; (ii) os métodos de prova empregados, com foco na linguagem e representações adotadas e na estrutura formal da prova; (iii) a análise de um caso exemplar, especificamente a demonstração do teorema dos ângulos da base de triângulos isósceles; e (iv) a tipologia e a quantidade de exercícios, distinguindo a aplicação direta de fórmulas da exigência de raciocínio hipotético-dedutivo.

5 Livros didáticos das décadas de 1930 e 1940

Os Livros 01 e 02 exibem notáveis similaridades na abordagem da geometria, dedicando

⁶ Centro de Documentação da Memória Científica e Pedagógica do Ensino da Matemática (<https://www.cemat-ghemat.com/>)

⁷ Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria Escolar: História e Formação de Professores, cadastrado no CNPq e liderado pela Profa. Maria Célia Leme da Silva.

aproximadamente metade de seu conteúdo a esse tema. Os autores apresentam uma introdução ao estudo da geometria dedutiva, constituída por um texto explicativo contendo definições e princípios de um sistema axiomático dedutivo para a geometria. Destacam-se os termos “proposição”, “axioma”, “postulado”, “teorema” e “definição”. A demonstração de um teorema “consiste em *provar* a proposição, mostrando, por meio de um encadeamento de raciocínios, que a tese resulta necessariamente da hipótese” (Roxo *et al.*, 1936, p. 202, grifo dos autores).

No Livro 01, os autores advertem que “não é possível fixar um método geral para a demonstração de todos os teoremas de Geometria” (Roxo *et al.*, 1936, p. 206), e anunciam a apresentação de diversas formas de demonstração (com destaque para a *demonstração pela redução ao absurdo*) nos capítulos subsequentes, visando, assim, promover o desenvolvimento do pensamento dedutivo. Por sua vez, no Livro 02, são introduzidos dois tópicos adicionais sobre validações matemáticas: “Métodos de demonstração”, que abrange provas diretas e indiretas, e “Redução ao absurdo”, ilustrado com exemplos de demonstrações. A distinção na abordagem entre os dois livros manifesta-se claramente nos exercícios propostos aos alunos.

O capítulo introdutório do Livro 01 encerra-se com uma lista de 12 proposições fundamentais admitidas sem demonstração. Os autores esclarecem que estas englobam “simples postulados; outras são teoremas já demonstrados; outras, finalmente, poderiam ser demonstradas, mas como não podemos ter, nesta fase do curso, a preocupação de um rigor absoluto, preferimos aceitá-las sem demonstração” (Roxo *et al.*, 1936, p. 209). No Livro 02, são apresentados 8 postulados (sendo 2 relativos à reta, 4 ao plano e 2 à invariabilidade das figuras), assumindo a função de um “conjunto de postulados” que fundamentam o desenvolvimento dedutivo da geometria nos capítulos subsequentes. Por se tratar de uma introdução à geometria dedutiva, em ambos os livros, o texto possui caráter essencialmente expositivo, contemplando definições e exemplos.

Em virtude da limitação de espaço imposta por este artigo, restringimos nossa análise detalhada ao estudo dos triângulos, tópico inaugural que aborda a demonstração em geometria nos livros examinados. Investigamos especificamente os aspectos concernentes à geometria dedutiva, incluindo a apresentação de teoremas e demonstrações, e a presença de práticas de validação (justificativas, argumentações, provas ou demonstrações) nos exercícios propostos aos discentes, conforme síntese quantitativa no Quadro 2. Uma diferença notável entre os dois volumes reside na quantidade de exercícios resolvidos e propostos⁸.

Quadro 2: Teoremas e exercícios de demonstração no estudo de triângulos

Livro	Propriedades Demonstradas	Exercícios de demonstração	Total de Exercícios
Livro 01 (década 1930)	9	3 propostos e 1 resolvido	4
Livro 02 (década 1940)	13	30	32

Fonte: Elaborado pelas autoras.

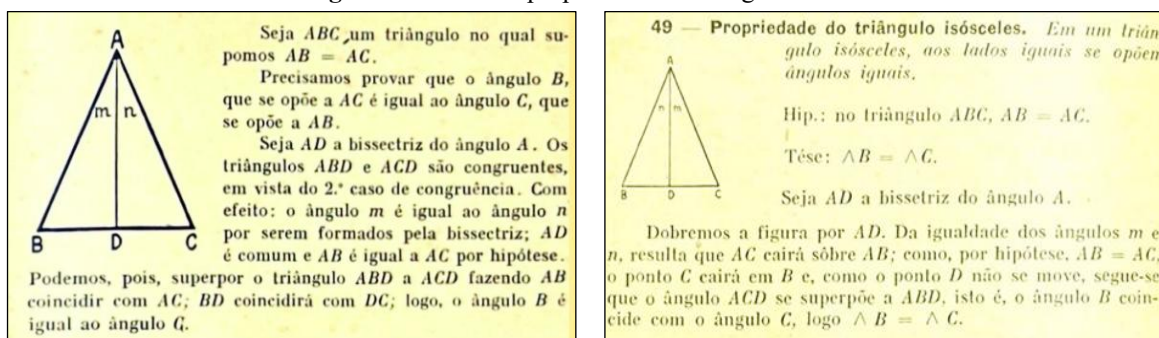
A análise comparativa entre os dois livros confirma as observações anteriores: constata-se um incremento no número de teoremas demonstrados e, de maneira significativa, uma expansão no conjunto de exercícios propostos em geral, com ênfase naqueles que demandam a elaboração de provas ou demonstrações. No Livro 02, verificamos a utilização dos termos “demonstrar”, “provar” e “mostrar” como sinônimos nos enunciados dos exercícios que

⁸ O Livro 01 traz indícios de que seja destinado a professores, enquanto o Livro 02 já anuncia, de maneira mais explícita, a destinação aos alunos. Essa diferença pode ser uma das razões para o reduzido número de exercícios no Livro 01.

requerem justificativa dedutiva.

No âmbito do estudo dos triângulos, a noção de congruência é introduzida, conjuntamente com os casos de congruência de triângulos, apresentados sob a forma de teoremas, todos demonstrados em ambos os livros. Outras propriedades de triângulos são subsequentemente abordadas, sendo a aplicação dos casos de congruência o método predominante para a elaboração de suas respectivas demonstrações. A Figura 1 ilustra a prova da propriedade da igualdade dos ângulos da base em um triângulo isósceles, apresentada comparativamente no Livro 01 (à esquerda) e no Livro 02 (à direita).

Figura 1: Provas de propriedade de triângulo isósceles



Fontes: Roxo *et al.* (1936, p. 235); Roxo *et al.* (1944, p. 168)

Notam-se algumas diferenças entre as provas. No Livro 01, os autores escrevem em língua natural, explicitam o ponto de partida e o que se deseja provar. A prova é justificada mobilizando o 2º caso de congruência, mas apela-se igualmente à “superposição” dos triângulos. Já no Livro 02, os termos “hipótese” e “tese”, ausentes no Livro 01, são explicitados, e a prova insere-se numa linguagem mais sintética; para indicar os ângulos, não se emprega a congruência de triângulos, a justificativa é sustentada pela intuição e uso de recursos de ação, como na expressão “Dobremos a figura” (Roxo *et al.*, 1944, p. 168).

Nos exercícios do Livro 02, antes dos alunos serem chamados a realizar provas ou demonstrações, são propostos exercícios como “Separar a hipótese e a tese em cada uma das seguintes proposições, traduzindo-as simbolicamente quando for possível” (Roxo *et al.*, 1944, p. 138), reforçando o ponto de partida e de chegada e a linguagem matemática.

Na análise das obras didáticas Livro 01 e Livro 02 não se identificam tarefas especificamente alinhadas à abordagem de uma *geometria intuitiva, viva e concreta*, conforme preconizavam as normativas educacionais do período em questão. Contudo, a proposição de exercícios que demandavam a separação entre hipótese e tese aos estudantes (década de 40) pode ser interpretada como um indicativo de preparação para a elaboração de demonstrações. De todo modo, os processos de validação em geometria encontram-se intrinsecamente vinculados à demonstração de teoremas, caracterizada pelo encadeamento lógico-dedutivo de argumentos que sustentam a validade do resultado almejado. Outro aspecto relevante a ser considerado é o número reduzido de exercícios direcionados aos alunos no Livro 01, o que pode sugerir que a prática de validação em geometria era concebida como uma atividade destinada aos docentes, e não como uma prática a ser internalizada pelos discentes. Em suma, nos livros analisados, a ênfase no ensino de geometria reside no processo de validação, o qual se materializa na demonstração de teoremas.

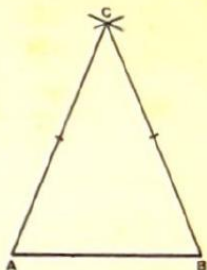
6 Livros didáticos das décadas de 1950 e 1960

Cabe notar que, no Livro 04, o estudo dos triângulos é feito antes da introdução da geometria dedutiva, em capítulo anterior, destinado à geometria intuitiva e experimental. Nele, não há demonstrações de teoremas, mas predominância de “exercícios exploratórios”, como a construção do triângulo isósceles e a exploração quanto a sua existência e das medidas dos ângulos da base (cf. Figura 3) para que o aluno “descubra” (ou conjecture) de maneira experimental as propriedades envolvidas.

Outra prática de natureza exploratória identificada na obra analisada reside na proposição de exercícios em que os alunos são instigados a construir triângulos, variando as condições de construção (lados e ângulos), e a conduzir comparações sistemáticas entre as figuras obtidas. O objetivo pedagógico subjacente a essa investigação prática é que os alunos possam comprovar empiricamente a congruência de triângulos em determinadas situações, possibilitando a posterior aceitação desses casos como axiomas e sua subsequente aplicação na dedução de outras propriedades geométricas.

Figura 3: Exercício exploratório sobre triângulos isósceles

1. *Construção de triângulos isósceles:* Considere um qualquer segmento \overline{AB} como base do triângulo isósceles que você quer construir. Escolhido um comprimento dado pela abertura de um compasso, basta determinar um dos pontos C^* , intersecção das circunferências traçadas quando se fixa a ponta do compasso respectivamente nos pontos A e B .



a) Será que existe sempre o ponto C ?

b) Quando é que “não existe”?

c) Por que o triângulo obtido é isósceles, quando existe C ?

2. *Um resultado importantíssimo para os triângulos isósceles:*
De cada triângulo isósceles que você construiu, meça com o transferidor os ângulos da base. Que observou? Se um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede 40° , por exemplo, quanto medirá o outro ângulo da base? Será também 40° ? “Explore” esse resultado com outros triângulos isósceles.

Fonte: Sangiorgi (1967, p. 207)

A demonstração do teorema dos ângulos da base de um triângulo isósceles ilustra as mudanças propostas por Sangiorgi (1967) no Livro 04. Somente depois de ter proposto inúmeros exercícios exploratórios, a prova é apresentada. Como mencionado, os casos de congruência, provados como teoremas nos Livros 01, 02 e 03, são considerados postulados no Livro 04, depois de terem sido estudados nos exercícios exploratórios.

Para além do estudo introdutório, o autor utiliza novas estratégias metodológicas para as provas, como a demonstração à esquerda na Figura 4 que separa os triângulos, organiza as justificativas e, ao final, escreve “como queríamos demonstrar”; a demonstração por meio de esquemas desenhados (Figura 4, à direita) e a demonstração em duas colunas (*afirmações e justificativas*, cf. Figura 4, central)

Figura 4: Demonstrações de propriedade de triângulos isósceles

Se for a bissetriz, esta irá dividir o ângulo \hat{C} em dois ângulos congruentes, isto é, de medidas iguais ($m = n$), ensejando a formação dos triângulos: ACH e CHB , nos quais figuram os dois ângulos \hat{A} e \hat{B} que nos interessam.

Confrontando esses triângulos, observa-se que eles possuem:

- $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (por hipótese) (L)
- $m = n$ (por construção da bissetriz) (A)
- $\overline{CH} \cong \overline{CH}$ (por ser lado comum) (L)

e, portanto, são triângulos congruentes pelo 1.º Caso (L.A.L.).

Dêsse modo os ângulos \hat{A} e \hat{B} , como correspondentes de triângulos congruentes, são congruentes, isto é: $\hat{A} \cong \hat{B}$, como queríamos demonstrar.

"SE um triângulo é isósceles, ENTÃO os ângulos da base são congruentes"

sua demonstração será esquematizada da seguinte maneira:

DEMONSTRAÇÃO:	
Afirmações	Justificações
1) \overline{CH} é bissetriz de \hat{C} , ou seja, $m = n$	1) Todo ângulo admite uma bissetriz e, portanto, pode-se construir \overline{CH} .
2) $\Delta ACH \cong \Delta BCH$	2) Caso L.A.L. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} \cong \overline{BC} \text{ (p/hipótese)} \\ m = n \text{ (p/construção)} \\ \overline{CH} \cong \overline{CH} \text{ (lado comum)} \end{array} \right. (*)$
3) $\hat{A} \cong \hat{B}$	3) Ângulos que se correspondem em triângulos congruentes
	c.q.d.

Fonte: Sangiorgi (1967, pp. 240-241)

A maneira como Sangiorgi (1967) propõe o estudo de provas e demonstrações para alunos de 13 anos é inédita no Brasil e, muito provavelmente, foi concebida com base no contato que ele estabeleceu nos EUA com os grupos de estudo, com livros didáticos norte-americanos e com pesquisadores envolvidos na Matemática Moderna.

A pesquisa de Herbst (2002) oferece um contexto relevante para a análise da inovação de Sangiorgi, ao documentar a consolidação da estrutura de demonstração em duas colunas como uma prática pedagógica comum nos livros didáticos norte-americanos desde o início do século XX e mantendo-se presente por um longo período. No cenário educacional brasileiro, Sangiorgi se destaca como um dos pioneiros na introdução desse formato específico. Essa adoção, muito provavelmente alinhada ao seu objetivo de apresentar diversas modalidades de construção de uma demonstração, evidencia sua apropriação de suas experiências nos Estados Unidos. Contudo, é importante ressaltar que a representação em duas colunas, ao enfatizar a formalização do raciocínio dedutivo através da explicitação da estrutura lógica das etapas e suas respectivas justificativas, representa apenas uma das estratégias inovadoras empregadas por Sangiorgi, que também introduziu mais de um método para demonstrar o mesmo teorema, afastando-se da memorização mecânica e buscando desenvolver nos alunos a habilidade e a autonomia para construir provas.

Sangiorgi (1967) também destaca no Livro 04: "Não 'decore' demonstração de teorema! Valorize-se, usando qualquer dos métodos apresentados. Dê o seu próprio 'toque' ao empregar tais métodos e você estará realizando-se em Matemática!" (Sangiorgi, 1967, p. 258). Certamente, o convite para o aluno realizar sua própria prova significa explicitar que o aluno pode criar formas pessoais de provar teoremas, que não aquelas realizadas pelos livros ou apresentadas pelos professores.

O exame dos Livros 03 e 04 aponta evidências de mudança nas práticas de validação em geometria. Enquanto o livro 03 enfatiza processos mais formais, apresentando um significativo aumento na quantidade de demonstrações de teoremas comparativamente aos

Livros 01 e 02, reiterando o processo de validar como uma maneira similar à prática dos matemáticos, com certo grau de rigor e baseada na lógica matemática, de maneira única e estruturada, o Livro 04 rompe com esse modelo e propõe a inserção de práticas inovadoras, como os exercícios exploratórios, que convidam os alunos a realizarem “provas” (indicadas entre aspas), que significava validar resultados encontrados em situações particulares. É o que tentamos exemplificar com as práticas de natureza exploratória já mencionadas para experimentação, por meio de construções geométricas, de condições de existência e propriedades de triângulos isósceles e dos casos de congruência de triângulos.

7 Considerações finais

Embora as normativas a partir de 1930 registrem a circulação das ideias pedagógicas do primeiro movimento modernizador, com destaque para a necessidade de um estudo intuitivo introdutório, ao final da década de 1950, a herança de um ensino secundário dominado por uma geometria dedutiva prevalecia, oferecendo resistências à apropriação de novas formas de validar em geometria. Há indícios de que os alunos recorriam à memorização de teoremas e de suas demonstrações, com pouco ou nenhum estudo experimental prévio (Búrigo, 2015).

A análise de livros didáticos também indica um número expressivo de provas geométricas nos Livros 02 e 03, das décadas de 1940 e 1950, acompanhado de muitos exercícios que demandavam a realização de demonstrações pelos alunos. Em resumo, o ensino de geometria, no final dos anos 1950 e início dos 1960, caracterizou-se por uma forte ênfase no processo lógico-dedutivo, o que, conforme apontado por Jahn e Leme da Silva (2023), culminava frequentemente na memorização de teoremas pelos estudantes.

O segundo movimento, referente ao ideário do MMM, parece ter apresentado processos de apropriação diferenciados nos livros didáticos analisados. No que diz respeito à introdução de provas e demonstrações em geometria, elas não receberam destaque nas normativas de 1965, tampouco se observou uma ênfase na inserção da geometria intuitiva ou em mudanças significativas nos processos de validação geométrica. De outra parte, o Livro 04, que anunciava a abordagem moderna, indicou claramente uma tentativa de ruptura com práticas sedimentadas de reprodução de demonstrações de inúmeros teoremas, sem experimentação prévia e, possivelmente, sem significado para os alunos, transformando-se em memorizações de teoremas “prontos”, simplesmente “revelados” a eles.

Ao analisarmos o período das décadas de 1930 a 1950, identificamos a circulação de ideias do 1º movimento, as quais chegaram a ser incorporadas nos programas; todavia, a persistência de práticas tradicionais no ensino de geometria, construídas e representadas desde o século XIX, se sobressaem. O exame dos livros didáticos permite inferir que as provas euclidianas eram consideradas o padrão de rigor, mesmo com a geometria intuitiva sendo recomendada nas normatizações de 1930 e 1940. Tratou-se de um momento de tensão entre concepções modernizadoras e tradicionais, expresso pelos professores, autores de livros didáticos e alunos, conforme identificado nos debates da comunidade educacional, explicitando as complexidades dos processos de apropriação e resistência.

Tudo indica que foram necessárias apropriações de um 2º movimento, evidenciado a partir de 1960, para que os livros didáticos pudessem trazer propostas diferenciadas para o ensino de provas e demonstrações. O livro 04 de Sangiorgi pode ser considerado um manual inovador no que se refere ao tratamento de provas e demonstrações. Certamente, o contato com a cultura norte-americana e com o debate internacional que circulou durante o MMM respaldou a proposta modernizadora de Sangiorgi, favorecendo a circulação e apropriação de novas práticas.

Sangiorgi destacou-se por introduzir uma abordagem inovadora ao apresentar diversos métodos para a demonstração de um mesmo teorema, o que divergia significativamente da ênfase tradicional na memorização mecânica. Essa flexibilidade metodológica visava incentivar os estudantes a desenvolverem a capacidade de construir provas como uma habilidade fundamental. Entre as estratégias didáticas que ele empregou, notam-se dois formatos particularmente inovadores. Um deles corresponde à prova de duas colunas, um modelo que ganhou popularidade nos Estados Unidos, durante a década de 1960 (Herbst, 2002), e, além disso, priorizava a explicitação das etapas lógicas e suas respectivas justificativas, sublinhando a estrutura dedutiva das provas/demonstrações. O outro formato diz respeito ao 'esquema desenhado', conforme o próprio autor mencionava, inspirado nos trabalhos de Lucienne Félix⁹. Concebidas como ferramentas didáticas, ambas as práticas visavam promover a atividade de provar ou demonstrar como uma tarefa central pode ser significativa para os alunos em seu processo de aprendizagem. Tais inovações por parte de Sangiorgi evidenciam as apropriações singulares que ele realizou a partir de seu contato com o ideário modernizador em voga tanto nos Estados Unidos quanto na Europa.

A análise comparativa dos livros didáticos examinados sinaliza, portanto, uma trajetória de incorporação gradual, mas notavelmente não linear, de elementos modernizadores no ensino da geometria. A obra de Sangiorgi emerge como um ponto de inflexão crucial nesse percurso, ao propor e implementar metodologias que priorizavam a compreensão ativa e a construção do conhecimento geométrico pelos estudantes. Essa abordagem representou um contraponto marcante à mera reprodução passiva de demonstrações de teoremas previamente estabelecidos. A trajetória aqui observada ilustra as complexas dinâmicas de circulação, as resistências encontradas e os distintos processos de apropriação de ideias pedagógicas ao longo do tempo no contexto brasileiro. Essa rica narrativa histórica oferece subsídios valiosos para as discussões contemporâneas acerca do ensino de geometria e, em especial, da maneira como as provas e demonstrações são abordadas na educação matemática. Reafirma-se, assim, a importância de se buscar um equilíbrio entre o rigor lógico inerente à matemática e a necessidade de exploração, intuição e visualização, elementos essenciais para um aprendizado significativo. Isso tudo considerando-se sempre os intrincados processos de apropriação que se desenrolam em diversos contextos culturais.

O projeto segue investigando os processos de validação em geometria, em particular, após a década de 1960, que, pelos resultados ora sinalizados, indicam mudanças nas práticas de validar em geometria, para alunos de 13 anos de idade. Da mesma forma, outros momentos históricos, segmentos de ensino, estão previstos para serem investigados, além da ampliação e cotejamento de outras fontes de pesquisa histórica.

Agradecimentos

O estudo recebe apoio financeiro do CNPq (Edital Universal, projeto n. 05027/2023-0).

Conflitos de Interesse

- A autoria declara não haver conflitos de interesse que possam influenciar os resultados da pesquisa apresentada no artigo.

Declaração de Disponibilidade dos Dados

⁹ Lucienne Félix (1901-1944), matemática formada pela École Normale de Sèvres. Foi uma figura proeminente no ensino de matemática na França e na divulgação das ideias da Matemática Moderna. Atuou na *Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM), grupo coordenado por Caleb Gattegno, e teve papel fundamental na expansão desse ideário, inclusive com visitas ao Brasil na década de 1960.

- O artigo foi elaborado a partir de um estudo teórico, por isso não há dados a serem disponibilizados.

Referências

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colômbia: Universidad de los Andes.
- Bicudo, J. C. (1942). *O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941 inclusive)*. São Paulo, SP: Associação dos Inspectores Federais do Ensino Secundário do Estado de São Paulo.
- Búrigo, E. Z. (2015). Professores de Matemática deveriam estudar história? In: *Anais do XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática* (pp. 1-14). Porto Alegre, RS.
- Carvalho, J. B. P. (2003). Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: W. R. Valente (Org.). *Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil*. (Biblioteca do Educador Matemático. Coleção SBEM, v. 1, pp. 86-158). São Paulo, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Chartier, R. (1990). *A história cultural: entre práticas e representações*. Rio de Janeiro, RJ: Bertrand Brasil.
- Chartier, R. (2009). *A história ou a leitura do tempo*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora.
- Correia, J. C. C. (2018). *Argumentação, Prova e Demonstração: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no Curso de Licenciatura em Matemática*. 218 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.
- Correia, J. C. C. (2024). *De Ingressantes Concluintes / Recém-egressos: uma investigação sobre argumentação, prova e demonstração na formação inicial de professores de Matemática*. 357 f. Tese [Doutorado]. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.
- Herbst, P. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 283–312. <https://doi.org/10.1023/A:1020264906740>
- Jahn, A. P., & Leme da Silva, M. C. (2023). Don't memorize theorem proofs! The Modern Geometry of Osvaldo Sangiorgi. *RIPeM*, 13(4), 1-19. <https://doi.org/10.37001/ripem.v13i4.3622>
- Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education*, 44, 563-571. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0393-2>
- Leme da Silva, M. C., & Jahn, A. P. (2024). Transformações Geométricas no Ensino de Geometria: diferentes apropriações na Matemática Moderna. *Bolema*, 38(e230289), 1-21. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289>
- Matasci, D. A. (2016). A França, a escola republicana e o exterior: perspectivas para uma história internacional da educação no século 19. *História da Educação*, 20(50), 139-155. <https://doi.org/10.1590/2236-3459/66203>
- Ottoni, C. B. (1857). *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilinea* (2. ed.). Rio de Janeiro, RJ: Eduardo & Henrique Laemmert.
- Roxo, E.; Thiré, C. & Mello e Souza, J. C. (1936). *Curso de Matemática: 3º ano* (3. ed.). Rio de Janeiro, RJ: Livraria Francisco Alves.

- Roxo, E.; Mello e Souza, J. C. & Thiré, C. (1944). *Matemática Ginásial: 3ª série*. Rio de Janeiro, RJ: Livraria Francisco Alves.
- Sangiorgi, O. (1958). *Matemática para a Terceira Série Ginásial*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Sangiorgi, O. (1967). *Matemática Curso Moderno: 3º Volume para os Ginásios*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional, 1967.
- Schubring, G. O. (2003). Primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha. In: W. R., Valente (Org.). *Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil*. (Biblioteca do Educador Matemático. Coleção SBEM, v. 1, pp. 11-45). São Paulo, SP: SBEM.
- Silva, A. L. B. C. (2023). *Incentivando o uso de Argumentação e Provas nos cursos de Licenciatura em Matemática*. 76 f. Dissertação [Mestrado]. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.
- Valente, W. R. (2000). Positivismo e matemática escolar nos livros didáticos no advento da República. *Cadernos de Pesquisa*, 109, 201-212. <https://doi.org/10.1590/S0100-15742000000100009>
- Valente, W. R. (2004). (Ed.). *O nascimento da Matemática do Ginásio*. São Paulo, SP: Editora Annablume.
- Valente, W. R. (2008). (Ed.). *Oswaldo Sangiorgi: um professor moderno*. São Paulo, SP: Editora Annablume.