

Estratégias utilizadas por estudantes da licenciatura em matemática para resolver problemas da geometria analítica: a eminente dificuldade da articulação entre as representações das secções cônicas

Jhonatan de Holanda Cavalcanti

Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco

Gravatá, PE — Brasil

✉ jhonatan.cavalcanti@ufpe.br

id 0000-0002-4684-0131

Ricardo Tiburcio dos Santos

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Natal, RN — Brasil

✉ rico.tiburcio@gmail.com

id 0000-0001-8601-3993

Franck Gilbert René Bellemain

Universidade Federal de Pernambuco

Recife, PE — Brasil

✉ franck.bellemain@ufpe.br

id 0000-0001-5358-2057



2238-0345 

10.37001/ripem.v16i2.4674 

Recebido • 21/07/2025

Aprovado • 17/05/2026

Publicado • 28/08/2026

Editoria • Edvnete Souza de Alencar 

Veridiana Rezende 

Resumo: Considerando o contexto de investigações no ensino da Matemática apoiado por tecnologias digitais, apresentamos resultados de uma pesquisa que teve como objetivo discutir dificuldades que licenciandos em Matemática possuem na Geometria Analítica, especificamente nas secções cônicas, sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A justificativa desta investigação ancora-se na necessidade de compreender como futuros professores articulam conceitos das secções cônicas, observando registros e transformações das representações semióticas. Analisamos qualitativamente respostas dos estudantes no primeiro instrumento avaliativo da disciplina Matemática III, ministrada pelo segundo autor na Universidade Federal de Pernambuco. A análise integra revisões de literatura das pesquisas de Doutorado e Pós-Doutorado dos autores, com foco no ensino e aprendizagem matemática com uso de tecnologias. Constatamos dificuldades nas conversões entre representações algébrica e geométrica das secções cônicas, reflexo de lacunas do ensino básico.

Palavras-chave: Representações Semióticas. Dificuldades. Secções Cônicas. Geometria Analítica.

Strategies used by mathematics teacher education students to solve analytic geometry problems: the prominent difficulty in articulating representations of conic sections

Abstract: Considering the context of research in Mathematics education supported by digital technologies, we present results of a study that aimed to discuss difficulties that undergraduate Mathematics students have in Analytic Geometry, specifically in conic sections, from the perspective of the Theory of Semiotic Representation Registers. The justification for this investigation is based on the need to understand how future teachers articulate concepts of conic sections, observing registers and transformations of semiotic representations. We qualitatively analyzed students' responses in the first assessment instrument of the Mathematics III course, taught by the second author at the Federal University of Pernambuco. The analysis integrates literature reviews from the authors' Doctoral and Postdoctoral research, focusing on mathematics teaching and learning with the use of technologies. We identified difficulties in

the conversion between algebraic and geometric representations of conic sections, reflecting gaps in basic education.

Keywords: Semiotic Representations. Difficulties. Conic Sections. Analytic Geometry.

Estratégias utilizadas por estudantes de la licenciatura en Matemáticas para resolver problemas de Geometría Analítica: la eminente dificultad en la articulación entre las representaciones de las secciones cónicas

Resumen: Considerando el contexto de investigaciones en la enseñanza de las Matemáticas apoyadas por tecnologías digitales, presentamos resultados de una investigación que tuvo como objetivo discutir las dificultades que los estudiantes de licenciatura en Matemáticas presentan en Geometría Analítica, específicamente en las secciones cónicas, desde la perspectiva de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. La justificación de esta investigación se fundamenta en la necesidad de comprender cómo los futuros profesores articulan conceptos de las secciones cónicas, observando registros y transformaciones de las representaciones semióticas. Analizamos cualitativamente las respuestas de los estudiantes en el primer instrumento evaluativo de la asignatura Matemáticas III, impartida por el segundo autor en la Universidad Federal de Pernambuco. El análisis integra revisiones de literatura de investigaciones de Doctorado y Posdoctorado de los autores, con énfasis en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con uso de tecnologías. Constatamos dificultades en las conversiones entre representaciones algebraica y geométrica de las secciones cónicas, reflejo de lagunas en la educación básica.

Palabras clave: Representaciones Semióticas. Dificultades. Secciones Cónicas. Geometría Analítica.

1 Introdução

O presente texto discute algumas observações oriundas de práticas de ensino na Geometria Analítica dos autores, em conexão com os resultados de uma pesquisa de mestrado (Cavalcanti, 2023), com foco na articulação dos registros de representações semióticas de objetos geométricos. Dessa forma, expomos aqui reflexões sobre as dificuldades dos estudantes da Licenciatura em Matemática na articulação entre as diferentes representações das seções cônicas.

Deste modo, torna-se relevante considerar a práxis dos autores deste texto quanto ao ensino de conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Superior e na Educação Básica. No que diz respeito à questão da articulação entre diversas representações das seções cônicas, os autores percebem a falta de contextualização e de aplicações desses conhecimentos no ensino. Dado o caráter abstrato dos conhecimentos matemáticos, desde a Educação Básica, surgem questionamentos dos discentes sobre a utilidade da Matemática: “professor, para que irei utilizar isso no futuro?” – indaga o estudante do 1º Ano do Ensino Médio observando a representação gráfica de uma parábola exposta no quadro branco.

Neste sentido, ao concluir o Ensino Médio, com dúvidas sobre as possíveis aplicações dos conhecimentos matemáticos, os estudantes ingressam no Ensino Superior com lacunas em Matemática básica para cursar as disciplinas iniciais – o que pode ser verificado nos altos índices de reprovação nas disciplinas dos primeiros períodos das Licenciaturas em Matemática (Costa & Diniz, 2021; Rosa, Santos & Mendes, 2019). No intuito de minimizar os impactos do Ensino Fundamental e Médio que não forneceu os subsídios necessários para o aprendizado dos conhecimentos das disciplinas de Cálculo, de Álgebra, dentre outras (Garzella, 2013), as coordenações dos cursos proponham reorganizações curriculares das Licenciaturas em

Matemática, oferecendo disciplinas de Pré-Cálculo e Matemática Básica.

O estudante que questionava a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos, ainda no ingresso numa licenciatura em matemática, encontra nas disciplinas de Cálculo, Álgebra e Geometria Analítica, por exemplo, listas de exercícios para resolver com questões que enfatizam a manipulação algébrica de equações, sem considerar possíveis aplicações desses conhecimentos, conforme Benevides e Bellemain (2021) apontam. Essa experiência tende a consolidar uma prática de ensino baseada na repetição de procedimentos. Mas será esse o perfil de professor de Matemática que se almeja formar? Se durante sua formação esse professor apenas aprendeu a resolver problemas sem compreender o porquê das operações ou sem enxergar suas aplicações, é natural que reproduza esse mesmo modelo em sala de aula. Diante dessa conjuntura, essa reflexão nos conduz a questionar os caminhos seguidos pelos currículos de formação docente e o impacto de uma abordagem descontextualizada sobre a prática pedagógica futura.

Torna-se pertinente, nesse contexto, explicitar a relevância desta investigação no âmbito da Educação Matemática, especialmente no que se refere à formação inicial de professores. Parte-se do pressuposto de que a compreensão das seções cônicas não se limita ao domínio de procedimentos algébricos, mas envolve a capacidade de articular diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. No entanto, observa-se que tais articulações nem sempre são efetivamente construídas ao longo da formação, o que pode comprometer tanto a aprendizagem dos licenciandos quanto sua futura atuação docente.

Assim, este estudo justifica-se pela necessidade de analisar como esses sujeitos mobilizam e relacionam distintos registros de representação semiótica ao lidar com tais conceitos, buscando compreender as dificuldades envolvidas nesse processo. Ao evidenciar esses aspectos, a pesquisa pretende contribuir para o debate sobre a formação de professores de Matemática, oferecendo subsídios para a elaboração de práticas pedagógicas que favoreçam a articulação entre representações, bem como para o uso de recursos, inclusive tecnológicos, que potencializam o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

Reconhecemos, portanto, que o estudo das seções cônicas é um tema que abrange diferentes dimensões, abordagens e componentes da Geometria Analítica, envolvendo propriedades algébricas, geométricas e diversas aplicações. No entanto, este trabalho delimita seu escopo às representações semióticas dessas curvas, com foco nas dificuldades enfrentadas pelos licenciandos nas transformações entre os registros. Com isso, além das questões contextuais e de aplicabilidade, discutimos aqui as representações dos objetos geométricos fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval (1993, 2003, 2011). O pesquisador, psicólogo e filósofo, investiga na área da Psicologia Cognitiva, com foco na aprendizagem de conhecimentos matemáticos, como se dá a formação de conceitos pelos sujeitos aprendentes.

A TRRS, no entanto, extrapola os limites da Matemática, oferecendo uma perspectiva epistemológica e cognitiva sobre como o ser humano compreende e representa o mundo. Para o autor, é essencial considerar as representações semióticas no estudo da cognição matemática, distinguindo entre problemas de ordem epistemológica, ligados ao acesso aos objetos matemáticos e aos problemas de ordem cognitiva, relacionados ao funcionamento do pensamento matemático (Duval, 2003). Nesse sentido, a TRRS se apresenta como um caminho promissor para pensar o ensino de Matemática de forma mais conectada às aplicações contextualizadas.

Diante desse contexto, é objetivo deste texto discutir as dificuldades que os estudantes da Licenciatura em Matemática possuem na Geometria Analítica, especificamente nas seções

cônicas, considerando a transição da Educação Básica para o Ensino Superior, sob a ótica da TRRS. Assim, são discutidas algumas características do currículo da Licenciatura em Matemática da UFPE/CAA, observando os indicativos sobre o ensino e a aprendizagem das seções cônicas e verificando as dificuldades apresentadas pelos discentes em uma avaliação da disciplina Matemática III, aplicada pelo segundo autor deste artigo.

Sendo assim, o presente texto está estruturado em seções da seguinte maneira: além da introdução, na primeira seção, discutem-se encaminhamentos das pesquisas quanto ao ensino dos conteúdos da Geometria Analítica na Educação Básica e no Ensino Superior. Em sequência, debatemos características do currículo da referida Licenciatura e, por último, apresentamos, discutimos e tecemos reflexões quanto às resoluções que os estudantes apresentaram no instrumento de coleta de dados.

2 Lugar da geometria analítica na educação básica e no ensino superior

Abrangendo e conectando conceitos da Álgebra e da Geometria, a Geometria Analítica, em síntese, estuda as figuras geométricas utilizando métodos algébricos, em que, diante desse contexto, objetos da Geometria Plana são representados no Plano Cartesiano fazendo uso de equações e coordenadas. Dessa forma, os estudantes, nos diversos níveis, podem desenvolver habilidades de análise e raciocínio geométrico através de abordagens algébricas. Por outro lado, a representação geométrica também pode fornecer significados a procedimentos algébricos, evidenciando que a articulação entre Álgebra e Geometria se dá em uma via de dois sentidos.

Siqueira (2019) salienta justamente esse aspecto, a relevância da articulação entre a Álgebra e a Geometria na Geometria Analítica, destacando as diversas aplicações nas demais áreas do conhecimento, como na Física, nas Engenharias e na Computação. Essa via de mão dupla, em que a Álgebra permite compreender a Geometria e, ao mesmo tempo, a Geometria fornece significados a procedimentos algébricos, constitui uma característica central da Geometria Analítica, tornando-a uma linguagem eficaz de modelagem. Essa linguagem possibilita a construção de elos com outros conteúdos, como as funções, cujas representações gráficas reforçam seu caráter integrador, considerando a reta na função afim e a parábola na função quadrática, por exemplo. Diante da integração dessas características, os estudantes desenvolvem uma visão mais ampla da Matemática, notando como diferentes áreas se conectam e aplicando, assim, os conhecimentos construídos a problemas do cotidiano.

No âmbito específico, o estudo das seções cônicas ocupa papel central, podendo ser compreendido sob as perspectivas geométrica e algébrica. Essas curvas podem ser definidas como o conjunto de pontos que satisfazem uma equação do segundo grau em duas variáveis. A análise dos coeficientes permite classificá-las como elipse, parábola ou hipérbole (Lima, 2013). A passagem da forma geral para a reduzida, por meio do completamento de quadrados, permite identificar elementos como vértices, focos e eixos (Boulos & Camargo, 2005). Assim, a compreensão não se restringe à manipulação simbólica, mas envolve a interpretação das relações entre aspectos algébricos e geométricos.

Desse modo, a articulação entre os registros algébrico e geométrico revela-se como uma dimensão estrutural do próprio objeto matemático, e não apenas como uma estratégia didática, o que reforça a necessidade de abordagens que favoreçam a compreensão dessas relações no processo de ensino e aprendizagem.

Os documentos norteadores da Educação Básica também sugerem que seja realizada a integração entre os conhecimentos: os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2000), inicialmente, destacam a importância de um tema permitir conexões entre múltiplos conceitos matemáticos e exemplificam, justamente, as propriedades das retas e das parábolas estudadas

na Geometria Analítica como propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Em continuidade, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017) destaca a importância de integrar conhecimentos geométricos e algébricos, quando propõe a abordagem de temas como equações de retas, circunferências e outras curvas, incluindo as seções cônicas, através da análise algébrica e geométrica, destacando assim a aproximação da Álgebra com a Geometria desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da Geometria Analítica.

De acordo com Dallemole, Groenwald e Ruiz (2014), no contexto do ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, muitos alunos enfrentam dificuldades ao lidar com diferentes representações gráficas e algébricas de curvas planas. Em um estudo realizado com licenciandos em Matemática da Universidade Luterana do Brasil/Canoas, os autores, fundamentados na TRRS, identificaram que tais dificuldades decorrem, principalmente, do desconhecimento das correspondências semióticas entre os registros gráficos e a escrita algébrica.

Com base nisso, Dallemole, Groenwald e Ruiz (2014) ressaltam a importância de utilizar diferentes registros de representação e de desenvolver práticas didáticas que promovam a articulação e a conversão entre esses registros.

Especificamente no que se refere ao campo de investigação apresentado neste texto, no Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Licenciatura (PPC) (UFPE, 2017), existe a perspectiva da integração dos conteúdos matemáticos e aplicações em outras áreas das Ciências, relacionando os assuntos com situações-problema, tanto no componente *Matemática III*, que trata de conteúdos de geometria Analítica, Plana e Espacial, nessa ordem, quanto no componente *Geometria Analítica*. Contudo, não há um indicativo claro, nas ementas desses componentes, quanto ao trabalho com as representações, articulações e conversões entre os objetos matemáticos da Geometria Analítica.

O referido PPC (UFPE, 2017) orienta que o ensino das seções cônicas nas disciplinas de Matemática III e Geometria Analítica deve ser realizado dando destaque a aplicações em outras áreas das ciências e relacionando os assuntos com situações-problema. O que pode ser observado nos objetivos do componente Matemática III:

Objetivo geral: Estudar Geometria Analítica no plano e no espaço, dando ênfase aos aspectos geométricos e as traduções em: coordenadas cartesianas e lugares geométricos; visando o embasamento das demais disciplinas do curso que dela dependem. Objetivos específicos: Ao final do semestre o aluno deverá ser capaz de: Resolver problemas específicos de Geometria Analítica Plana e Espacial. Desenvolver e aprofundar conteúdos relacionados com a Geometria Analítica Plana e Espacial (UFPE, 2017, p. 26).

Diante dessa informação, vemos que há uma eminente preocupação em contextualizar e utilizar estratégias para promover a aprendizagem dos conteúdos envolvidos enfatizando a relevância destes para situações de uso. Entretanto, mesmo com a aparente proximidade entre os documentos orientadores da Educação Básica e Ensino Superior, percebemos uma ruptura no ensino, como examina Cavalcanti (2023). A partir da análise de livros didáticos, essa descontinuidade torna-se visível, especialmente no que se refere ao estudo da função afim e ao estudo da reta na Geometria Analítica. Nas obras analisadas, não há referências ao objeto matemático reta sob as abordagens da Geometria Analítica e da Álgebra, negligenciando, assim, uma possibilidade de integração, conforme recomendado pelos documentos curriculares (Cavalcanti, 2023).

Ratificando o exposto em Cavalcanti (2023), Silva (2017) mostra que o tópico de

funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente, necessária ao domínio do pensamento matemático avançado, inerente ao estudo de Cálculo. Para o autor, as dificuldades na transição da Educação Básica para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, poderiam ser reduzidas por abordagens adequadas de tópicos do Ensino Médio, tais como a Geometria, em particular, que aborda problemas que podem preparar para a representação de problemas típicos de máximos e mínimos e de taxas relacionadas (Silva, 2017).

Com isso, a transição entre os níveis de ensino (Educação Básica e Ensino Superior) precisa acontecer buscando uma continuidade no desenvolvimento de conceitos e integrando conteúdos, proporcionando assim aos estudantes, uma variedade de aplicações práticas da Geometria Analítica em outras temáticas da Matemática e em outras áreas de ensino, com o intuito de cessar tal desfragmentação do conhecimento matemático.

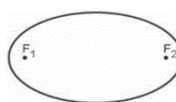
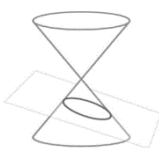
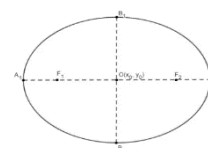
Reiterando essa conjuntura, Paula e Bittar (2012), ao investigarem como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática mobilizam e articulam conceitos de Geometria Plana e Álgebra no estudo da Geometria Analítica, destacam que as maiores dificuldades dos participantes ocorreram no tratamento das funções afim e quadrática. De acordo com os autores, no caso da função afim, os acadêmicos não conseguiam relacionar as propriedades que determinam a inclinação da reta, já na função quadrática, enfrentavam obstáculos para compreender a abertura do gráfico (Paula & Bittar, 2012). Tais dificuldades, segundo Paula e Bittar (2012), poderiam ter sido minimizadas com uma formação mais adequada no Ensino Médio.

Assim, é possível observar que as dificuldades representacionais dos objetos da Geometria Analítica, bem como a aplicabilidade e contextualização configuram-se como dificultadores na transição do Ensino Médio para o Superior.

Estudos como os de Bordallo (2011) e Sousa (2016) evidenciam que o ensino das secções cônicas tem privilegiado o tratamento algébrico das equações, em detrimento da articulação entre diferentes formas de representação, como a algébrica, geométrica e cartesiana. Segundo Sousa (2016), essa abordagem contribui para o surgimento de dificuldades recorrentes, especialmente no que se refere à interpretação e à coordenação de diferentes tipos de informação. Além disso, tais entraves podem estar associados a práticas fragmentadas ao longo da Educação Básica, o que repercute diretamente na compreensão desses conteúdos no Ensino Superior.

Como ilustração das diferentes formas de representação de uma mesma curva, apresentamos a seguir um exemplo envolvendo a elipse:

Quadro 1: Algumas representações de uma Elipse

Representações de uma Elipse	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Algébrica	 Plana
 Espacial	 Cartesiana

Fonte: Acervo dos Autores.

Diante desse cenário, apoiamo-nos na TRRS, que, segundo Duval (2011), considera a

natureza abstrata dos objetos matemáticos (conceitos) e as dificuldades dos alunos na compreensão deles, assim como a natureza dessas dificuldades. Por isto, o autor argumenta que é por meio das representações semióticas que se pode externar as representações mentais sobre esses objetos matemáticos, de forma que possam ser explorados, comunicados e operados (Duval, 2011).

Entretanto, se a matemática é uma ciência abstrata, e se os objetos de conhecimento da mesma são construções mentais, como tais objetos podem ser uma realidade conhecida pelo indivíduo que almeja aprendê-los? Para Duval (2003), não há outro caminho senão por meio dos registros de representação semiótica e suas transformações.

Para entender melhor alguns aspectos da teoria, seu papel e contribuições para o ensino e para a aprendizagem, discutiremos nesta sessão as três atividades cognitivas fundamentais inerentes à representação: a primeira diz respeito à produção de representação semiótica, a segunda e a terceira consistem nas transformações, denominadas tratamento e conversão, conforme é explicitado por Duval (1993):

- a) A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula etc. (Duval, 1993, p. 271).
- b) O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro (Duval, 1993, p. 272).
- c) A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter) (Duval, 1993, p. 272).

Temos assim, inicialmente, a construção da primeira atividade cognitiva: a produção da representação semiótica com os símbolos, signos e significados dos elementos de cada representação. Após isso, o tratamento (interno a cada representação) que consiste em permanecer no mesmo registro utilizando os significados pertinentes aos registros escolhidos e, por último, a conversão, quando ocorre a passagem de uma representação para outra.

Considerando as possíveis representações das curvas cônicas apresentadas neste texto (algébrica, geométrica plana, espacial e cartesiana), de acordo com a TRRS, esse conhecimento pode ser compreendido estabelecendo relações entre essas representações para que o estudante não confunda o objeto com a sua representação e consiga *transitar* entre elas.

Com base nos pressupostos da TRRS, Duval (2012) afirma que a compreensão em Matemática exige a distinção entre o objeto matemático e suas representações. Nessa perspectiva, a disponibilidade de diferentes registros é fundamental, pois permite reconhecer o objeto em cada uma de suas representações, evitando sua confusão com a forma que o representa. Além desse aspecto, Duval (2003) ressalta que a utilização de múltiplos registros supre as limitações de uma única forma de representação, que frequentemente não contempla todas as particularidades do objeto matemático.

Dessa forma, ao ser identificado, por meio de distintos registros, o objeto matemático torna-se acessível, uma vez que, conforme Duval (2003), seu acesso não se dá de forma direta, mas por meio das representações semióticas. Diante do exposto, apresentamos na sessão seguinte a metodologia do estudo realizado bem como os procedimentos utilizados na análise dos protocolos dos estudantes da Licenciatura em Matemática. As análises foram conduzidas

considerando os encaminhamentos da TRRS, já discutida neste estudo e, além disso, foram levados em conta os resultados de pesquisas da área.

3 Metodologia da pesquisa: experimento com estudantes da Licenciatura em Matemática

A pesquisa aqui discutida integrou a análise da ementa do componente curricular *Matemática III*, presente na Licenciatura em Matemática da UFPE/CAA, com o objetivo de observar os encaminhamentos e orientações expressos nesse documento. Além disso, foi analisado o PPC do referido curso, com o intuito de compreender os indicativos metodológicos voltados ao ensino ao longo da graduação, de maneira geral.

Buscando compreender as dificuldades dos estudantes no estudo da Geometria Analítica, especialmente no que se refere às representações semióticas e às aplicações dos conteúdos relacionados às seções cônicas, foram analisadas algumas das respostas obtidas no primeiro instrumento avaliativo da disciplina Matemática III, ministrada no semestre letivo 2022.1 pelo segundo autor deste texto. Tal componente curricular contempla, em sua ementa, conteúdos introdutórios de Geometria Analítica e um aprofundamento nas Geometrias Plana e Espacial, conforme previsto no documento institucional da disciplina.

O componente foi ofertado entre os meses de julho e outubro de 2022, com carga horária total de 60 horas-aula, em encontros presenciais realizados às sextas-feiras, das 19h às 22h. O estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, com caráter exploratório e descritivo, conforme a classificação proposta por Gil (2017), por buscar compreender e analisar as dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação ao objeto investigado.

Os participantes da pesquisa foram os 25 estudantes regularmente matriculados na disciplina Matemática III, ofertada no semestre letivo 2022.1, no curso de Licenciatura em Matemática da UFPE/CAA. Trata-se, portanto, de um estudo com abordagem censitária, uma vez que considerou a totalidade dos estudantes da turma. Todos os estudantes foram convidados a participar da pesquisa, sendo considerados, para fins de análise, aqueles que realizaram a primeira avaliação escrita do componente curricular, a qual se constituiu como instrumento de coleta de dados deste estudo. A participação dos estudantes ocorreu no contexto regular das atividades da disciplina, sendo preservado o anonimato dos participantes na análise e apresentação dos dados.

Diante do objetivo de identificar dificuldades conceituais e representacionais enfrentadas pelos estudantes, adotamos a TRRS, base teórica que permite analisar como os sujeitos mobilizam e convertem nas questões propostas diferentes registros de representação diante da compreensão de objetos matemáticos. Nessa perspectiva, o instrumento avaliativo deste estudo foi concebido à luz da TRRS, ao propor atividades que incentivam os estudantes a produzir, tratar e converter diferentes registros de representação. As questões envolvem, por exemplo, a identificação e reescrita de equações de cônicas em suas formas reduzidas, a análise geométrica de figuras no plano cartesiano e a construção gráfica de curvas, como circunferências e elipses, promovendo a articulação entre os registros algébrico, geométrico e gráfico.

Nesse contexto, o uso de ferramentas como o *GeoGebra* foi considerado como potencial recurso de apoio, podendo auxiliar os estudantes na compreensão dos objetos matemáticos para além de uma única forma de representação, em consonância com os pressupostos da TRRS.

No que se refere ao tratamento dos dados produzidos nessa conjuntura, buscamos organizar a análise das respostas realizando uma leitura interpretativa das produções dos estudantes, destacando a recorrência de dificuldades observadas. Em acréscimo, visando

ampliar a compreensão dos dados analisados, diante do ensino da Matemática com a utilização de recursos tecnológicos digitais, ancoramos-nos na Engenharia Didático-Informática (EDI), difundida e veiculada nos estudos de Tiburcio (2016, 2020) e Tiburcio e Bellemain (2021, 2018).

A EDI, conforme Tiburcio (2020), é uma metodologia para a concepção de software educativo, fundamentada na articulação dos procedimentos metodológicos e reflexões teóricas da Engenharia de Software, oriunda da Ciência da Computação e da Engenharia Didática, pautada nos estudos da Didática da Matemática.

Mesmo não sendo uma pesquisa com foco no desenvolvimento de softwares educacionais, justificamos a utilização desse referencial ao analisar as dificuldades dos estudantes quanto aos recursos tecnológicos na questão representacional dos objetos matemáticos. Considerando as dificuldades representacionais já discutidas neste texto, com a EDI, é possível oportunizar uma análise das estratégias mobilizadas pelos estudantes sob a perspectiva das dimensões Cognitiva, Didática, Epistemológica e Informática, que estão no cerne do referencial, a fim de apresentar soluções tecnológicas para a superação das dificuldades elencadas.

Tal fato justifica-se porque, em uma das etapas da EDI, temos as Análises Prévias, momento em que, de acordo com Tiburcio (2020), deve ser efetuado um levantamento com o objetivo de compreender os desdobramentos das dimensões didática, epistemológica, cognitiva e informática do conhecimento a ser trabalhado no software.

Baseando-se nesse contexto, destacamos que a utilização da EDI assegura que o software não seja empregado de maneira meramente instrumental, mas sim com intencionalidade, visando a necessidade do objeto matemático em questão, visto que o uso do artefato está alicerçado em uma estrutura teórico-metodológica que considera não apenas a funcionalidade do recurso computacional, mas também o seu papel na construção e mobilização dos elementos matemáticos. Almejamos, assim, que o software utilizado sob a ótica da EDI, a partir das suas dimensões, atenda as demandas do objeto matemático em questão, respeitando suas especificidades, atentando-se ainda para as dificuldades dos estudantes e aos objetivos formativos da prática docente.

É relevante destacar que nesta investigação analisa-se apenas um momento da sala de aula, o momento avaliativo, não sendo considerado, para essa circunstância, todo o contexto macro das situações de ensino relacionadas, mas sim, quais foram as dificuldades apresentadas pelos estudantes matriculados no componente Matemática III da UFPE/CAA, na I Avaliação do componente curricular.

Tal avaliação, fora nosso instrumento de coleta de dados, versava sobre conteúdos introdutórios da Geometria Analítica, baseando-se na TRRS, como podemos observar no Quadro 2, o qual expõe as questões, acompanhadas dos respectivos conteúdos e objetivos correspondentes.

Quadro 2: Questões propostas na I Avaliação

Questões propostas	Conteúdos	Objetivos
1. Na figura, a reta r tem equação $x + 2y - 4 = 0$. Determine a área da região triangular AOB.	Equação da reta; Coordenadas cartesianas; Localização de pontos na reta numérica; Área do triângulo.	Localizar as coordenadas dos pontos dados considerando a equação da reta dada, para, a partir deles,



		calcular a área do triângulo.
2. Num paralelogramo ABCD, M (1, -2) é o ponto de encontro das diagonais AC e BD. Sabe-se que A (2, 3) e B (6, 4) são dois vértices consecutivos. Uma vez que as diagonais se cortam mutuamente ao meio, determine as coordenadas dos vértices C e D.	Ponto médio de um segmento; Diagonais de um paralelogramo; Coordenadas cartesianas.	Localizar as coordenadas dos pontos desconhecidos a partir dos respectivos pontos médios considerando as informações dadas.
3. Identifique e escreva cada curva a seguir na sua forma reduzida: a) $9x^2 - y^2 - 36x - 8y + 11 = 0$ b) $x^2 - 2x - y + 4 = 0$	Manipulação algébrica de equações; Formato algébrico de uma curva; Relações entre representações algébricas e geométricas das secções cônicas.	Reconhecer, a partir da manipulação algébrica, o formato canônico das equações das secções cônicas.
4. Dois dos vértices de um quadrilátero são os focos da elipse de equação $x^2 + 5y^2 = 20$. Os outros dois vértices são as extremidades do eixo menor da elipse. Calcule a área desse quadrilátero.	Elementos de um quadrilátero e de uma elipse; Conversão de representações; Área de um quadrilátero.	Relacionar elementos de figuras geométricas planas com as secções cônicas.
5. Esboce (utilizando caneta/lápis e papel e com o auxílio do Geogebra, caso necessário) a representação gráfica da curva $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$. (Identificando todos os seus elementos: origem, focos (se houver), vértices (se houver), reta diretriz (se houver).	Elementos de uma curva; Representação geométrica de uma curva; Conversão de representações.	Representar graficamente uma secção cônica a partir dos elementos de sua equação normal.
6. Represente graficamente a circunferência de centro C (0, 0) e raio r, em que r é a metade de sua idade.	Elementos de uma curva; Representação geométrica de uma curva; Conversão de representações.	Representar graficamente uma secção cônica a partir dos elementos de sua equação normal.

Fonte: Acervo dos Autores

Desse modo, com a aplicação da I Avaliação do componente, que se configurou como instrumento de coleta de dados deste estudo, analisamos as estratégias dos estudantes sob a ótica da TRRS, da EDI e dos encaminhamentos dos orientadores curriculares. A análise dos dados será apresentada na próxima sessão.

4 Análise e discussão dos dados

Adentrando na análise dos dados, buscamos discutir algumas das respostas apresentadas pelos estudantes da disciplina Matemática III, componente curricular da Licenciatura em Matemática da UFPE/CAA. A avaliação aplicada contempla seis questões que abordam

conteúdos centrais da Geometria Analítica, com ênfase nas secções cônicas e em situações que exigem a articulação entre diferentes registros de representação, conforme propõe a TRRS. As questões, em sua maioria, envolvem a necessidade de conversão entre registros, como, por exemplo, da linguagem algébrica para a representação gráfica, e de articulação simultânea desses registros, especialmente na identificação e no esboço de curvas como parábolas, elipses e circunferências.

Considerando que as resoluções poderiam ser apoiadas por softwares, como o *GeoGebra*, conforme mencionado em uma das questões, recorremos à EDI, na perspectiva de refletir acerca do uso desses artefatos. Nesse contexto, a EDI permite-nos investigar o potencial de tais artefatos no ensino, diante da busca de integrá-los às especificidades do objeto matemático, favorecendo, por exemplo, a visualização e a manipulação de suas representações.

Assim, relacionamos as resoluções dos estudantes com princípios da TRRS, com a EDI, na perspectiva do uso de artefatos, e com dificuldades apresentadas pelos próprios discentes no decorrer do Ensino Médio. Vale ressaltar que 11 estudantes dos 25 matriculados fizeram a atividade proposta, sendo assim, o quantitativo que investigamos nesta intervenção, denominando-os, em nosso estudo, como A1, A2, A3,..., A11.

A questão 01 tinha como objetivo identificar as coordenadas dos pontos abordados tomando a equação da reta dada, a fim de, a partir desses pontos, calcular a área do triângulo. Tal situação exigia que os alunos compreendessem previamente conteúdos como equação da reta, coordenadas cartesianas, localização de pontos na reta numérica e área do triângulo. Ao analisarmos os dados, notamos que todos os estudantes responderam corretamente, exceto o aluno A5, que não apresentou solução, não sendo possível assim um detalhamento de análise.

Na questão 02, o propósito era que, a partir das informações dadas, os estudantes localizassem as coordenadas dos pontos desconhecidos através dos respectivos pontos médios, em que, para resolver a situação proposta, deveriam ter um conhecimento prévio acerca do ponto médio de um segmento, das diagonais de um paralelogramo e das coordenadas cartesianas. Do mesmo modo da situação anterior, todos os estudantes responderam corretamente essa questão 02, com exceção do estudante A5, que não apresentou solução. Como visamos analisar as respostas erradas dos estudantes, pela ausência de dados, não concentramos nossos esforços nas questões 01 e 02.

Buscando reconhecer o formato canônico das equações das secções cônicas através da manipulação algébrica, a questão 03, em ambos os ícones (A e B), exigia que os estudantes soubessem, além de manipular algebricamente as equações, identificar o formato algébrico de uma curva e as relações entre as representações algébricas e geométricas das secções cônicas. Como se observa a seguir, diversos estudantes tiveram dificuldade nessa questão, principalmente pela falta de compreensão na manipulação algébrica.

Figura 1: Resolução apresentada pelo Estudante A2 acerca da questão 03, ícone A

$$\begin{aligned}
 3.a) \quad & 9x^2 - y^2 - 36x - 8y + 11 = 0 \\
 & 9x^2 - 36x + 36 - y^2 - 8y + 16 = -11 + 36 + 16 \\
 & (3x-6)^2 - (y-4)^2 = 52 - 11 \\
 & (3x-6)^2 - (y-4)^2 = 41 \\
 & \frac{(3x-6)^2}{41} - \frac{(y-4)^2}{41} = 1 \quad \text{hipérbole.}
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos Autores.

Como podemos notar na Figura 1, ao manipular a equação dada, o estudante A2 comete um erro quando simplifica o trinômio na tentativa de transformá-lo no quadrado da diferença entre dois termos, desconsiderando o sinal negativo que antecede o parêntese. Tal situação, sob a ótica da TRRS, caracteriza-se como uma transformação por *tratamento*, uma vez que envolve operações realizadas no interior de um mesmo registro de representação, neste caso, o algébrico. Conforme aponta Duval (2003), esse tipo de transformação exige o domínio das regras próprias de manipulação simbólica, o que implica não apenas a aplicação mecânica de procedimentos, mas a compreensão das relações estruturais entre os elementos da expressão. Nesse sentido, o erro cometido pelo estudante evidencia fragilidades nesse domínio, indicando possíveis lacunas na aprendizagem de conteúdos que são trabalhados desde os anos finais do Ensino Fundamental, como a fatoração e o reconhecimento de produtos notáveis.

Por outro lado, mesmo diante dessas dificuldades no tratamento algébrico, o estudante A2 conseguiu reconhecer a representação geométrica correspondente, identificando uma hipérbole como resultado. Esse aspecto revela que, embora haja limitações no interior do registro algébrico, o estudante mobiliza, ainda que parcialmente, a articulação entre registros, o que, na perspectiva da TRRS, constitui um elemento fundamental para a compreensão dos objetos matemáticos.

Conforme Duval (2003) indica, um fator que pode influenciar para que os estudantes tenham dificuldades em manipulações desse tipo, na transformação por tratamento, é a complexidade das operações dentro de um registro, visto a necessidade do entendimento das regras de manipulação. Os entraves surgem, muitas vezes, pelos estudantes não conseguirem visualizar a conexão entre as diferentes etapas da manipulação, aspecto que leva a dificuldades na aplicação das regras.

Nessa perspectiva, a BNCC (Brasil, 2017) orienta que, no Ensino Fundamental, os estudantes devem ser levados a compreender essa manipulação exigida na questão a partir dos processos de fatoração de expressões algébricas, baseando-se nas suas relações com os produtos notáveis.

Figura 2: Resolução apresentada pelos estudantes A3 e A4 acerca da questão 03, ícone A.

Resolução apresentada pelo estudante A3

Handwritten student work for A4. The work shows the following steps:

$$\begin{aligned}
 & a) \quad 9x^2 - y^2 - 36x - 8y + 11 = 0 \\
 & \quad 9x^2 - 36x - y^2 - 8y + 11 = 0 \\
 & \quad 9x^2 - 36x + \dots - y^2 - 8y + \dots + 11 = 0 \\
 & \quad 9x^2 - 36x - 6^2 - y^2 - 8y + 4^2 + 11 = 0 \\
 & \quad (3x-6)^2 - (y+4)^2 + 11 - 36 + 16 = 0 \\
 & \quad (3x-6)^2 - (y+4)^2 - 9 = 0 \\
 & \quad (3x-6)^2 - (y+4)^2 = 9 \\
 & \quad \frac{(3x-6)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{9} = \frac{9}{9} \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1
 \end{aligned}$$

Resolução apresentada pelo estudante A4

Handwritten student work for A3. The work shows the following steps:

$$\begin{aligned}
 & 3: a) \quad 9x^2 - y^2 - 36x - 8y + 11 = 0 \\
 & \quad 9x^2 - 36x - y^2 - 8y + 11 = 0 \\
 & \quad 9x^2 - 36x + \dots - y^2 - 8y + \dots + 11 = 0 \\
 & \quad 9x^2 - 36x - 6^2 - y^2 - 8y + 4^2 + 11 = 0 \\
 & \quad (3x-6)^2 - (y+4)^2 + 11 - 36 + 16 = 0 \\
 & \quad (3x-6)^2 - (y+4)^2 - 9 = 0 \\
 & \quad (3x-6)^2 - (y+4)^2 = 9 \\
 & \quad \frac{(3x-6)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{9} = \frac{9}{9} \\
 & \quad \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos Autores.

A Figura 2 expõe as respostas dos alunos A3 e A4, os quais adotaram procedimentos algébricos semelhantes na resolução da questão. Podemos notar que tais estudantes, além de terem tido dificuldade na manipulação algébrica da equação, não conseguindo, assim, encontrar o formato algébrico correto da curva, não identificaram o tipo de curva, ou seja, não relacionaram a representação algébrica com sua respectiva representação geométrica, fator esse, que na perspectiva da TRRS, caracteriza-se como um entrave na transformação por conversão. Por possuírem estruturas e elementos diferentes, para que os estudantes consigam converter uma expressão algébrica em uma representação geométrica é necessário um entendimento, tanto das especificidades da equação quanto do modo como essas características se manifestam graficamente, sendo assim essa conexão um aspecto importante no processo (Duval, 2003).

A BNCC (Brasil, 2017) ressalta a importância na exploração desse contexto, ao orientar que os estudantes devem ser estimulados a explorar mais de um registro de representação, visando escolher as representações mais apropriadas a cada situação, relacionando-as e convertendo-as sempre que necessário. No entanto, como apontam Simonetti e Moretti (2021), apesar de existirem aproximações entre as diretrizes da BNCC (Brasil, 2017) e a TRRS, observa-se a presença de distorções conceituais, além da própria estrutura do documento, que, segundo os autores, por ser centrada em competências e habilidades, enfraquece o papel

formativo e o desenvolvimento intelectual mais amplo que a aprendizagem matemática deveria promover (Simonetti & Moretti, 2021).

Figura 3: Resolução apresentada pelo Estudante A5 acerca da questão 03, ícone A

$$\begin{aligned}
 &3(x^2 - 4x + 2) - (y^2 - 2y + 1) = 0 \\
 &3x^2 - 12x + 6 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\
 &3x^2 - 12x - y^2 + 2y + 5 = 0 \\
 &3(x^2 - 4x + 2) - (y^2 - 2y + 1) = 0 \\
 &3(x-2)^2 - (y-1)^2 = 9 \\
 &3(x-2)^2 - (y-1)^2 = 9 \\
 &3(x-2)^2 - (y-1)^2 = 9 \\
 &3(x-2)^2 - (y-1)^2 = 9
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos Autores.

De forma semelhante aos estudantes A3 e A4, o estudante A5 apresentou dificuldades no desenvolvimento da questão, como podemos observar na Figura 3, tanto no cenário da transformação por tratamento quanto na conversão das representações, ao não indicar o tipo de curva.

Antes de adentrar no próximo item, no ícone B da questão 03, é importante salientar que essa situação teve o mesmo objetivo do ícone A, conforme expomos anteriormente. Analisando as respostas dadas pelos alunos no item B, continuamos constatando erros que possivelmente são provenientes do Ensino Básico, como poderemos verificar a seguir.

Figura 4: Resolução apresentada pelo Estudante A3 acerca da questão 03, ícone B

$$\begin{aligned}
 &b) x^2 - 2x - y + 4 = 0 \\
 &x^2 - 2x - \quad - y + 4 = 0 \\
 &x^2 - 2x - 1 - y + 4 = 0 \\
 &(x-2)^2 - 1 - y + 4 = 0 \\
 &(x-2)^2 + 3 - y = 0 \\
 &(x-2)^2 - y = -3 \quad (-1) \\
 &y - (x-2)^2 = 3 \Rightarrow \frac{y}{3} - \frac{(x-2)^2}{3} = 1
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos Autores.

Na Figura 4, temos a resposta feita pelo aluno A3, o qual, ao buscar manipular algebricamente a equação, efetua de maneira errada a simplificação do trinômio, transformando-o no quadrado da diferença entre dois termos equivocadamente. Vale ressaltar que esse é um exemplo de transformação por tratamento, na perspectiva da TRRS. Provavelmente por conta dessa dificuldade, o estudante em questão não descreveu a forma algébrica correta da curva, aspecto que resultou na não indicação do tipo de curva. Novamente apoiando-se na TRRS, nesse cenário, o discente não converteu as representações ao não relacionar a representação algébrica com sua respectiva representação geométrica.

Outro fator que podemos notar é que o estudante A3, ao incluir o número no 1º membro, a fim de formar a expressão algébrica de três termos, o trinômio, não inseriu o elemento no outro membro da equação, possivelmente, por uma dificuldade em reconhecer a relação de

igualdade que não é alterada ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os dois membros por um mesmo número, contexto presente na Educação Básica, a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, como indica a BNCC (Brasil, 2017).

Figura 5: Resolução apresentada pelo Estudante A11 acerca da questão 03, ícone B

Handwritten student work for Figure 5. The top line shows the equation $x^2 - 2x + 1 =$ followed by a box containing the number 1. The bottom line shows the equation $x - 2 \cdot x \cdot 1 \rightarrow (x - 1)^2 = (y - 4)$ followed by the word "Parábola".

Fonte: Acervo dos Autores.

Do mesmo jeito decorreu o aluno A11, o qual teve dificuldade na propriedade da igualdade de equação, ao não inserir no 2º membro o mesmo número que adicionou no 1º, como podemos analisar na Figura 5.

Figura 6: Resolução apresentada pelo Estudante A5 acerca da questão 03, ícone B

Handwritten student work for Figure 6. The work shows a series of algebraic manipulations for the equation $x^2 - 2x - y = 4$. The steps are: $x^2 - 2x - y = 4$, $x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 - y = 4$, $(x - 7)^2 - y = 4 + 7$, $(x - 7)^2 - y = 5$, and finally $\frac{(x - 7)^2}{5} - \frac{y}{5} = \frac{5}{5}$. A box is drawn around the final equation.

Fonte: Acervo dos Autores.

Na Figura 6, temos a resolução do estudante A5 em relação a essa mesma questão. Nessa situação, o aluno, diferente dos anteriores, mostrando compreender a relação de igualdade, adicionou o número 1 nos dois membros da equação, com o intuito de encontrar o trinômio, para posteriormente simplificar em um quadrado da diferença. Contudo, não conseguiu encontrar a equação reduzida correta, por manipular de forma equivocada o número 4 (em destaque na Figura 6), desconsiderando o sinal. Possivelmente, por conta desse erro na manipulação, o aluno A5 não encontrou a forma reduzida correta, não determinando, assim, o tipo de curva. Portanto, o estudante não converteu as representações, provavelmente, por não compreender a relação da representação algébrica com sua respectiva representação geométrica.

Nesse contexto, concordamos com Freitas (2002), quando o autor indica que esse tipo de erro, na *passagem* dos números para outro membro, acontece pela restrição do seu ensino a simples regra de *passar e mudar o sinal do número*, tornando-se um ato mecanizado, excluindo do processo reflexões importantes, como a ideia de equivalência entre os termos e o uso da operação inversa, por exemplo.

Figura 6: Resolução apresentada pelo Estudante A6 acerca da questão 03, ícone B

$$\begin{aligned}
 b) \quad & x^2 - 2x - y + 4 = 0 \\
 & (x-1)^2 - y = -4 + 1 \\
 & (x-1)^2 - y = -3 \\
 & \frac{(x-1)^2 - y}{-3} = \frac{-3}{-3} \\
 & \boxed{\frac{(x-1)^2 - y}{-3} = 1} \quad \text{Parábola}
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos Autores.

O estudante A6, como mostra a Figura 6, desenvolveu a manipulação algébrica exigida na questão 03, ícone B, de maneira correta, contudo não resultou na forma reduzida da curva $(x-1)^2 = y-3$. Mesmo assim, através da expressão algébrica que encontrou, equivalente a forma reduzida, o estudante conseguiu identificar a representação geométrica da curva, conjuntura importante diante dos pressupostos da TRRS, acerca da ideia de conversão de representações.

Figura 7: Resolução apresentada pelos estudantes A7 e A9 acerca da questão 03, ícone B

Resolução apresentada pelo estudante A7
$ \begin{aligned} w) \quad & x^2 - 2x - y + 4 = 0 \\ & \boxed{y = x^2 - 2x + 4} \\ & \text{parábola} \end{aligned} $
Resolução apresentada pelo estudante A9
$ \begin{aligned} b) \quad & x^2 - 2x - y + 4 = 0 \\ & x^2 - 2x + 4 = y \\ & \boxed{y = x^2 - 2x + 4} \\ & \text{Parábola} \end{aligned} $

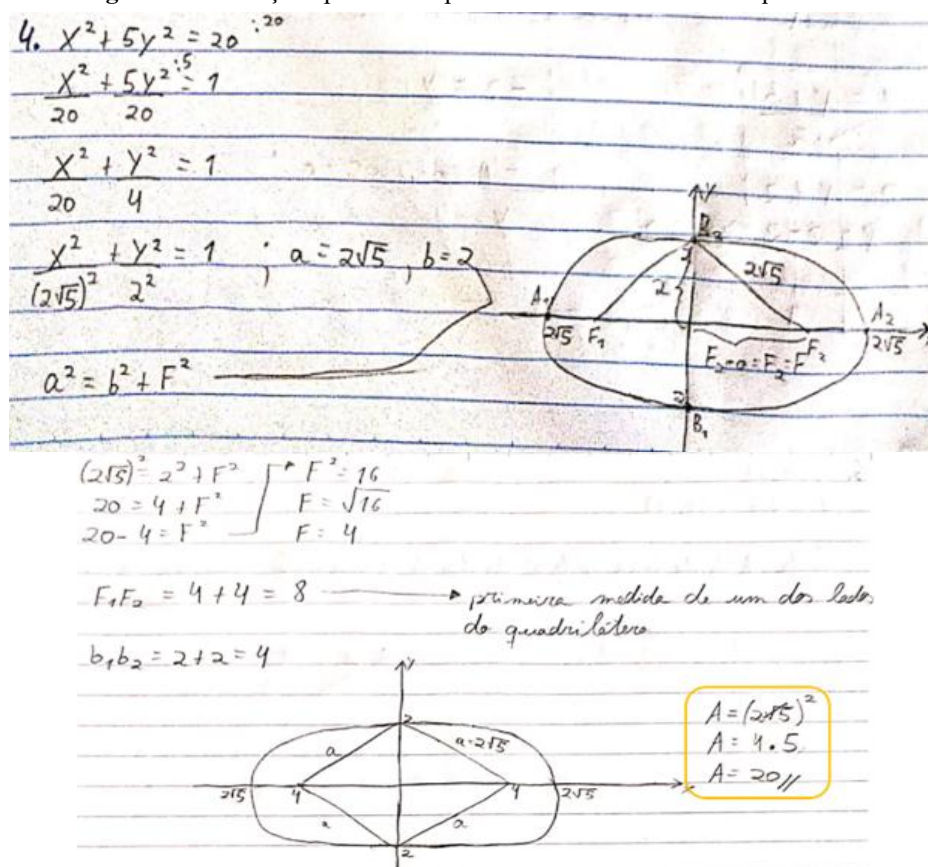
Fonte: Acervo dos Autores.

Assim como o aluno anterior, os estudantes A7 e A9 também tiveram dificuldade em manipular algebricamente a equação, abordada na questão 03, ícone B, a fim de encontrar a forma reduzida da curva $(x-1)^2 = y-3$. Contudo, associaram elementos da expressão algébrica $y = x^2 - 2x + 4$ com a parábola e, assim, relacionaram corretamente a representação algébrica com sua respectiva representação geométrica, convertendo as representações na perspectiva da TRRS.

Dando continuidade à atividade, para responder à próxima questão, a situação 04, os alunos precisavam relacionar elementos de figuras geométricas planas com as secções cônicas

e, para isso, necessitavam compreender os elementos de um quadrilátero e de uma elipse, converter representações e saber calcular a área de um quadrilátero.

Figura 8: Resolução apresentada pelo Estudante A2 acerca da questão 04



Fonte: Acervo dos Autores.

Conforme a Figura 8, acerca da questão 04, o estudante A2 manipulou corretamente a expressão algébrica, encontrando a equação reduzida da elipse e, em seguida, esboçou a sua representação gráfica, relacionando os elementos algébricos e geométricos, convertendo assim, as representações. Porém, ao calcular a área do quadrilátero em questão, como exigido no problema, o discente, possivelmente, por não conseguir identificar o losango, confundindo-o, calculou a área como se fosse um quadrado.

Araújo (2018), ao analisar, no seu estudo, como alunos do 8º ano do Ensino Fundamental lidam com situações sobre a área de paralelogramos, constatou que, dentre os paralelogramos, os estudantes sentem maior dificuldade na identificação do losango, aspecto que vai na mesma direção do erro que encontramos na situação em questão, caracterizando-se assim, como um erro que possivelmente advém do Ensino Básico.

Nesse sentido, a BNCC (2017) orienta que, a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, deve ser intensificado o estudo dos quadriláteros, levando os alunos a identificar suas características e classificá-los em relação aos lados e aos ângulos.

Ainda em relação à questão 04, todos os outros estudantes responderam corretamente a situação em questão, com exceção do estudante A5, que não apresentou solução.

Seguindo a mesma vertente do problema anterior, a questão 05 tem o intuito de introduzir na atividade a ideia de conversão de representações, na perspectiva da TRRS,

buscando relacionar os elementos da equação de uma secção cônica com os elementos da sua representação gráfica.

Figura 9: Resolução apresentada pelo Estudante A5 acerca da questão 05

$$\begin{aligned}
 &x^2 + 2x + y^2 + 2y - 23 = 0 \\
 &x^2 + 2x + y^2 + 2y - 23 + 2 = 25 \\
 &(x+1)^2 + (y+1)^2 = 25 \\
 &(x+1)^2 + (y+1)^2 = 25 \\
 &\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo dos Autores.

Como destacamos na Figura 9, o estudante A5 não representou graficamente a curva, possivelmente por ter tido dificuldade em identificar os seus elementos, como o raio e o centro, tendo em vista que, mesmo tendo alguns descuidos na manipulação algébrica, como destacamos na Figura, o aluno desenvolveu a atividade corretamente, resultando na forma reduzida. Sendo assim, ao emergirmos novamente na TRRS, podemos indicar que o estudante não conseguiu realizar a conversão da representação algébrica para a geométrica ao não relacionar os elementos da equação reduzida com os elementos da curva. Vale destacar que todos os outros alunos desenvolveram corretamente o que se pedia na questão, exceto o estudante A3, que não apresentou solução.

Por fim, na questão 06, os estudantes deveriam representar graficamente uma secção cônica, utilizando-se dos elementos de sua equação. Para tanto, os alunos precisavam compreender e relacionar os elementos de uma curva e, assim, converter as representações. Nessa situação, todos os alunos representaram corretamente a secção cônica, exceto o estudante A5, o qual não apresentou solução.

De modo geral, a análise das resoluções evidencia um padrão recorrente de dificuldades entre os estudantes, permitindo identificar três eixos centrais. O primeiro refere-se às fragilidades no tratamento -algébrico, manifestadas por erros na manipulação de expressões e no reconhecimento de estruturas como produtos notáveis, o que compromete a obtenção das formas canônicas das secções cônicas.

O segundo eixo diz respeito às dificuldades na conversão entre registros, especialmente entre as representações algébrica e geométrica, indicando que, mesmo quando os estudantes conseguem operar simbolicamente, nem sempre estabelecem relações entre os elementos da equação e suas correspondências gráficas.

Adicionalmente, observa-se que parte dessas dificuldades está associada a lacunas conceituais oriundas da Educação Básica, como a compreensão da igualdade e a identificação de propriedades geométricas, sugerindo a persistência de obstáculos ao longo da trajetória formativa.

Sob a perspectiva da TRRS, esses achados reforçam a centralidade da articulação entre registros no processo de aprendizagem matemática, evidenciando que a ausência dessa coordenação pode limitar a compreensão dos objetos estudados. Nesse sentido, os dados analisados indicam a necessidade de práticas de ensino que favoreçam não apenas o domínio

de procedimentos, mas, sobretudo, a mobilização e a integração de diferentes formas de representação

O tratamento algébrico inadequado é evidenciado pela dificuldade de manipular expressões algébricas, especialmente na fatoração e no reconhecimento de produtos notáveis, erros esses que comprometem a obtenção das formas canônicas das seções cônicas e revelam limitações na transformação dentro do registro algébrico.

Em acréscimo, visualizamos dificuldades na conversão entre os registros algébrico e geométrico, uma vez que parte dos estudantes não conseguiu associar a equação reduzida à sua representação gráfica, demonstrando fragilidades na identificação dos elementos que caracterizam as curvas, como centro, vértice e raio.

Por fim, identificamos lacunas conceituais oriundas do Ensino Fundamental, como a compreensão equivocada de propriedades geométricas e da própria noção de igualdade, conjuntura que sugere que certos entraves no ensino da Geometria Analítica podem ter raízes em etapas anteriores da escolarização.

Nessa perspectiva, à luz da EDI, compreende-se que o uso de artefatos tecnológicos no ensino não deve se restringir à visualização de objetos matemáticos, mas deve estar articulado às especificidades epistemológicas, cognitivas, didáticas e informáticas do conteúdo abordado. Conforme propõe Tiburcio (2020), a concepção de softwares educativos precisa integrar tais dimensões, de modo a favorecer ações como a coordenação entre registros. Assim, a ausência dessa articulação pode limitar o potencial pedagógico desses recursos, como observado nas resoluções analisadas.

Sendo assim, mesmo tendo a possibilidade de usar softwares como apoio na resolução das questões, observamos que esse aspecto não foi suficiente para auxiliar nas dificuldades dos estudantes. Isso se explica, possivelmente, pelo software utilizado não contemplar as especificidades do objeto matemático em questão. Esse cenário é comum nos softwares educacionais, o *GeoGebra*, por exemplo, embora amplamente utilizado no ensino, não proporciona a articulação entre as representações algébrica e geométrica de certos objetos, como a reta, como indica Cavalcanti (2023).

Justamente nesse contexto, considerando que a maioria dos softwares educacionais apresentam limitações que dificultam sua utilização, especialmente pela ausência de uma base pedagógica que sustente sua concepção, Tiburcio (2020) propõe a EDI, abarcando assim, no processo de desenvolvimento do software, tanto os aspectos teóricos relacionados ao ensino e à aprendizagem, quanto os tecnológicos. A análise realizada apoiada na EDI, portanto, reforça a importância de repensar o papel dos artefatos, não apenas como ferramentas de visualização, mas como instrumentos que dialoguem com a estrutura conceitual do objeto em questão.

5 Considerações Finais

Com esse estudo, pudemos perceber que os estudantes do Ensino Superior frequentemente enfrentam dificuldades com os conceitos de seções cônicas, em grande parte, devido a lacunas formadas no ensino básico, visto que, no decorrer do Ensino Fundamental e Médio, por vezes, conteúdos são abordados de maneira superficial e limitada, concentrando-se na memorização de fórmulas e métodos mecânicos, sem a devida preocupação na compreensão, objetivando apenas a resolução de exercícios.

Esses entraves na aprendizagem das seções cônicas referem-se, na maioria das vezes, às transformações por tratamento e conversão, na perspectiva da TRRS, como pudemos verificar nos dados analisados, em que os estudantes cometeram erros ao buscar simplificar as

expressões algébricas e relacionar a equação reduzida da curva com sua respectiva representação geométrica. Duval (2003) defende, no contexto da TRRS, que, para que haja aprendizagem na Matemática, o estudante deve reconhecer o objeto matemático a partir do uso de diversas representações transitando entre elas, justamente através dessas transformações, do tratamento e da conversão, sendo assim, um aspecto importante visando a apreensão do conteúdo.

Diante desse cenário, surgem os softwares que, como aponta Cavalcanti (2023), podem facilitar essa articulação entre as representações abordadas, considerando que, a partir da utilização dos artefatos tecnológicos educativos, os estudantes têm a possibilidade de estabelecer relações entre os elementos contidos nas diferentes representações, os quais, além de serem apresentados na interface, modificam-se simultaneamente quando alterados nas representações, proporcionando ao aluno compreender os efeitos que acontecem com as transformações entre representações. Esse dinamismo entre registros contribui para que o aluno compreenda os efeitos das transformações e reconheça propriedades compartilhadas entre diferentes formas de representação.

Além desse aspecto, Petry, Binotto e Gaio (2025) evidenciam que essa interação estimula os professores a incorporarem esses recursos em suas aulas de Matemática, sobretudo no ensino de cônicas, promovendo um ambiente mais dinâmico e propício à exploração das diferentes representações. Contudo, é essencial que os softwares respeitem um conjunto de necessidades ligadas ao ensino e à aprendizagem do objeto matemático, conforme aponta Tiburcio (2020) ao propor o Modelo de Desenvolvimento de Software Educativo da EDI. Esse é um contexto importante, tendo em vista que diversos softwares existentes, mesmo apresentando diversas potencialidades, acabam por não abarcar todas as especificidades do conteúdo.

Nessa vertente, podemos citar como exemplo um outro projeto, uma tese de Doutorado, em que os autores desse estudo estão envolvidos, cujo objetivo é conceber o *Atelier Function*, um software que proporcione a articulação entre representações de funções. Vale destacar que tal cenário surgiu justamente da ausência desse requisito nos softwares existentes. Os resultados desta pesquisa apontam para a necessidade de repensar as estratégias de ensino das secções cônicas, considerando sua abordagem desde o Ensino Fundamental, ainda que de forma preliminar, de modo a favorecer uma base conceitual mais sólida no Ensino Médio e Superior.

Além disso, diante das dificuldades identificadas entre os estudantes participantes, destaca-se a importância de trabalhar a articulação entre diferentes registros de representação, por meio de atividades envolvendo, por exemplo, a interpretação gráfica de equações e a identificação de propriedades geométricas com base em expressões algébricas, utilizando-se de artefatos tecnológicos que permitam visualizar, manipular e compreender dinamicamente as relações entre registros.

No âmbito da Educação Matemática, esta investigação contribui para os estudos científicos da área, ao evidenciar a centralidade da articulação entre registros de representação semiótica na compreensão de objetos matemáticos, em particular das secções cônicas. Ao analisar as produções dos licenciandos, o estudo explicita dificuldades que não se restringem a aspectos procedimentais, mas que revelam entraves de natureza cognitiva relacionados à mobilização e coordenação de diferentes registros, conforme proposto pela TRRS.

Ademais, ao dialogar com a EDI, a pesquisa amplia as discussões sobre o papel de softwares no ensino de Matemática, destacando que sua eficácia depende da integração entre fundamentos teóricos e concepção didática. Nesse sentido, os resultados aqui apresentados oferecem subsídios tanto para a formação inicial de professores quanto para o desenvolvimento

de propostas pedagógicas e tecnológicas que favoreçam uma aprendizagem com maior compreensão dos conceitos envolvidos, reforçando, assim, a relevância deste estudo para o avanço das investigações no campo da Educação Matemática.

Referências

- Araújo, J. C. (2018). *Como os alunos de 8º ano lidam com situações relativas à área de paralelogramos?: Um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais* [Dissertação de mestrado, UFPE].
- Benevides, P., & Bellemain, F. (2021). Ensino do teorema fundamental do cálculo: Criação de um modelo praxeológico para a análise de micromundo. In *Anais do VI Congresso sobre Tecnologias na Educação* (p. 410–416). SBC.
- Bordallo, M. (2011). *As cônicas na matemática escolar brasileira: História, presente e futuro* [Dissertação de mestrado, UFRJ].
- Boulos, P. & Camargo, I. (2005). *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. Pearson.
- Brasil. Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*.
- Brasil. Ministério da Educação. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*.
- Cavalcanti, J. H. (2023). *Articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta utilizando o Software Function Studium* [Dissertação de mestrado, UFPE].
- Costa, S. F., & Diniz, M. M. (2021). Estimativa da probabilidade de reprovação em disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática: Uma aplicação de regressão logística. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 8(1).
- Dallemole, J. J., Groenwald, C. L., & Ruiz, L. M. (2014). Registros de representação semiótica e geometria analítica: Uma experiência com futuros professores. *Relime*, 17(2), 131–163.
- Paula, A. F., & Bittar, M. (2012). Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica. *Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*, 6(1).
- Duval, R. (2011). Gráficos e equações: A articulação de dois registros (M. T. Moretti, Trad.). *REVEMAT*, 6(2), 96–112.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 37–64.
- Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento (M. T. Moretti, Trad.). *REVEMAT*, 7(2), 266–297.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica* (p. 11–33). Papirus.
- Freitas, M. A. (2002). *Equação do 1º grau: Métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio* [Dissertação de mestrado, PUC-SP].
- Garzella, F. A. (2013). *A disciplina de Cálculo I: Análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos* [Tese de doutorado, Unicamp].
- Gil, A. C. (2017). *Como elaborar projetos de pesquisa* (6ª ed.). Atlas.

- Lima, E. L. (2013). *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. IMPA.
- Petry, V. J., Binotto, R. R., & Gaio, S. M. . (2025). Exercício de imaginação pedagógica com professores de Matemática sobre o uso de objetos virtuais de aprendizagem no ensino de cônicas. *RIPEM*, 15(1), 1-18.
- Rosa, C., Santos, F. F., & Mendes, H. C. (2019). O desempenho dos estudantes do curso de Matemática de uma instituição pública de educação superior. *Revista Educação em Questão*, 57, 53–65.
- Siqueira, J. E. (2019). *Articulando os registros de representação semiótica das curvas cônicas através da integração de recursos computacionais* [Tese de doutorado, UFPE].
- Silva, H. G. (2017). *Modelo psicológico, sociocultural e psicossocial do desempenho acadêmico na transição do Ensino Médio à Educação Superior: O caso do Curso de Licenciatura em Matemática da UFTM* [Dissertação de mestrado, UFTM].
- Simonetti, D., & Moretti, M. T. . (2021). Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio e Registros de Representação Semiótica: uma articulação possível?. *RIPEM*, 11(1), 99-117.
- Souza, N. S. (2016). *Curvas cônicas: Do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica* [Dissertação de mestrado, UFPE].
- Tiburcio, R. (2020). *A engenharia didático-informática: Uma metodologia para a produção de software educativo* [Tese de doutorado, UFPE].
- Tiburcio, R. (2016). *Processo de desenvolvimento de software educativo: Um estudo da prototipação de um software para o ensino de função* [Dissertação de mestrado, UFPE].
- Tiburcio, R., & Bellemain, F. (2021). Aperfeiçoamento da engenharia didático-informática com contribuições da metodologia de desenvolvimento do software Modellus. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1–21.
- Tiburcio, R., & Bellemain, F. (2018). Process of educational software development: Epistemological and experimental analysis in the creation environment Lematec-Studium. In *Re(s)ources International Conference*. Lyon.
- Universidade Federal de Pernambuco. (2017). *Projeto político pedagógico do curso de Matemática - Licenciatura - PPC, CAA*.