

O conceito de exponencial em livros de Análise Real: olhar sob o ponto de vista da intuição e do rigor

Eder Marinho Martins

Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto, MG — Brasil

✉ eder@ufop.edu.br

id [0000-0003-4710-9188](https://orcid.org/0000-0003-4710-9188)

Frederico da Silva Reis

Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto, MG — Brasil

✉ frederico.reis@ufop.edu.br

id [0000-0001-6087-6483](https://orcid.org/0000-0001-6087-6483)


Leandro Correa Paes Leme


Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto, MG — Brasil

✉ leandro.leme@ufop.edu.br

id [0000-0001-5983-3443](https://orcid.org/0000-0001-5983-3443)



2238-0345 


10.37001/ripem.v16i1.4693 

Recebido • 08/08/2025

Aprovado • 22/04/2026

Publicado • 30/04/2026

Editoria • Edvonete Souza de Alencar 

Veridiana Rezende 

Resumo: Objetivamos investigar a abordagem de alguns livros didáticos de Análise Real utilizados nas universidades brasileiras na construção do conceito de a^x , e apresentar outra construção mais intuitiva, que se utiliza dos conceitos de supremo e ínfimo, além da completude dos números reais. Como enquadramento teórico, discutimos a relação entre intuição e rigor, à luz do ensino de Análise Real. A metodologia qualitativa contemplou uma pesquisa documental por meio da análise de livros didáticos. Nos resultados, concluímos que as construções mais comuns nos livros didáticos, embora sejam matematicamente rigorosas e elegantes, recorrem a uma definição formal das funções exponencial e logaritmo natural, porém pouco intuitivas, pois demandam muitos outros conceitos prévios. Já a construção apresentada privilegia a intuição, proporcionando visualização e criatividade por parte dos alunos, o que lhes permite trilhar o caminho para uma didática e rigorosa definição do conceito de exponencial, fundamental na formação de professores e bacharéis em Matemática.

Palavras-chave: Conceito de Função Exponencial. Livros Didáticos de Análise Real. Intuição. Rigor.

The concept of exponential in real analysis books: a perspective of intuition and rigor point of view

Abstract: In this paper, we aim to examine the approach adopted in Real Analysis textbooks used by Brazilian universities in the construction of the concept of a^x , and to present a more intuitive construction based on the notions of supremum, infimum and the completeness of the real number system. As a theoretical framework, we discuss the relationship between intuition and rigor in the context of teaching Real Analysis. This qualitative study involves documentary analysis of textbooks. We conclude that the most common constructions in Real Analysis textbooks, although rigorous and elegant, typically rely on formal definitions of exponential and logarithmic functions, which are not very intuitive, because they require many previous concepts. The alternative construction we present prioritizes intuition, offering students greater opportunities for visualization and creativity. It allows them to follow a pedagogical and rigorous path to the definition of the exponential function, which is fundamental for future mathematics teachers and mathematicians.

Keywords: Concept of Exponential Function. Real Analysis Textbooks. Intuition. Rigor.

El concepto de exponencial en libros de análisis real: mirada desde el punto de vista de la intuición y el rigor

Resumen: En este artículo, nos proponemos investigar el enfoque de algunos libros de texto de Análisis Real utilizados en universidades brasileñas para la construcción del concepto de a^x , y presentar una construcción alternativa más intuitiva, que se basa en los conceptos de supremo e ínfimo, así como en la completitud de los números reales. Como marco teórico, discutimos la relación entre intuición y rigor, a la luz de la enseñanza del Análisis Real. La metodología, de carácter cualitativo, consistió en una investigación documental mediante el análisis de libros de texto. Como resultado, concluimos que las construcciones más comunes en los manuales, aunque matemáticamente rigurosas y elegantes, recurren a una definición formal de las funciones exponencial y logaritmo natural, la cual resulta poco intuitiva por requerir numerosos conceptos previos. En cambio, la construcción que presentamos privilegia la intuición, favoreciendo la visualización y la creatividad por parte del estudiantado, y permitiéndole recorrer un camino tanto didáctico como riguroso hacia la definición del concepto de exponencial, fundamental en la formación de docentes y licenciados en Matemáticas.

Palabras clave: Concepto de Función Exponencial. Libros de Análisis Real. Intuición. Rigor.

1 Introdução

Uma das primeiras menções ao uso da operação de potenciação pode ser vista num papiro egípcio de cerca de 2100–1580 a.C., onde se discute o cálculo do volume de uma pirâmide de base quadrangular (Oliveira & Ponte, 1999). Alguns milênios se passaram desde então, até uma formalização rigorosa da expressão a^x para todo $x \in \mathbb{R}$ com a restrição $a > 0$. Naturalmente, consideraremos, em geral, $a \neq 1$ para discutirmos a bijetividade da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$.

Uma boa discussão do ponto de vista histórico da construção do conceito de potência pode ser encontrada em Oliveira e Ponte (1999). Definir a^x para $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ exige um longo caminho e passa pelo fato de \mathbb{R} ser um corpo ordenado completo. Já definir a^x , quando x é um número racional, é algo relativamente simples, no contexto de Análise Real. O passo a passo, normalmente, começa por definir a^n , quando $n \in \mathbb{N}$; neste caso, $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n vezes). Observemos que aqui não há nenhuma restrição para $a \in \mathbb{R}$ e, a partir dessa definição, são obtidas quase que naturalmente as seguintes propriedades:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m \text{ e } (a^n)^m = a^{nm} \quad (1)$$

No intuito de manter essas propriedades, define-se $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Posteriormente, utilizando a noção de supremo e ínfimo, define-se a raiz n -ésima de $a > 0$ e, a partir dela, determina-se $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, em que n e m são números inteiros. Com essa definição, as propriedades apresentadas em (1) são mantidas. Entretanto, a dificuldade para ter uma boa definição de a^x , de modo a preservar tais propriedades, reside no caso em que x é irracional.

Ao analisarmos um conjunto de livros didáticos de Análise Real, descritos posteriormente, observamos que todos adotam a estratégia de definir a função exponencial, aqui denotada por \exp , e logaritmo natural, aqui denotada por \ln e, a partir dessas funções, estabelecer a^x quando $x \in \mathbb{R}$. As construções de tais funções são feitas utilizando fortes resultados de Análise Real e empregam, seja na definição, seja na obtenção de propriedades das funções \exp e \ln , limites, continuidade, derivadas, séries de potências, integrais, sequências e

séries de funções e convergência. Uma vez construídas tais funções, estipula-se para $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$a^x = \exp(x \ln(a)) \text{ e } \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad (2)$$

sendo a segunda expressão de (2) o logaritmo de x na base a . O $\log_a x$ tem a propriedade de ser a função inversa de a^x . Todas as propriedades de a^x e $\log_a x$ são obtidas a partir daquelas de \exp e \ln . Embora seja matematicamente rigorosa e permita obter todas as propriedades do Cálculo Diferencial e Integral, a abordagem apresentada nos livros analisados nos parece pouco intuitiva, de modo que se evita trabalhar com as funções exponencial e logaritmo até que todos os conceitos de Análise Real sejam introduzidos ou, noutro viés, utiliza-se as funções sem defini-las previamente, como acontece no Capítulo 3 de Figueiredo (1996), no contexto das Séries de Taylor, e no Capítulo 3 de Lima (2002b), num exemplo de limites infinitos.

Neste artigo, discutimos a construção de a^x feita em livros didáticos de Análise Real utilizados em universidades brasileiras, além de outra construção didática utilizando supremo e ínfimo de um conjunto (a ser escolhido), e a completude do conjunto dos números reais. Essa construção aparece como um exercício em Rudin (1976) e Bartle e Sherbert (2011) e nos parece mais intuitiva, sendo um caminho mais curto para entender o significado de a^x , sem necessariamente recorrer a vários resultados de Análise Real. Entretanto, antes de iniciarmos a discussão que objetivamos, apresentamos o que entendemos por intuição e como ela está presente no ensino de Análise Real, imbricada ao rigor inerente a tal ensino. Cabe destacar, ainda, que os livros didáticos analisados foram escolhidos não somente pelo reconhecimento de seus autores nos cenários acadêmicos nacional e internacional, mas também pelo fato de que são amplamente utilizados em universidades brasileiras, aparecendo como bibliografia básica ou complementar das diversas disciplinas de Análise Real (Reis, 2009).

2 A intuição e sua relação com o rigor no ensino de Análise Real

No contexto da prática docente universitária de Matemática, especialmente, no ensino de Análise Real, a relação entre o rigor e a intuição é concebida como dicotômica, no sentido de que — ao se privilegiar uma abordagem mais rigorosa na apresentação de um conceito, de uma definição ou de um teorema —, necessariamente, isso significa que os aspectos intuitivos devem ser abandonados quase por sua totalidade ou, ao menos, relegados a um plano inferior. Entretanto, defendemos uma relação de complementariedade entre o rigor e a intuição, no sentido de que ambos os processos são igualmente fundamentais na construção do conhecimento analítico; porquanto, julgamos importante apresentar nossa concepção de intuição e de rigor.

Diversos autores consideram os aspectos cognitivos relacionados à intuição, caracterizando-a de diferentes formas. Para Tall e Vinner (1981), ela é o produto das imagens conceituais, que são estruturas cognitivas associadas à aquisição de um conceito, tais como processos mentais e imagens mentais. Já para Poincaré (1913), existem muitos tipos de intuições: primeiramente, pelos sentidos e pela imaginação; depois, generalização por indução, copiadas, por assim dizer, dos procedimentos das ciências experimentais; finalmente, a intuição de um “número puro”. Segundo Fischbein (1978), existem dois tipos de intuição: as primárias, que se referem àquelas crenças cognitivas desenvolvidas pelos próprios seres humanos, de maneira natural, antes e independentemente de instrução sistemática; e as secundárias, que são desenvolvidas como um resultado de treinamento intelectual sistemático.

No presente trabalho, outrossim, consideraremos a concepção dinâmica de Reis (2001) da intuição como um movimento de estabelecer raciocínios plausíveis (às vezes verdadeiros, às

vezes falsos) e do rigor como um movimento de conceptualização de intuições, sendo que, nesse processo, algumas são mantidas e outras são refutadas. Além disso, no contexto do ensino de Análise Real, a intuição ressalta outros exercícios mentais, tais como a visualização e a imaginação, que não podem ser simplesmente sobrepujados pela associação ao rigor, por exemplo, a formalização e a generalização, ou seja, há que se considerar o que sustenta Reis (2009) ao nos lembrar que

o “rigor acadêmico”, dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos, artigos científicos e outros, não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino. Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos; etc.). (p. 93)

Cabe destacar que o “rigor acadêmico”, no que se refere ao pesquisador, relaciona-se diretamente ao ensino de Análise Real, uma vez que, segundo o pesquisador, os tópicos fundamentais de uma disciplina de Análise Real são os mesmos de uma disciplina de Cálculo; porém, se no Cálculo os tópicos são abordados sob uma perspectiva aplicada, com a interpretação intuitiva das noções, na Análise Real, eles são abordados, geralmente, sob uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos conceitos, definições e resultados estudados.

Já Ávila (1999), no prefácio de seu livro *Introdução à Análise Matemática*, afirma que uma análise histórica mostra que, desde o surgimento do Cálculo, com Newton e Leibnitz no século XVII, vários célebres matemáticos — como os irmãos Bernoulli, Euler, D’Alembert e Lagrange — tentaram, sem sucesso, dar ao Cálculo uma formulação rigorosa, que somente foi obtida no início do século XIX, com Dedekind e Peano, após as contribuições fundamentais de Cauchy e Weierstrass. Ávila (1999, p. 22) apresenta, ainda, o argumento de Dieudonné que imputa a “falta de rigor” dos matemáticos do século XVIII às dificuldades que eles enfrentaram em definir, de maneira precisa, as noções básicas do Cálculo, destacando, todavia, que eles tinham uma boa concepção intuitiva de tais noções. Entretanto, o pesquisador acredita que foi exatamente essa concepção intuitiva que levou aqueles matemáticos ao estabelecimento de importantes resultados o que justifica, segundo ele, a necessidade de um equilíbrio entre o rigor necessário à Análise Real e a intuição tão fundamental no desenvolvimento das ideias matemáticas.

Encontrar o “ponto de equilíbrio” que, talvez, seja o divisor de águas no ensino de Análise Real — colocando, de um lado, o pensamento diferencial intuitivamente construído e, de outro, o pensamento analítico formalmente construído — não nos parece tarefa fácil. Reis (2009), ao analisar as disciplinas de Análise Real ministradas na graduação, nota que, numa boa parte delas, há um excesso de formalismo e rigor na exposição dos temas; diante dessa prática, muitas vezes, resta aos alunos apenas a memorização dos principais resultados e de suas demonstrações que, espera-se, tenham sido entendidos intuitivamente no Cálculo.

Novamente, então, deparamo-nos com a necessidade de compreender melhor a forma como o rigor e a intuição são explorados nos livros didáticos de Análise Real, considerando, segundo Reis (2001):

O papel fundamental que o livro didático desempenha dentro da configuração do currículo público de Análise Real, pois nos programas das disciplinas de Análise Real de qualquer universidade brasileira, certamente, um ou mais livros são disponibilizados como

referências bibliográficas e, na prática, algum deles acaba sendo, de fato, adotado como referência principal para o desenvolvimento de toda a disciplina;

O papel inegável que o livro didático exerce enquanto expoente dos saberes particulares de seus autores, pois um livro carrega não somente uma síntese de conhecimentos específicos sobre Análise Real, mas também uma enorme gama de conhecimentos matemáticos e pedagógicos de seus autores, cuja combinação culmina com a experiência de escrever um livro de conteúdo matemático que se propõe didático.

Nessa perspectiva, devido aos propósitos do presente trabalho, apresentamos, a seguir, a abordagem do conceito de exponencial em livros didáticos de Análise Real, buscando suas relações com funções exponenciais e logaritmos, de tal maneira que, posteriormente, possamos comparar, por um lado, de que forma a busca pelo rigor foi um determinante em cada abordagem e, por outro lado, de que forma cada abordagem pode ser considerada mais ou menos intuitiva, a partir da concepção dinâmica de intuição que estamos considerando.

3 Funções Exponenciais, Logaritmo Natural, a^x e $\log_a x$ nos livros de Análise Real

Como descrevemos, realizamos uma análise de como as funções exponencial e logaritmo natural são introduzidas em alguns livros didáticos de Análise Real, apresentados a seguir. A escolha por esses livros foi feita não somente por nossa experiência prévia como professores de Análise Real em disciplinas de cursos de graduação e pós-graduação, mas também por serem livros considerados “clássicos”, que, como tal, integram as referências bibliográficas de programas e, de fato, são adotados como principal referência em disciplinas de Análise Real oferecidas em diversos cursos de Matemática (Licenciatura e Bacharelado) no Brasil.

Tabela 1: Livros Didáticos de Análise Real

Título	Autor(es)	Edição	Ano
Análise I	D. G. de Figueiredo	2a	1996
Análise Real – Volume 1	E. L. Lima	6a	1996
Curso de Análise – Volume 1	E. L. Lima	10a	1996
Introduction to Real Analysis	R. G. Bartle e D. R. Sherbert	4a	2011
Principles of Mathematical Analysis	W. Rudin	3a	1976

Fonte: Elaboração dos autores.

A estratégia utilizada nos livros analisados é definir, primeiramente, a função exponencial ou a função logaritmo natural e, num segundo momento, a partir das propriedades demonstradas, obter a segunda como inversa da primeira. Feita a construção das funções exponencial e logaritmo natural, todos os livros descritos na Tabela 1, definem:

$$a^x = e^{x \ln(a)} \text{ e } \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)},$$

em que e^x é a função exponencial avaliada em x e $\ln(x)$ é o logaritmo natural avaliado em x . A partir dessa definição, as propriedades $a^{x+y} = a^x a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, as derivadas e integrais de a^x e $\log_a x$ são obtidas recorrendo-se àquelas já obtidas para as funções exponencial e o logaritmo natural.

Nos livros de Rudin (1976) e de Bartle e Sherbert (2011), primeiramente, os autores definem a função exponencial e, nos livros de Lima (2002a, 2002b) e de Figueiredo (1996), primeiramente, os autores definem a função logaritmo natural. No Capítulo 3 de Rudin (1976),

inicialmente, o autor introduz o número $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, no Capítulo 8, define, para qualquer número complexo z , a função:

$$\text{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

A partir dessa definição, é possível obter as propriedades $\text{Exp}(z+w) = \text{Exp}(z)\text{Exp}(w)$ e $(\text{Exp})'(z) = \text{Exp}(z)$ para quaisquer z e w complexos.

Bartle e Sherbert (2011) enunciam, no Capítulo 8, o seguinte resultado:

Teorema 1: Existe uma única função $\text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável que satisfaz:

1. A derivada de E é igual a própria função E , isto é, $(\text{Exp})'(x) = \text{Exp}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $\text{Exp}(0) = 1$.

A demonstração desse resultado é feita utilizando-se integrais, sequências e séries de funções e conceitos de convergência. Por meio dessa abordagem, define-se $e = \text{Exp}(1)$. Utilizando-se conceitos e resultados de Análise Real, tanto Rudin (1976) como Bartle e Sherbert (2011) apresentam as seguintes propriedades:

- (i) $\text{Exp}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\text{Exp}(x+y) = \text{Exp}(x)\text{Exp}(y)$;
- (iii) $\text{Exp}(p) = e^p$ para qualquer p racional.

A abordagem de Rudin (1976) é toda feita para números complexos e, somente depois, é realizada a restrição para os números reais. A propriedade (iii) sugere definir $e^x = \text{Exp}(x)$.

Em ambas construções apresentadas, pode-se obter, seja por definição, seja por resultados de Análise Real, o seguinte teorema:

Teorema 2: Valem as propriedades abaixo:

1. e^x é continuamente diferenciável;
2. $(e^x)' = e^x$;
3. e^x é estritamente crescente;
4. $e^{x+y} = e^x e^y$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Das propriedades 1 e 3, tem-se a existência de uma função inversa \ln , o logaritmo natural, que é estritamente crescente e diferenciável, cujo domínio é $\{y \in \mathbb{R}: y > 0\} = \mathbb{R}_*^+$. O Teorema da Função Inversa garante que $(\ln)'(y) = \frac{1}{y}$. A partir dessa definição, obtém-se todas as propriedades conhecidas da função logaritmo natural.

Por outro lado, Figueiredo (1996) e Lima (2002a, 2002b) trilham o caminho inverso, definindo, primeiramente, a função logaritmo natural, da seguinte forma:

Definição: A função $\ln: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ é dita logaritmo natural.

A partir das propriedades da integral, a função definida possui derivada de todas as ordens, é crescente e côncava. Além disso, pode-se obter diretamente que $\ln(xy) = \ln(x) +$

$\ln(y)$. A partir de resultados de Análise Real, prova-se que \ln é sobrejetiva e define-se $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ como sendo a inversa de \ln . Com essa abordagem, os autores são capazes de obter todas as propriedades conhecidas de \ln e $\exp(x) = e^x$. Uma vez construídas essas funções, define-se a^x e $\log_a x$ como em (2).

4 Uma construção de a^x e $\log_a x$ via supremo e ínfimo

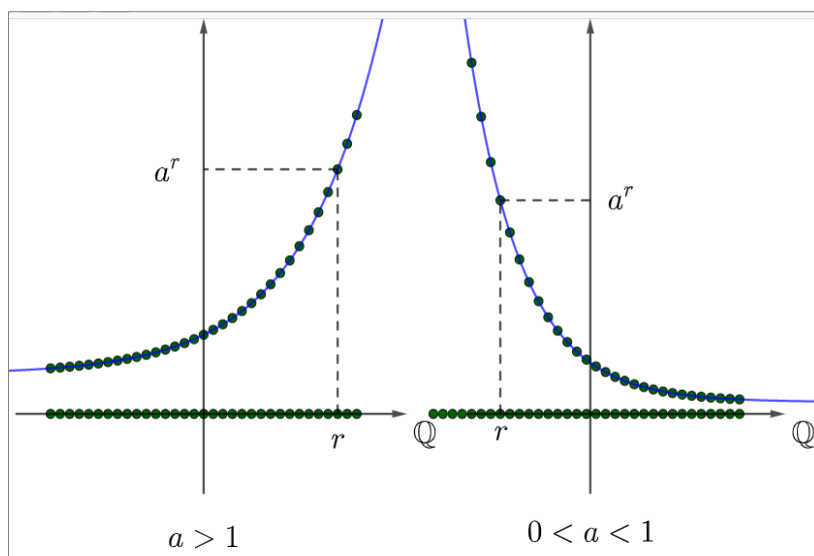
Rudin (1976) e Bartle e Sherbert (2011) sugerem como exercício uma construção de a^x e $\log_a x$ via supremo e ínfimo, que exige menos ferramental matemático para definir tais funções, mas tal construção não é muito explorada pelos autores. Entretanto, tal construção é feita detalhadamente no livro de Análise Real do primeiro autor do presente artigo que está por ser lançado brevemente, aqui, identificado por Martins (em preparação) e que, agora, passamos a detalhar.

A definição de a^x , quando x é um número natural, é feita de forma intuitiva: a^x é a multiplicado por a, x vezes. Para definir a^x , quando $x \in \mathbb{Z}$, recorre-se a um argumento lógico, no sentido de manter as propriedades fundamentais; então, define-se $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Após designar, via supremo, a noção de raiz n -ésima, também determina-se, no sentido de assegurar as propriedades fundamentais, $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, em que n e m são inteiros, $a^x = \sqrt[m]{a^n}$ (notemos que a restrição $a > 0$ é necessária), sendo que propriedades de cálculo são obtidas para expoentes racionais. Para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$, com $r < s$, tem-se:

1. $a^r < a^s$, se $a > 1$;
2. $a^r > a^s$, se $a < 1$.

Tais propriedades nos dizem que a função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, e decrescente, se $a < 1$. A Figura 1 ilustra um “gráfico” intuitivo de f que não é matematicamente rigoroso, pois, uma vez que \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , o eixo x não consegue descrever geometricamente o conjunto dos números racionais. Os pontos marcados na Figura 1 ilustram, intuitivamente, um conjunto denso no gráfico de f .

Figura 1: Ilustração intuitiva do gráfico de f

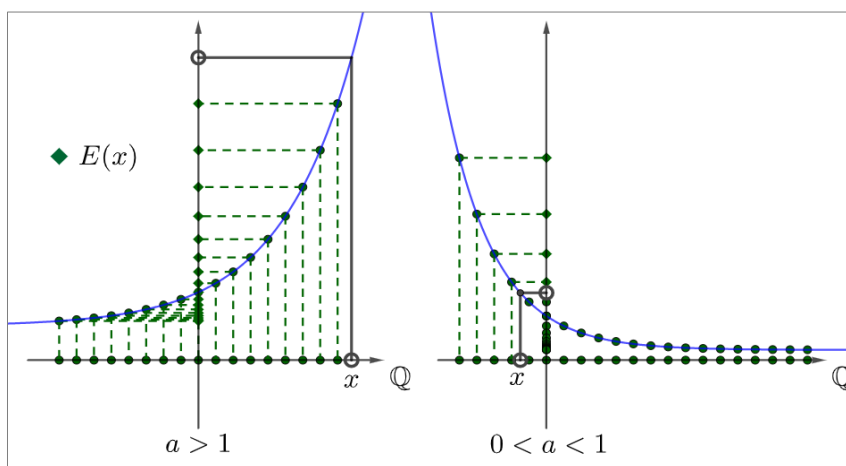


Fonte: Elaboração dos autores.

Para chegar a a^x utilizando supremo e ínfimo, faz-se necessária a escolha de um conjunto adequado para cada $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, podendo este ser: $E(x) = \{a^s: s \in \mathbb{Q} \text{ e } s < x\}$,

ou seja, $E(x)$ é o conjunto de todas as potências a^s , em que s é racional e menor que x , como ilustra a Figura 2.

Figura 2: Ilustração intuitiva do conjunto $E(x)$ com $x \in \mathbb{R}$



Fonte: Elaboração dos autores.

Pode-se demonstrar que, para todo $r \in \mathbb{Q}$, tem-se: $a^r = \sup E(r)$, se $a > 1$ e $a^r = \inf E(r)$, se $0 < a < 1$.

Em tais demonstrações, utiliza-se a definição de supremo e ínfimo, e o fato de que, dado $a > 0, a \neq 1$, todo intervalo não degenerado de \mathbb{R} contém um número a^r para algum r racional. A prova desse resultado poderá ser vista no mencionado livro a ser lançado de Martins (em preparação) ou também em Lima (2013). A partir das igualdades obtidas via supremo e ínfimo, observando a Figura 2, somos conduzidos à seguinte definição:

Dado $a > 0$ com $a \neq 1$, define-se para todo $x \in \mathbb{R}$:

1. $a^x = \sup E(x)$, se $a > 1$;
2. $a^x = \inf E(x)$, se $0 < a < 1$.

Diferentemente da abordagem apresentada pelos livros descritos na Tabela 1, a definição acima não nos fornece diretamente as propriedades que envolvem a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$, dado $f(x) = a^x$, tais como a monotonicidade, $a^{x+y} = a^x a^y$ e $(a^x)^y = a^{xy}$, que, então, precisam ser demonstradas. É importante observar, porém, que a construção utiliza apenas a completude de \mathbb{R} , as definições de supremo e ínfimo e as ideias visuais apresentadas nas Figuras 1 e 2. Apresentamos, a seguir, a demonstração das propriedades que também poderão ser vistas no mencionado livro a ser lançado por Martins (em preparação):

Teorema 3: Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se $a^{x+y} = a^x a^y$ e $(a^x)^y = a^{xy}$.

Demonstração. Apresentamos a demonstração apenas para $a^{x+y} = a^x a^y$ quando $a > 1$, pois os demais casos são análogos. Por definição, se $a > 1$:

$$a^{x+y} = \sup E(x+y) = \sup \{a^t : t \in \mathbb{Q} \text{ e } t < x+y\}$$

$$a^x = \sup E(x) = \sup \{a^r : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < x\}$$

$$a^y = \sup E(y) = \sup \{a^s : s \in \mathbb{Q} \text{ e } s < y\}$$

Como $\{a^{r+s} : r < x \text{ e } s < y\} \subset \{a^{r+s} : r+s < x+y\}$, tem-se

$$\sup_{r < x, s < y} \{a^{r+s}\} \leq \sup_{r+s < x+y} \{a^{r+s}\}.$$

Suponha, por absurdo, que $\sup_{r < x, s < y} \{a^{r+s}\} < \sup_{r+s < x+y} \{a^{r+s}\}$. Desse modo,

existem $p, q \in \mathbb{Q}$ com $p + q < x + y$, tais que

$$\sup_{r < x, s < y} \{a^r \cdot a^s\} = \sup_{r < x, s < y} \{a^{r+s}\} < a^{p+q} \leq \sup_{r+s < x+y} \{a^{r+s}\}.$$

Pela densidade de \mathbb{Q} em \mathbb{R} , toma-se $r_1 < x$ e $s_1 < y$, tais que $p + q < r_1 + s_1 < x + y$. Utilizando as propriedades já conhecidas para racionais, tem-se $a^{p+q} < a^{r_1+s_1} = a^{r_1} a^{s_1}$, o que contradiz a definição de supremo. Desse modo, $\sup_{r < x, s < y} \{a^{r+s}\} = \sup_{r+s < x+y} \{a^{r+s}\}$. Assim,

$$\begin{aligned} a^x a^y &= E(x)E(y) = \sup_{r < x, s < y} \{a^{r+s}\} = \sup_{r < x, s < y} \{a^r \cdot a^s\} = \sup_{r+s < x+y} \{a^{r+s}\} \\ &= \sup_{t < x+y} \{a^t\} = \sup E(x+y) = a^{x+y}. \end{aligned}$$

Teorema 4: Se $x < y$, tem-se

1. $a^x < a^y$, se $a > 1$.
2. $a^x > a^y$, se $0 < a < 1$.

Demonstração. Novamente, faremos a demonstração apenas do caso 1, pois o caso 2 é análogo. Tomemos $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $x < r < s < y$. Partimos desta definição de supremo: $a^r < a^s \leq a^y$. Como a^x é a menor das cotas superiores de $E(x)$, deve-se ter $a^x \leq a^r$, o que prova o caso 1.

O Teorema 4 garante que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é injetora. Por outro lado, se $b > 0$ e $X = \{x \in \mathbb{R}: a^x < b\}$, então, $c = \sup X$ é tal que $a^c = b$, ou seja, f é sobrejetiva. Dessa forma, pode-se definir a inversa de f como sendo o logaritmo na base a , isto é, $g: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é descrita como $g(y) = \log_a y$ no sentido de que:

$$x = g(y) = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x = f(x).$$

As propriedades de \log_a podem, então, ser obtidas de maneira tradicional, como comumente é feito nos livros de Matemática do Ensino Médio.

5 O pêndulo entre o rigor e a intuição nas construções apresentadas

A abordagem apresentada pelos livros didáticos de Análise Real que analisamos é matematicamente rigorosa e permite obter boas propriedades, incluindo aquelas que já haviam sido abordadas no Cálculo Diferencial e Integral. Sem sombra de dúvidas, o percurso de construção das funções exponencial e logaritmo natural trilhado por todos os autores apresenta uma sequência lógico-dedutiva completa do ponto de vista do rigor, no sentido de que todas as demonstrações necessárias são delineadas didaticamente, bem como algumas outras mais acessíveis são remetidas ao leitor, prática natural em livros didáticos de Matemática.

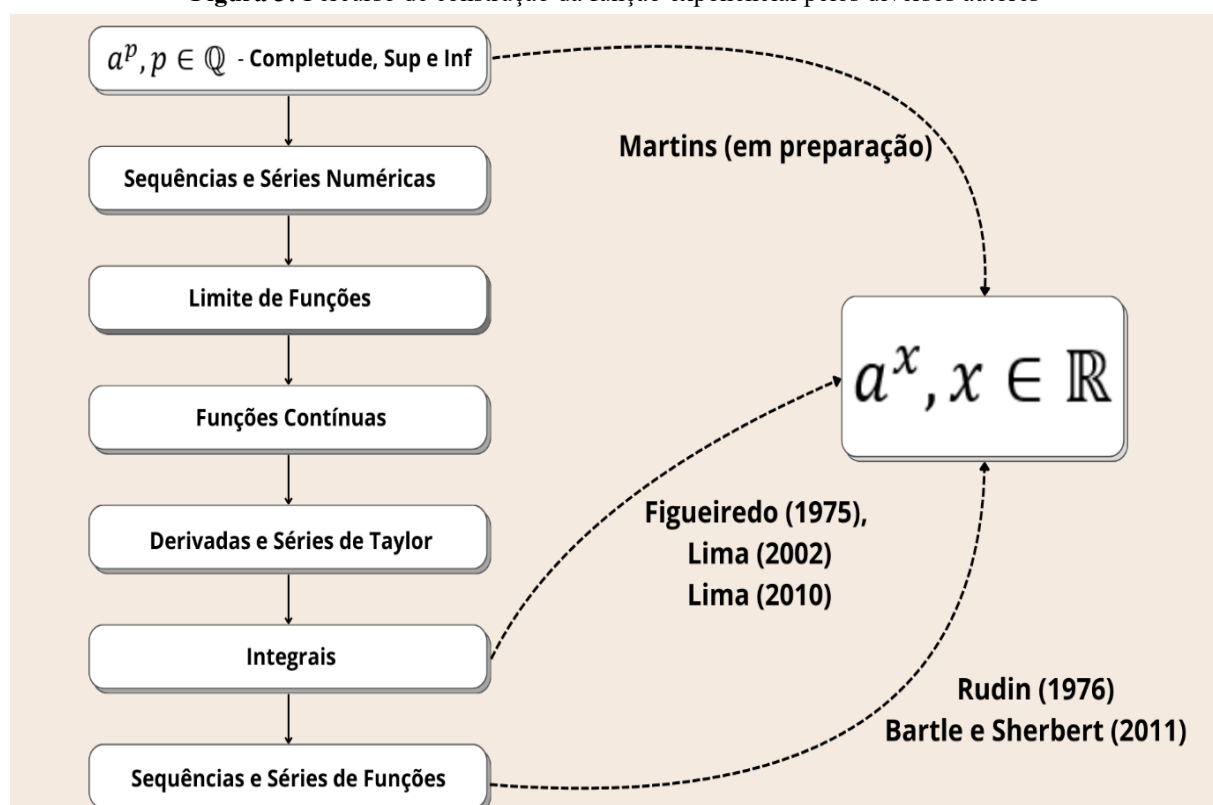
Entretanto, independentemente da opção didática de cada um dos autores por definir, a princípio, a função exponencial, como no caso de Rudin (1976) e de Bartle e Sherbert (2011) ou, de modo inicial, a função logaritmo natural, como no caso de Lima (2002a, 2002b) e de Figueiredo (1996), o percurso de construção parece-nos longo e demanda todo um ferramental que, em geral, só está “disponível didaticamente” ao final da disciplina de Análise Real que, em sua tradição, trilha de forma sequencial os clássicos conteúdos de: números reais, sequências e séries numéricas, limites, continuidade, derivadas, integrais, sequências e séries de funções.

Nesse contexto da prática docente, o percurso de construção apresentado por Rudin (1976) e por Bartle e Sherbert (2011) demanda um trabalho prévio com sequências e séries de funções para a definição da função exponencial. Já o exposto por Lima (2002a, 2002b) e por Figueiredo (1996) pede uma prática inicial com integrais para a definição da função

exponencial. Se considerarmos, por nossa longa experiência docente como professores de Análise Real em disciplinas de cursos de graduação e pós-graduação, a possibilidade real de que, em alguns períodos letivos, os conteúdos de integrais e de seqüências e séries de funções possam não ser sequer abordados por uma questão de tempo exíguo, isso imputa aos professores e, conseqüentemente, aos alunos a inviabilidade de uma elaboração rigorosa da função exponencial. Outro fato a ser considerado é que, em algumas universidades brasileiras, pode acontecer de o conteúdo de seqüências e séries de funções ser remetido para uma segunda disciplina de Análise (na Reta e/ou no \mathbb{R}^n) que, em geral, é obrigatória somente para cursos de Bacharelado em Matemática.

Dentro dessa perspectiva, a opção didática por uma construção igualmente rigorosa da função exponencial, porém seguindo um percurso que demanda menos ferramental trabalhado previamente em Análise Real, parece-nos mais adequada, com vistas a garantir, de fato, tal construção na sala de aula, como no caso do mencionado livro de Martins (em preparação). Como forma de ilustrar as principais diferenças entre os percursos de construção da função exponencial trilhados pelos diversos autores, apresentamos a Figura 3.

Figura 3: Percurso de construção da função exponencial pelos diversos autores



Fonte: Elaboração dos autores.

Julgamos por bem analisar, também, alguns outros aspectos rigorosos e intuitivos da construção feita via supremo e ínfimo que, além de se valer de poucos (ainda que profundos) resultados de Análise Real, como a completude da reta, apresenta uma ideia visual relativamente simples de como introduzir o conjunto $E(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ e definir a^x tomando a maior das cotas inferiores, quando $0 < a < 1$ ou a menor das cotas superiores, quando $a > 0$.

Dessa forma, considerando a concepção dinâmica de Reis (2001), entendemos que os elementos intuitivos presentes nas ilustrações intuitivas apresentadas nas Figuras 1 e 2 contribuem para a visualização, a imaginação e a criatividade dos alunos. Cabe destacar que, além de conceber a visualização como um importante processo mental ressaltado pela intuição,

neste artigo, entendemos visualização nos seguintes termos, estabelecidos por Arcavi (2003):

Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (p. 217).

Nesse contexto, a visualização proporcionada pela interpretação das ilustrações apresentadas nas Figuras 1 e 2 em sala de aula sedimenta, intuitivamente, o caminho para a formalização e a generalização necessárias à definição rigorosa da função exponencial, com a qual culmina a construção proposta em Martins (em preparação).

Cabe ressaltar, ainda, que a apresentação dos conteúdos em sala de aula é elaborada por cada professor de Análise Real que tem, em certa medida, liberdade para decidir a ordem, o tempo e a forma de apresentação, especialmente, daqueles conteúdos que precisam ser ensinados de uma maneira lógica e adequada à aprendizagem dos alunos. A partir dessa premissa, entendemos que o pêndulo entre o rigor e a intuição na abordagem didática dos diversos conceitos a serem construídos movimentam-se, ora para um lado, ora para outro, muito em função da experiência docente do professor e, principalmente, de sua crença em como tal abordagem vai, de fato, contribuir para a aprendizagem dos conceitos em voga destacados/focados.

Destarte, entendemos que nossa argumentação pelas possibilidades de visualização, intuição, formalização e generalização advindas da construção proposta em Martins (em preparação) não implica, de modo algum, em desconsiderar tais possibilidades nas construções apresentadas nos livros didáticos de Análise Real aqui analisados, exatamente, por vislumbrarmos as potencialidades do movimento pendular entre o rigor e a intuição, como assim o descrevemos.

Entretanto, também cabe retomar nossa consideração de que um livro didático de Análise Real desempenha um papel fundamental na configuração de seu currículo público pois, na prática, ao ser adotado como referência principal para o desenvolvimento da disciplina, acaba por influenciar, diretamente, na abordagem didática dos conteúdos, em sala de aula. Dessa forma, concluímos que, se o livro adotado, em suas construções propostas, prima por uma abordagem rigorosa dos conceitos analíticos sedimentada pela intuição, maior facilidade terão os professores de movimentar-se pendularmente no ensino rumo a uma aprendizagem que, de fato, seja significativa e interpretativa, especialmente, por parte de alunos que, futuramente, também serão professores, nos mais variados níveis de ensino.

6 Considerações Finais

As construções apresentadas nos clássicos livros didáticos de Análise Real aqui analisados possuem a vantagem de permitir obter importantes propriedades do Cálculo Diferencial e Integral para as funções $\exp(x)$, $\ln(x)$, a^x e $\log_a x$. Todavia, tais construções exigem um longo percurso de conhecimentos de Análise Real e as definições apresentadas em (2), sob a concepção dinâmica que adotamos, pouco ressaltam os elementos intuitivos que devem ser trabalhados numa perspectiva didática.

Outrossim, entendemos que uma definição rigorosa da exponencial é fundamental para a formação de professores e de bacharéis em Matemática, bem como concebemos a Análise Real como uma oportunidade ímpar para a construção de conceitos matemáticos nucleares que colaboraram com o desenvolvimento do pensamento analítico, tão importante na constituição

de um pensamento matemático amplo e sólido. Entretanto, também defendemos que, no contexto do ensino de Análise Real, há que se considerar a centralidade de tal construção por meio de percursos didáticos que proporcionem uma exploração múltipla e flexível dos conceitos construídos, buscando um equilíbrio entre significação/compreensão intuitiva e validação/demonstração rigorosa, à luz da aprendizagem dos alunos.

Por fim, reafirmamos a importância da realização de mais pesquisas sobre a apresentação de conceitos matemáticos em livros didáticos, particularmente, de disciplinas de conteúdo matemático avançado. Acreditamos que tais pesquisas podem contribuir para que os professores reflitam e até mesmo repensem o ensino desses conteúdos, particularmente, no Ensino Superior, lócus de exponenciação de conhecimentos matemáticos e pedagógicos, tanto por parte dos autores dos livros didáticos, como por parte dos professores que os adotam nas mais variadas disciplinas.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação do Ministério da Educação (FNDE/MEC) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (Fapemig) RED-00133-21, o segundo autor agradece o apoio da Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação (Proppi) da Universidade Federal de Ouro Preto (Ufop), Edital de Auxílio Pesquisador, e o terceiro autor agradece o apoio da Fapemig RED-00133-21.

Referências

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1024312321077>
- Ávila, G. S. S. (1999). *Introdução à Análise Matemática*. Blucher.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons.
- Figueiredo, D. G. (1996). *Análise I*. Universidade de Brasília.
- Fischbein, E. (1978). Intuition and Mathematical Education. *Osnabrucker Schriftenzur Mathematik*, 1(1), 148-176.
- Lima, E. L. (2002a). *Análise Real* (Vol. 1). IMPA.
- Lima, E. L. (2002b). *Curso de Análise* (Vol. 1). Projeto Euclides.
- Lima, E. L. (2013). *Números e Funções Reais*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1999). Marcos históricos no desenvolvimento do conceito de potência. *Educação e Matemática*, 52(1), 29-34. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/784>
- Poincaré, H. (1913). *The Foundations of Science*. The Science Press.
- Reis, F. S. (2001). *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. [Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas]. <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2001.206743>
- Reis, F. S. (2009). Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise. In M. C. R Frota & L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates* (pp. 81-97). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 151-169. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00305619>.