



## Indícios do conhecimento especializado do professor sobre os números racionais evidenciados por professoras do 4º e 5º ano participantes de um projeto de pesquisa em Lesson Study

**Priscila Bernardo Martins**  
Universidade Cruzeiro do Sul  
São Paulo, SP — Brasil  
✉ [priscila.bmartins11@gmail.com](mailto:priscila.bmartins11@gmail.com)  
ORCID [0000-0001-6482-4031](https://orcid.org/0000-0001-6482-4031)

**Edda Curi**  
Universidade Cruzeiro do Sul  
São Paulo, SP — Brasil  
✉ [edda.curi1@gmail.com](mailto:edda.curi1@gmail.com)  
ORCID [0000-0001-6347-0251](https://orcid.org/0000-0001-6347-0251)



2238-0345 

10.37001/ripem.v16i1.4722 

Recebido • 21/09/2025  
Aprovado • 06/03/2026  
Publicado • 30/04/2026

Editoria • Edvonete Souza de Alencar   
Veridiana Rezende 

**Resumo:** Este texto apresenta parte dos resultados do Projeto de Pesquisa *Contribuições da pesquisa para o processo de ensino e de aprendizagens dos Números Racionais nos 4 e 5º anos do Ensino Fundamental*. Trata-se de um Projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) no âmbito do Programa de Pesquisa em Educação Básica – PROEDUCA – FAPESP / SEDUC-SP. Assim, este artigo tem por objetivo identificar indícios do conhecimento especializado das professoras que ensinam matemática no 4º e 5º ano acerca da tematização Ensino das Frações e seus diferentes significados no contexto de formação do referido projeto, que envolve duas diretorias de ensino do Estado de São Paulo (Leste 1 e Campinas Leste). O percurso metodológico adotado foi a abordagem qualitativa de cunho interpretativo (Erickson, 1986). Os dados evidenciam que o ciclo Lesson Study mobilizou e transformou o conhecimento das professoras, especialmente no domínio do Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK) e no subdomínio Conhecimento da Estrutura da Matemática. O principal desafio identificado reside no Conhecimento do Conteúdo Matemático, evidenciado pela dependência de técnicas operatórias para comparação de frações e pela limitação conceitual ao atrelar a fração unicamente a parte-todo/divisão, o que é criticado por ter influenciado as dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

**Palavras-chave:** Conhecimento Especializado do Professor de Matemática. Ensino de Frações. Lesson Study. Formação de Professores.

### Evidence of the teacher's specialized knowledge of rational numbers demonstrated by 4th and 5th grade teachers participating in a Lesson Study research project

**Abstract:** The text above presents part of the results of the Research Project "Contributions of research to the teaching and learning process of Rational Numbers in the 4th and 5th years of Elementary School." This project was funded by the São Paulo Research Foundation (FAPESP) within the scope of the Basic Education Research Program – PROEDUCA – FAPESP / SEDUC-SP. Therefore, this article aims to identify evidence of the specialized knowledge of teachers who teach Mathematics in the 4th and 5th years regarding the topic of Teaching Fractions and their different meanings in the context of teacher training within a FAPESP-funded Research Project involving two education directorates in the State of São Paulo (East 1 and Campinas East). The data show that the Lesson Study cycle mobilized and transformed the teachers' knowledge, especially in the domain of Didactic Content Knowledge (PCK) and the subdomain of Knowledge of the Structure of Mathematics. The main challenge identified lies in Mathematical Content Knowledge, evidenced by the dependence on operational techniques

for comparing fractions and by the conceptual limitation of linking fractions solely to part-whole/division, which is criticized for having influenced students' learning difficulties.

**Keywords:** Specialized Knowledge for Mathematics Teachers. Teaching Fractions. Lesson Study. Teacher Training.

## **Evidencia del conocimiento especializado del docente sobre números racionales demostrado por docentes de 4° y 5° grado que participaron en un proyecto de investigación de Estudio de Lecciones**

**Resumen:** El texto anterior presenta parte de los resultados del Proyecto de Investigación "Contribuciones de la investigación al proceso de enseñanza y aprendizaje de los Números Racionales en 4.º y 5.º años de Educación Primaria". Este proyecto fue financiado por la Fundación de Apoyo a la Investigación Científica del Estado de São Paulo (FAPESP) en el marco del Programa de Investigación en Educación Básica – PROEDUCA – FAPESP/SEDUC-SP. Por lo tanto, este artículo busca identificar evidencias del conocimiento especializado de docentes de Matemáticas en 4.º y 5.º años sobre la enseñanza de las fracciones y sus diferentes significados en el contexto de la formación docente, dentro de un Proyecto de Investigación financiado por la FAPESP, que involucra a dos direcciones de educación del Estado de São Paulo (Este 1 y Este de Campinas). Los datos muestran que el ciclo de Estudio de Clases movilizó y transformó el conocimiento del profesorado, especialmente en el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) y el subdominio del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas. El principal desafío identificado reside en el Conocimiento del Contenido Matemático, evidenciado por la dependencia de técnicas operativas para comparar fracciones y por la limitación conceptual de vincular las fracciones únicamente con la división, lo cual se critica por haber influido en las dificultades de aprendizaje del alumnado.

**Palabras clave:** Conocimientos Especializados para Profesores de Matemáticas. Enseñanza de Fracciones. Estudio de Lecciones. Formación Docente.

### **1 Introdução**

Este texto apresenta parte dos resultados do Projeto de Pesquisa *Contribuições da pesquisa para o processo de ensino e de aprendizagens dos Números Racionais nos 4 e 5º anos do Ensino Fundamental*. Trata-se de um Projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) no âmbito do Programa de Pesquisa em Educação Básica – PROEDUCA – FAPESP / SEDUC-SP. O Projeto envolve o tema matemático Ensino dos Números Racionais. O principal propósito do ensino dos Números Racionais, no quarto e quinto ano, é levar os estudantes a perceberem que os Números Naturais, já conhecidos desde os primeiros anos de escolaridade, não são suficientes para resolver determinados problemas do nosso dia a dia.

Para os estudantes, segundo Escolano e Gairin (2005), os Números Racionais, especialmente as frações, surgem como uma necessidade para resolver situações problemas em que os números naturais se mostram insuficientes, situações essas em que o resultado de uma medida não pode ser expresso por um número natural. Na Educação Básica, um dos conteúdos mais importantes é o conhecimento desse tema, em especial, os fracionários. Em muitos países, os estudantes apresentam dificuldades de compreender e operar frações (Powell, 2018).

Pesquisadores como Powell (2018) reconhecem que compreender frações vai além, de uma proficiência processual, mas também conceitual. No entanto, para os professores e estudantes, falta o conhecimento conceitual de frações e suas operações (Lamon, 2007). Conforme a autora, esse é um dos conteúdos matemáticos mais complexos do currículo; de

difícil ensino, longo desenvolvimento e elevado desafio cognitivo. Ela observa ainda que muitos professores não têm plena consciência dos obstáculos envolvidos na conceitualização desse conjunto numérico.

Scheffer e Powell (2019) investigaram o conceito de fração apresentado nos livros de Matemática do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), de 2019, no Brasil. Eles identificaram que a evidência na temática fração no 4º ano é dada predominantemente para o significado de parte-todo e se voltam à partição de alimentos, como bolos, pizzas, dentre outros.

Segundo as pesquisas de Campos *et al.* (2006), os professores que ensinam matemática nos anos iniciais priorizam as situações de parte-todo como o principal contexto para o ensino de fração. Neste sentido, limitam-se a utilizar outras situações com diferentes significados para ensinar esse conceito e isso implica na superação de erros e concepções equivocadas.

Pesquisas, como a de Nunes e Bryant (1997), revelam que realizar o ensino apenas no significado de parte-todo leva os estudantes a desenvolverem seus raciocínios sobre fração, fundamentados na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas nelas envolvidas. Nunes *et al.* (2003), baseada nos trabalhos de Kieran (1988), afirma que, para que os estudantes tenham uma aprendizagem do conceito de fração, é necessário que o trabalho do professor seja pautado a partir de cinco significados: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Assim, levando em consideração esses significados que envolvem o Ensino de Frações, as formações do Projeto se estruturaram em torno do estudo desses significados a partir do uso da metodologia japonesa Lesson Study.

Originária do Japão, a Lesson Study é uma metodologia de formação de professores, centrada na prática do professor e sustentada na colaboração e reflexão, que acarreta o desenvolvimento profissional em matemática, abrangendo a pluralidade de suas dimensões, como os conhecimentos profissionais, as aprendizagens, as mudanças na Prática e a cultura profissional (Martins *et al.*, 2025).

Pesquisadores de diferentes países têm assegurado que a Lesson Study permite aprofundamentos teóricos em diversos domínios do conhecimento – matemático, didático, curricular (Lewis *et al.*, 2004; Ponte *et al.*, 2014; Ponte *et al.*, 2016). Nesse sentido, este artigo tem por objetivo identificar indícios do conhecimento especializado das professoras que ensinam matemática no 4º e 5º ano acerca da tematização Ensino das Frações e seus diferentes significados no contexto de formação um Projeto de Pesquisa com fomento Fapesp envolvendo duas diretorias de ensino do Estado de São Paulo (Leste 1 e Campinas Leste).

Frente a esse objetivo adotamos como percurso metodológico a abordagem qualitativa de cunho interpretativo (Erickson, 1986). Na próxima seção, expomos a discussão teórica que embasa nosso processo analítico e, seguimos com a metodologia e a descrição e discussão dos dados e considerações finais.

## 2 Referencial Teórico

Nesta seção, discutimos inicialmente sobre os conhecimentos profissionais e, na sequência, sobre a vertente do conhecimento matemático envolvido na *Representação Fracionária e seus diferentes significados*.

### 2.1 Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

O conhecimento matemático é aspecto fundamental do professor e corresponde ao conhecimento próprio do componente curricular que se ensina, sendo constituído pelos

subdomínios: conhecimento do conteúdo matemático; conhecimento da estrutura da matemática; conhecimento da prática matemática (Carrillo *et al.*, 2014).

No que tange ao subdomínio conhecimento sobre os objetos de conhecimentos matemáticos, o professor precisa compreender com aprofundamento o conteúdo que se ensina aos estudantes. Neste sentido, Carrillo *et al.* (2014) elencam cinco categorias para representar esse subdomínio — fenomenologia, conhecimento das definições, propriedades e fundamentos, registros de procedimentos e de representação. A fenomenologia, conforme Carrillo *et al.* (2014), corresponde ao conhecimento do professor sobre fenômenos que favorecem um novo conhecimento matemático e dos contextos, dos usos e das aplicações de um objeto de conhecimento matemático a ser ensinado.

Em se tratando do conhecimento das definições, das propriedades e dos fundamentos, Carrillo *et al.* (2014) afirmam que esse conhecimento inclui as relações entre os conceitos matemáticos conectados às suas propriedades específicas e fundamentações em processos matemáticos, como provas e demonstrações ou teoremas. No que tange aos registros de procedimentos, estes referem-se ao conhecimento do professor acerca dos procedimentos a serem desenvolvidos, isto é, o conhecimento de algoritmos convencionais e procedimentos próprios (como fazer?); as condições necessárias para se proceder a um procedimento (quando se pode fazer e usar?); os fundamentos dos algoritmos (por que se faz assim?). O registro de representação envolve o conhecimento relativo às diferentes formas de representar um conceito ou procedimento matemático, envolvendo as representações numéricas, gráficas, verbais e pictóricas (Carrillo *et al.*, 2014).

Em relação ao subdomínio conhecimento da estrutura da matemática, segundo Carrillo *et al.*, (2014), ele corresponde ao conhecimento do professor sobre as conexões dos conteúdos ao longo do currículo, abarcando o conhecimento das prescrições curriculares do conteúdo matemático, as competências específicas e as habilidades prescritas em documentos oficiais. Nesse subdomínio, há quatro categorias — conexões de complexidade (relação dos conteúdos ensinados com os conteúdos futuros); conexão de simplificação (relação dos conteúdos ensinados com os conteúdos anteriores); conexões de conteúdo transversais (correspondem à relação, conexão de um conteúdo matemático com outros conteúdos dos demais componentes curriculares); conexões auxiliares (conexões entre os conteúdos referentes a propriedades, tipos e características entre si).

O subdomínio conhecimento da prática matemática envolve práticas específicas do trabalho matemático e refere-se ao conhecimento dos modos de produzir matemática e compreender a comunicação matemática, o raciocínio, o uso da linguagem matemática, dos processos matemáticos como a resolução de problemas e a investigação (Carrillo *et al.*, 2014).

O Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK) refere-se, segundo Carrillo *et al.*, (2014), ao conhecimento específico do professor, inerente ao trabalho do ensino. Esse conhecimento é constituído por três subdomínios a saber: conhecimento das características da aprendizagem matemática, conhecimento do ensino de matemática e conhecimento dos padrões de aprendizagem da matemática. Assim, o conhecimento das características da aprendizagem matemática, de acordo com Carrillo *et al.* (2014), incorpora os conhecimentos sobre as características de aprendizagem dos estudantes relacionados ao conteúdo matemático como objeto de aprendizagem. Esse conhecimento corresponde às formas de aprendizagem (possíveis modos de aprendizagem associadas à natureza do conteúdo matemático); as aprendizagens e dificuldades dos estudantes (relativos aos erros, obstáculos e dificuldades em relação à Matemática e um conteúdo específico); os modos de interação (conhecimentos sobre os processos e estratégias dos estudantes e conhecimentos sobre o vocabulário empregado para

abordar um determinado conteúdo); o conhecimento de concepções dos estudantes sobre a matemáticas (conhecimentos acerca das expectativas e interesses que os estudantes têm sobre a matemática).

Carrillo *et al.* (2014) afirmam que o domínio do conhecimento do Ensino de Matemática corresponde ao conhecimento de recursos e materiais, incluindo os digitais, relacionados ao Ensino; o conhecimento das tarefas, atividades e exemplo (selecionando com intencionalidade aquelas que são mais potentes aos estudantes em relação a um dado conteúdo); conhecimento de teorias de ensino específico da Educação Matemática.

O domínio Conhecimento dos padrões de aprendizagem da Matemática refere-se ao conhecimento que o professor tem sobre o que está sendo proposto em conformidade com o ano de escolaridade. Esse domínio corresponde ao conhecimento curricular e incorpora três subdomínios. O primeiro refere-se ao conhecimento que o professor tem sobre os conteúdos matemáticos que serão ensinados e o ano/nível que será incorporado em suas aulas. Esse tipo de conhecimento pode ser adquirido pelo professor em uma consulta a um documento norteador, como um currículo prescrito. O segundo subdomínio incorpora o Conhecimento do nível de desenvolvimento conceitual e processual esperado por um conteúdo em um ano/nível de ensino (objetos de conhecimentos e habilidades previstas). O terceiro subdomínio corresponde à sequência de temas, ao conhecimento que o professor tem sobre os conhecimentos prévios dos estudantes sobre um tema e aos conhecimentos posteriores, isto é, à expectativa que o professor tem sobre as aprendizagens que os estudantes deverão desenvolver no decorrer dos anos de escolaridade (Carrillo *et al.*, 2014).

No centro do modelo, estão as crenças do professor em relação à Matemática e sobre os processos de ensino e de aprendizagem dessa área de conhecimento (Carrillo *et al.*, 2014).

## 2.2 Representação Fracionária e seus diferentes significados

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), a ideia do conceito de fração é prescrita na Unidade Temática Número e inicia-se nos primeiros anos de escolaridade ao propor *ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes* (Brasil, 2018, p. 284). No quarto ano, é proposta a abordagem com frações unitárias mais usuais ( $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/10$  e  $1/100$ ) e, no quinto ano, o trabalho amplia-se com a representação fracionária dos números racionais com foco no reconhecimento, nos significados, na leitura e representação na reta numérica, bem como na comparação e ordenação de números racionais na representação fracionária, utilizando a ideia fundamental de equivalência e cálculo de representações fracionárias.

Nunes *et al.* (2003), inspirada em Kieran (1988), afirma que uma aprendizagem do conceito de fração deve levar em consideração cinco significados: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo, os quais apresentamos no quadro abaixo:

Quadro 1: Significados

Significado	ideia	Situação
Parte-todo	Corresponde a partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$ .	Uma barra de chocolate foi dividida em quatro partes iguais. João comeu três dessas partes. Que fração representa a parte que João comeu?

Quociente	Associado à ideia de divisão, ou seja, indicando uma divisão e o seu resultado. Nesse significado temos duas variáveis, uma que corresponde ao numerador e outra ao denominador.	Uma pizza a ser repartida igualmente entre cinco crianças.
Medida	Algumas medidas envolvem fração por se referirem a quantidades intensivas, ou seja, a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Fizemos uma rifa na escola. Foram impressos 150 bilhetes. Minha avó comprou 20 bilhetes. Qual a sua chance de ganhar o prêmio?
Número	Frações, como os inteiros, são números que não precisam, necessariamente, referir-se a quantidades específicas. Existem duas formas de representação fracionária: ordinária e decimal.	Represente o número $\frac{1}{2}$ na forma decimal.
Operador Multiplicativo	O número é um multiplicador da quantidade indicada.	Dei $\frac{3}{4}$ das balas de um pacote de 40 balas para meus irmãos. Quantas balas dei a eles?

Fonte: adaptado de Nunes *et al.* (2003).

Campos *et al.* (2006), referenciadas pelo estudo de Campos e Magina (2005), além do conceito parte-todo, muito usado no ensino de fração no Brasil, apontam para a importância do uso de outras situações, como a de quociente para que os estudantes compreendam a ideia de invariante das frações, ou seja, que quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço de bolo que cada uma receberá. Para as autoras, essa relação inversa entre o divisor e o quociente poderia facilitar o entendimento das crianças de que quanto maior o denominador, menor a parte.

### 3 Metodologia de Pesquisa

Neste estudo, assumimos uma pesquisa de natureza qualitativa de cunho interpretativo (Erickson, 1986) e de tipologia documental e prática. O contexto da pesquisa é o Projeto de Pesquisa *Contribuições da pesquisa para o processo de ensino e de aprendizagens dos Números Racionais nos 4 e 5º anos do Ensino Fundamental: um projeto piloto envolvendo Diretorias de Ensino da Rede Estadual de São Paulo*.

O Projeto está sendo realizado mensalmente, aos sábados, das 8h30 às 11h30 nas dependências da instituição sede, localizada no bairro Liberdade. Há também encontros remotos, entre uma formação e outra, além dos encontros presenciais nas escolas participantes, relativos ao ciclo Lesson Study.

Conforme anunciamos, os participantes da pesquisa são catorze professoras que ensinam Matemática no quarto e quinto ano do Ensino Fundamental de três escolas pertencentes às diretorias Leste 1 (2) e Campinas Leste (1).

O processo de produção de dados ocorreu a partir da aplicação de distintos instrumentos, dentre os quais destacamos: questionário do perfil participante; instrumento do conhecimento

matemático; relatório das professoras participantes; instrumento de atividades práticas de análise; diário do pesquisador; gravação de áudio e vídeo; fotografias e instrumentos relativos ao ciclo de Lesson Study.

Cabe destacar que, neste texto, utilizaremos evidências extraídas desses instrumentos de pesquisa. Portanto, não serão utilizados dados em sua totalidade.

Em relação aos encontros, o Quadro 2, a seguir, apresenta uma síntese dos encontros ocorridos e uma breve descrição das atividades realizadas à luz da metodologia Lesson Study.

**Quadro 2:** Síntese dos encontros

<b>Data e Modalidade</b>	<b>Descrição</b>
21/09/2024 (Presencial)	Abertura do Projeto: contextualização e apresentação dos participantes; Cadastro no sistema Sage; Preenchimento do questionário do Perfil e do Instrumento 1 acerca dos Racionais;
03/10/2024 (Remoto)	Devolutiva do instrumento 1; Discussões acerca dos Números Racionais: significados e representações; Leitura do Texto sobre os Números Racionais;
19/10/2024 (Presencial)	Análise e Avaliação com ênfase nos significados e representações.
07/11/2024 (Remoto)	Análise das atividades do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental.
23/11/2024 (Presencial)	Socialização das análises e fechamento teórico.
07/12/2024 (Presencial)	Confraternização e Revisitação dos Encontros.
22/02/2025 (Presencial)	Revisitação sobre os encontros anteriores; Aprofundamento teórico sobre a Taxonomia de Bloom Autoavaliação dos encontros.
25/02/2025 (Remoto)	Discussão sobre Lesson Study
22/3/2025 (Presencial)	Conversa sobre o Termo de esclarecimento e concordância - comitê de ética; Análise das habilidades relacionadas aos racionais.
25/3/2025 (Remoto)	Discussão sobre a importância de instrumentos diagnósticos e de acompanhamento na Lesson Study
12/4/2025 (Presencial)	Orientação sobre a elaboração do Relatório 1 e aplicação do instrumento 3.
15/4/2025 (Remoto)	Roda de conversa sobre os sentimentos, dúvidas e angústias sobre o instrumento 3.

20/5/2025 (Remoto)	Devolutiva do instrumento 3.
25/05/2025 (Presencial)	Planejamento da aula 27 do material curricular
14/06/2025 (Presencial)	Planejamento da aula 27 do material curricular e encerramento do semestre.
16 e 17/06/2025 (Presencial)	Aplicação do Planejamento na Escola Estadual Professor Joaquim Torres Santiago e primeiro momento da reflexão da aula.
16/08/2025	Reflexão da aula com os pesquisadores e pesquisadores envolvidos no Projeto.

Fonte: Dados do Projeto de Pesquisa.

Cabe explicitar que o Projeto está em andamento e será finalizado em junho de 2026. No tópico adiante, discorreremos acerca da Metodologia de Formação utilizada na formação.

#### 4 Metodologia de Formação Lesson Study

A Lesson Study é uma metodologia de formação de professores. Em sua essência, a metodologia de formação incorpora três etapas, popularizada pelo ciclo do processo de “planejar aula, realizar e ver” (Isoda & Baldin, 2023). Esse processo cíclico, segundo Silva *et al.* (2025, p. 6) “fortalece a prática pedagógica, incentivando a inovação no ensino da Matemática e a construção de um conhecimento mais significativo para os estudantes”.

Desse modo, além das etapas de planejamento, observação e reflexão sobre a aula, nesse projeto, incluímos tais etapas e adaptamos outras no ciclo, em conformidade com os nossos propósitos, contexto (edital Proeduca) e participantes da pesquisa. No subtópico adiante, apresentaremos uma breve descrição das etapas priorizadas no projeto.

##### 4.1 Etapas do ciclo Lesson Study priorizadas no Projeto

A primeira etapa do Projeto, denominada como *Estudo e Diagnóstico*, corresponde ao Estudo das teorizações acerca do Ensino dos Racionais; especificamente nos encontros do projeto, o foco foi a representação fracionária e os seus significados (Kieren, 1988; Nunes & Bryant, 1997). Também foram socializadas pesquisas que discutem o Ensino dos Números Racionais, como, por exemplo, o de Utimura (2019). A partir de todo esse estudo, as professoras analisaram, à luz dos teóricos abordados, os itens de avaliações referentes à Prova Paulista, relativa aos três bimestres e as atividades presentes em dois materiais empregados na Rede Estadual, um denominado Slides e o outro Currículo em Ação, referente ao quinto ano de escolaridade, no tocante ao Ensino das Frações.

No decorrer dos encontros, incorporamos o estudo da taxonomia de Bloom (1956), com a finalidade de mostrar às professoras os domínios cognitivos presentes nas habilidades do currículo e explicitar a composição de uma habilidade. Todo esse estudo também foi norteado pela análise de habilidades do currículo, itens de avaliação e atividades dos materiais supracitados.

A partir desse estudo, seguimos para etapa *Planejamento*, que corresponde ao planejamento minucioso de uma aula do material curricular Currículo em Ação a partir de aspectos norteadores contidos em um instrumento de planejamento, tais como: conteúdo (s) Matemático(s) abordado(s) na aula (atividades); como o professor ensinará; o que os estudantes

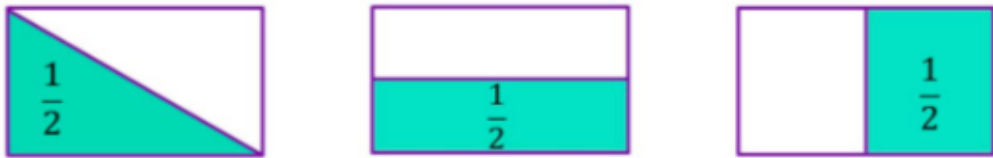
precisam saber para realizar a atividade; possíveis dúvidas dos estudantes; possíveis dúvidas suas; o que planeja fazer; tempo para a atividade; organização da sala; materiais necessários e indicadores de avaliação.

A partir desses aspectos norteadores, num primeiro momento, as professoras foram organizadas em 3 grupos, por escola, para planejar a aula 27, denominada *Inteiro e parte do inteiro*; depois, planejaram coletivamente, a partir da condução da coordenadora do Projeto.

A Figura 1 ilustra a atividade planejada.

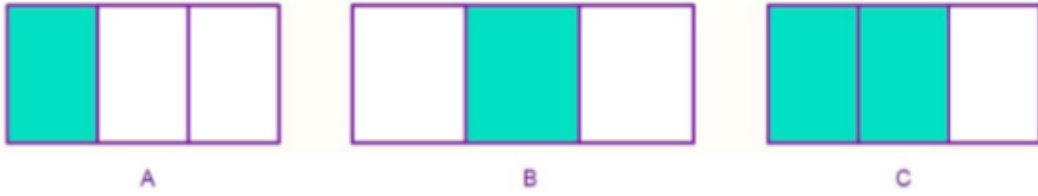
**Figura 1:** Atividade Planejada

1 Observe as figuras seguintes e responda:




A) Em quantas partes iguais cada figura foi dividida?  
 B) Em cada figura, quantas partes foram pintadas?

2. Observe as figuras:



A) Em quantas partes as figuras foram divididas?  
 B) O que difere a figura A da figura C?

3. Observe a pizza e responda:



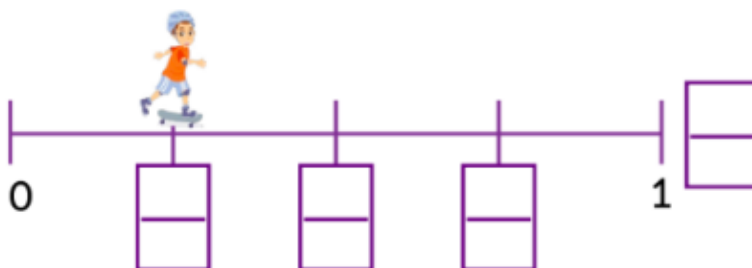
A) Em quantas partes iguais essa pizza foi cortada?  
 B) Que fração representa um pedaço dessa pizza?

4. A figura representa o percurso que Bento anda com seu skate todos os finais de semana.

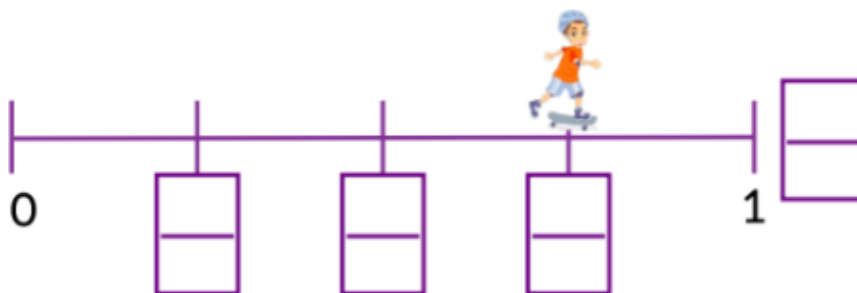


Identifique as frações unitárias de acordo com seu deslocamento.

A) Bento já concluiu a primeira parte, que fração representa esse ponto?



B) Que fração representa a parte que Bento está no percurso?



C) Desenhe uma reta abaixo que represente a metade do percurso feito por Bento.

Fonte: Currículo em ação- 2º bimestre (2025)

Na discussão coletiva, as professoras, juntamente com a formadora responsável, identificaram que as atividades envolvem o significado de parte/todo, representação fracionária, fração unitária, leitura, função do numerador e do denominador e reta numérica. Em síntese, adiante evidenciamos os momentos planejados da aula:

- **Roda de conversa para verificar os conhecimentos prévios dos estudantes:** exemplo de questionamos a serem apresentados pela professora: Já ouviram falar em fração? Em que situações você já viu serem usadas? Dê exemplos. Na fração  $\frac{3}{5}$ , qual é o numerador? E qual é o denominador? O que significa o denominador? E o numerador? Como vocês leem a fração  $\frac{2}{3}$ ? Vocês já viram uma fração inserida em uma reta numérica? Quem pode dar um exemplo na lousa?
- **Proposta de dobradura com folha de sulfite:** a professora dobrará uma vez para mostrar a metade  $\frac{1}{2}$  e depois, dobrar mais uma vez para mostrar  $\frac{1}{4}$  e assim por diante.
- **Aplicar a atividade e acompanhar as discussões:** a professora deverá organizar os estudantes em dupla e aplicar a atividade. Depois, ela será corrigida coletivamente. A ideia é que a professora oriente os estudantes a não recusarem o que foi feito pela dupla nas folhas das atividades, mas, sim, corrigir no próprio material curricular.
- **Sistematização:** a professora introduzirá algumas situações envolvendo o significado de quociente, discutir e socializar as resoluções. Exemplo de uma situação a ser introduzida: um

chocolate foi repartido igualmente entre 2 meninos e outro chocolate do mesmo tamanho foi repartido igualmente entre 3 meninas. a) Quem comeu o maior pedaço de chocolate: as meninas ou os meninos? b) Qual é a fração de chocolate que cada menino comeu? E as meninas, qual fração do chocolate cada uma comeu?

Após o planejamento, três professoras de uma mesma escola, voluntariamente, se colocaram à disposição para a aplicação. Mas, neste texto, usaremos os dados apenas de uma professora, a qual chamaremos de P1.

Após o planejamento, seguimos para a etapa *observação da aula* (acompanhamento da prática). A aplicação da aula planejada ocorreu no dia 16/06/2025 em uma escola pertencente à diretoria de Ensino Leste 1, localizada na cidade de São Paulo. Participaram como observadores: a coordenadora geral do Projeto, as duas pesquisadoras que apoiam a coordenação, duas doutorandas, uma mestranda, uma egressa do mestrado e outra do doutorado. As aulas foram gravadas e registradas em um instrumento destinado à observação.

A professora organizou as aulas em duplas, conforme planejado, distribuindo os estudantes em dois blocos: estudantes que tiveram a autorização para realizar a pesquisa e estudantes que não tiveram essa autorização. Cabe destacar que todos os estudantes realizaram as atividades, mas aqueles que não tiveram autorização não foram gravados.

A professora iniciou a aula com uma roda de conversa sobre frações e fez alguns questionamentos para a turma, tais como: *Quem sabe o que é fração? Alguém já ouviu falar?* Um dos estudantes respondeu que fração é como uma pizza.

Em seguida, ela registrou na lousa a fração  $\frac{3}{5}$  e disse: *A fração possui um numerador e um denominador. Eu quero saber, aqui, nesta fração, quem seria o numerador e quem seria o denominador.*

Depois, questionou a turma: *"Observe pessoal. Olhem a palavra DE-NO-MI-NA-DOR. Denominador é aquele que domina, certo? Vocês falaram sobre pizza, sobre tantas coisas, então vou desenhar aqui a famosa pizza de vocês.*

Após esse momento, a professora deu sequência à aula, propondo a dobradura do papel sulfite. No decorrer da atividade, ela reforçou, o tempo todo, a ideia de divisão, conforme exemplo de uma das suas falas: *Em quantas pessoas eu consigo dividir esta folha?*

Na sequência, a professora realizou algumas adaptações que não estavam previstas no planejamento. Uma das adaptações refere-se à confecção de um painel contendo algumas frações e como se lê essas frações. No momento em que estava fazendo as leituras de frações, a professora mencionou "avos", mas não deu exemplos.

Após isso, a professora registrou uma fração na lousa, mas com o painel ao lado, como suporte. Posteriormente, ela explicou aos estudantes: *A fração nunca será algo exato, ela depende muito da grandeza de quantas partes eu estou dividindo. Quando você pensa em fração, você pensa em divisão... Então, para eu identificar, dois oitavos, um quarto, depende de quantas formas, eu estou dividindo a minha folha... Então, na primeira divisão que vocês fizeram, eu falei para vocês dobrarem a folha em oito partes e vocês pintaram duas, vocês pintaram dois oitavos da folha.*

Após esse momento, a professora adaptou mais uma vez a aula planejada, confeccionando em papel pedaços de pizzas com o registro da fração que representa a parte. Um fato que merece destaque é que em todas as suas falas ela reforça que a pizza era única, endossando o conceito de parte-todo. Depois, abriu os *slides* e apresentou os conceitos de

numerador e denominador. Após isso, introduziu a explicação relativa à reta numérica e registrou uma reta na lousa. Dentre os diálogos para explicar a reta numérica, cabe destacar a fala da professora: *Todo mundo aqui tem sua régua, certo? Eu tenho aqui a minha régua. A minha reta numérica... Na nossa régua, começa no zero. E depois do zero, qual é o próximo número?*

Após a explanação acerca da reta numérica, a professora distribuiu as atividades para os estudantes e novamente adaptou esse momento da aula, fazendo a leitura em voz alta das atividades propostas, enfatizando o tempo todo as partes pintadas. Durante a realização das atividades da aula, alguns estudantes tiveram dificuldades em representar a reta numérica. Desse modo, a professora representou a reta numérica na lousa e fez a indicação do ponto na metade da reta, o que já estaria mostrando como eles deveriam fazer no item C.

Após a realização das atividades, a professora as recolheu, conforme combinado, realizou a correção na lousa e solicitou que eles registrassem no material curricular. Após esse momento, a professora prosseguiu para o momento de sistematização, concedendo um tempo para que os estudantes resolvessem as situações propostas, mas sem formalizar o conteúdo frações. Essas situações resolvidas foram recolhidas e serão analisadas no âmbito de uma Tese de Doutorado.

Após a etapa de observação das aulas, prosseguimos para a etapa destinada à reflexão sobre a aula observada. Essa etapa foi estruturada em três momentos constituidores. O primeiro momento foi destinado a um diálogo com as professoras que tiveram a sua aula observada e os observadores do Projeto. No segundo momento, as professoras participantes analisaram as resoluções dos estudantes relativas à aula 27 e discutiram acerca de alguns erros cometidos por eles, buscando identificar os obstáculos didáticos e epistemológicos nesse processo e, por fim, no terceiro momento, as professoras assistiram aos episódios mais relevantes das aulas observadas e refletiram de forma articulada acerca das aprendizagens e dificuldades dos estudantes.

## 5 Discussões e Resultados

Neste texto, pretendemos analisar e comunicar aspectos importantes relativos ao ciclo em Lesson Study (estudo e diagnóstico; planejamento; observação e reflexão). Assim, nos fundamentamos a partir das teorizações de Carrillo *et al.* (2014) que focalizam o conhecimento didático e seus grandes domínios de conhecimento — o Conhecimento Matemático (MK) e o Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK).

Em relação ao subdomínio *Conhecimento do Conteúdo Matemático*, o qual corresponde ao conhecimento aprofundado do conteúdo, identificamos que as professoras mostraram dificuldades em relação aos conhecimentos envolvidos na aula 27, ou seja, em relação ao conteúdo frações. A primeira constatação surgiu na etapa *estudo e diagnóstico*, a partir das análises das respostas dadas pelas professoras no instrumento envolvendo conhecimentos matemáticos. A título de exemplo podemos citar a questão 1, a seguir: “A professora Vilma pediu aos seus alunos para compararem as representações fracionárias  $\frac{5}{4}$  e  $\frac{8}{3}$  e justificar a resposta. Fabiana disse que  $\frac{8}{3}$  é a maior porque 8 é maior que 5 e 4 é maior que 3. A resposta de Fabiana está correta? Justifique. Se fosse a professora Vilma, que intervenção faria nessa resposta?” Nessa questão, os professores, embora alguns tenham respondido “sim ou não” sem apresentar uma justificativa plausível, a maioria, para comparar as frações e verificar qual resposta estaria correta, recorreu à técnica operatória de converter a representação fracionária em representação decimal e, assim, comparar os decimais, porém sem compreensão acerca das

relações presentes nas representações fracionárias. Também constatamos problemas com relação às funções e ao uso do numerador e denominador, inclusive na alteração da ordem dos conceitos.

Na etapa de planejamento da aula 27, também notamos muitas dificuldades das professoras em relação aos conhecimentos da Matemática. Durante a discussão e o preenchimento do instrumento, elas não souberam indicar os conhecimentos envolvidos nas atividades e não souberam conceituar frações unitárias e termos, como numerador e denominador. Mas sabiam identificar as frações e, em uma fração, sabiam apontar qual era o numerador e o denominador.

Na observação da aula, a professora (P1) apresentou alguns conceitos relativos à fração, dentre os quais destacamos: “Quando você pensa em fração, você pensa em divisão... Então, para eu identificar, dois oitavos, um quarto, depende de quantas formas, eu estou dividindo a minha folha”. A fala dela está atrelada ao fato de que é comum encontrarmos, em livros didáticos, a fração como uma divisão. No caso, o significado de quociente, segundo Nunes *et al.* (2003), está associado à ideia de divisão, ou seja, indicando uma divisão e o seu resultado. O significado de parte-todo corresponde à partição de um todo em  $n$  partes iguais, em que cada parte pode ser representada como  $1/n$ . No entanto, em outros significados, como razão, segundo Behr *et al.* (1983), a razão é uma relação que carrega a noção de magnitude relativa, considerada, mais corretamente, como um índice comparativo do que um número. Compreendemos que ensinar o conceito de fração atrelado de modo exclusivo à divisão leva os estudantes a desenvolverem seus raciocínios fundamentados em operações, em detrimento dos significados envolvidos.

Na etapa reflexão sobre a aula, no segundo momento, as professoras identificaram alguns erros em relação às atividades do material, mostrando que as etapas de Estudo e Diagnóstico foram primordiais para a constituição e ampliação dos conhecimentos da Matemática. Essa constatação só foi possível devido ao primeiro momento da reflexão coletiva, no qual a formadora responsável foi trazendo, de forma natural, alguns conceitos erroneamente abordados na aula desenvolvida e mostrando o quanto isso influencia nas aprendizagens dos estudantes.

Em se tratando do subdomínio *Conhecimento da Estrutura da Matemática*, que corresponde ao conhecimento do professor acerca das conexões dos conteúdos ao longo do currículo, envolvendo o conhecimento das prescrições curriculares do conteúdo matemático, as competências específicas e as habilidades descritas em documentos oficiais, esse tipo de conhecimento foi manifestado, de modo especial, na etapa estudo e diagnóstico, na qual as professoras tiveram todo um estudo teórico de currículo e também da taxonomia de Bloom. Cabe destacar que, nas primeiras formações, as professoras não sabiam identificar qual parte da habilidade do currículo estava presente nos itens de avaliações, como também nas atividades. Foi feito um trabalho de identificação de habilidade; antes, porém, elas tiveram conhecimento de como uma habilidade é composta e como o verbo relacionado ao domínio cognitivo faz toda a diferença.

Notamos, na etapa de planejamento, alguns avanços em relação a esse domínio, pois as professoras perceberam que trazer alguns recursos para a aula a ser implementada poderia se distanciar da habilidade contemplada nas atividades. Ademais, também perceberam que poderiam trabalhar a aula de frações equivalentes (aula 9) antes mesmo da (aula 8) comparação de frações.

Em se tratando do Domínio *Conhecimento Didático do Conteúdo*, que corresponde ao conhecimento particular do professor sobre o trabalho de ensino, durante as etapas *Estudo e*

*diagnóstico e Planejamento* do ciclo em Lesson Study, as professoras traziam as suas experiências de sala de aula, articulando com a teoria estudada; mostravam contemplar, em suas práticas, uma cultura de colaboração e aprendizagem, apontando, inclusive, os aspectos comunicativos contemplados em suas aulas. Na etapa observação, notamos que as falas em outras etapas correspondem à prática realizada em sala de aula, pois, no caso da professora (P1), foco deste texto, ela mostrou, em vários momentos, a proposição de uma cultura de aprendizagem e de comunicação entre os estudantes.

No que tange ao subdomínio *Conhecimento das Características da Aprendizagem Matemática*, que engloba o conhecimento sobre as dificuldades e formas de raciocínio dos estudantes, identificamos diferentes episódios, dentre os quais gostaríamos de destacar que, na etapa *estudo e diagnóstico*, no momento de analisar os itens de avaliação referentes à representação fracionária, as professoras indicavam com facilidade as dificuldades que os estudantes apresentavam em relação a esse objeto de conhecimento, destacando, inclusive, os diferentes tipos de raciocínios que os seus estudantes apresentavam frente às propostas de atividades. Na etapa de *planejamento*, essa constatação foi legitimada, pois as professoras souberam indicar as possíveis dificuldades dos estudantes em relação às atividades a serem propostas, bem como as intervenções necessárias para a superação delas, além de apontarem como os estudantes poderiam ser organizados e os critérios avaliativos.

Antes de finalizarmos, gostaríamos de destacar que, todo esse percurso do ciclo em Lesson Study foi catalisador para a constituição e mobilização desses diferentes domínios do conhecimento e para transformações das práticas das professoras.

Constatamos que o conhecimento matemático, por sua vez, é a base para os demais tipos de conhecimento e identificamos como esses domínios dos conhecimentos estão imbricados. A título de exemplo, podemos citar o fato de a professora, na etapa de observação da aula, no momento da atividade de dobradura de sulfite, reforçar a ideia de que pintar uma das partes traria maior compreensão para os estudantes acerca do significado de parte-todo e, depois, ao fazer a leitura dos enunciados de cada atividade, ela frisar para que os estudantes prestassem atenção nas partes pintadas, reverberando nas resoluções dos estudantes, conforme Figura 2 adiante.

**Figura 2:** protocolo de resolução de um estudante

2 Observe as figuras:

A B C

A Em quantas partes as figuras foram divididas? **3**  
 A 1 PARTE, B 1 PARTE, C 2 PARTES

B O que difere a figura A da figura C?  
 A PARTE A TEM UMA E A C TEM 2

Fonte: dados do projeto.

Cabe destacar que, embora não seja foco deste texto, os estudantes tiveram mais dificuldade com o significado parte-todo do que com o de quociente. Nesse sentido, há indícios de que a concepção de abordar a ideia de fração como divisão pode ter influenciado as aprendizagens dos estudantes.

Em síntese, foram identificados vários episódios, em todas as etapas do ciclo em Lesson Study, que evidenciam o conhecimento especializado das professoras que ensinam Matemática no quarto e quinto ano, a saber:

Em relação ao Subdomínio *Conhecimento do Conteúdo Matemático*:

- categoria Definições, Propriedades e Fundamentos: dificuldade em conceituar frações unitárias e os termos numerador/denominador, bem como em compreender as relações fracionárias.
- Registros de Procedimentos: conversão para decimal para comparação das frações.
- Registro de Representação: analogia da reta numérica com a régua e o foco em representações gráficas (pizza, dobradura).
- Fenomenologia: reforça exclusivamente a ideia de parte-todo (a pizza era única, dobradura de papel), atrelando fração unicamente à divisão (quociente).

No que tange ao subdomínio *Conhecimento da Estrutura da Matemática*:

- Conexão de Complexidade / Simplificação: as professoras constataram que poderiam trabalhar a aula de frações equivalentes (aula 9) antes da comparação de frações (aula 8).

No que se refere ao subdomínio *Conhecimento do Ensino de Matemática*:

- Tarefas: planejamento de tarefas (roda de conversa, dobradura, atividade principal) para desenvolver significados de parte-todo, fração unitária e reta numérica.
- Teorizações de ensino: estudo teórico sobre a representação fracionária e seus significados (Kieran, 1988; Nunes & Bryant, 1997).

Quanto ao subdomínio *Conhecimento das Características da Aprendizagem Matemática*:

- Potencialidades e dificuldades dos estudantes: as professoras revelaram facilidade em identificar as dificuldades, os erros (obstáculos didáticos/epistemológicos) e os diferentes tipos de raciocínios dos estudantes em relação à representação fracionária.

Em relação ao subdomínio *Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem da Matemática*:

- Conteúdos/Habilidades do currículo: inicialmente, as professoras não sabiam identificar qual parte da habilidade estava presente nos itens de avaliação e atividades. Contudo, o estudo da Taxonomia de Bloom e da composição das habilidades (verbo relacionado ao domínio cognitivo) levou a um avanço na identificação e compreensão do currículo.

## 6 Considerações Finais

No presente texto, buscamos identificar indícios do conhecimento especializado das professoras que ensinam Matemática no 4º e 5º ano acerca da tematização Ensino das Frações e seus diferentes significados no contexto de formação um Projeto de Pesquisa com fomento

Fapesp, envolvendo duas diretorias de ensino do Estado de São Paulo (Leste 1 e Campinas Leste).

Com esse objetivo, empregamos a metodologia de formação Lesson Study, adaptando as etapas originais, centrando-se nas etapas— estudo e diagnóstico; planejamento; observação da aula e reflexão sobre a aula.

Alicerçadas pelo referencial teórico sobre o Conhecimento Especializado do Professor, proposto por Carrillo *et al.* (2014), triangulamos os instrumentos de pesquisa e analisamos os dados. Dentre os resultados, constatamos a importância de priorizar o domínio *Conhecimento Matemático* (MK), no caso deste estudo, o conteúdo frações nas formações, no qual constatamos, em diferentes instrumentos, as dificuldades conceituais e procedimentais dos professores acerca das representações fracionárias. Neste sentido, compreendemos que o professor precisa conhecer o conceito para utilizar a linguagem fracionária em sala de aula; isso porque os estudantes precisam estar cientes de aspectos importantes no estudo das frações, ou seja, a quantidade de partes consideradas, a igualdade dessas partes e o número total de partes iguais em que o todo foi dividido.

Outro aspecto importante a ser destacado refere-se à constituição e ampliação do *Conhecimento da Estrutura da Matemática*, pois, além de os professores conhecerem como um conteúdo é abordado em diferentes anos de escolaridade, compreendendo a ideia de rede, estes conseguiram identificar erros no material currículo em ação, verificando, por exemplo, que é mais coerente abordar as frações equivalentes antes de comparação de frações, superando a ideia de que, para comparar frações, basta "dividir o numerador pelo denominador e comparar os decimais", ou até mesmo "divido pelo de baixo e multiplico pelo de cima, assim transformo em um mesmo numerador".

Outra constatação refere-se à ampliação do Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK), subdomínio *Conhecimento do Ensino de Matemática*, pois, na etapa de reflexão, as professoras puderam rever estratégias didáticas que nem sempre são compatíveis com o ano de escolaridade, conforme exemplo da leitura dos enunciados das atividades ou ênfase excessiva nas "partes pintadas de uma representação fracionária", em que perceberam que isso reverbera nas resoluções dos estudantes, induzindo-os ao erro.

Os dados evidenciam que o ciclo Lesson Study mobilizou e transformou o conhecimento das professoras, especialmente no domínio do *Conhecimento Didático do Conteúdo* (PCK) e no subdomínio *Conhecimento da Estrutura da Matemática*. O principal desafio identificado reside no *Conhecimento do Conteúdo Matemático*, evidenciado pela dependência de técnicas operatórias para comparação de frações e pela limitação conceitual ao atrelar a fração unicamente à parte-todo/divisão, o que é criticado por ter influenciado as dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

Constatamos, ainda, que abordar a ideia de fração exclusivamente como divisão (quociente) ou com excessivo foco em parte-todo pode ter influenciado nas aprendizagens dos estudantes; os estudantes do 5º ano tiveram mais dificuldade com o significado parte-todo, por ter sido mais enfatizado pela professora P1, do que com o significado de quociente. Isso sugere que o desequilíbrio na abordagem dos significados, limitou a compreensão dos estudantes, reforçando que a aprendizagem do conceito de fração deve considerar e articular cinco significados distintos para que o estudante alcance uma maior compreensão.

Para não concluir, constatamos que a metodologia de formação Lesson Study é promissora na constituição, no desenvolvimento e na mobilização de conhecimentos inerentes

à docência e reforça a compreensão de que esses conhecimentos estão articulados entre si e que se manifestam, em seus diferentes domínios e subdomínios, em cada uma das etapas do ciclo.

## Referências

- Bloom, B. S. (Ed.). (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals* (Handbook I: Cognitive domain). David McKay Company.
- Borelli, S. S. (2017). *Estudos de aula na formação de professores de matemática em turmas de 7º ano do ensino fundamental que ensinam números inteiros* [Tese de doutorado, Universidade Cruzeiro do Sul].
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*.
- Campos, T., & Magina, S. (2005). Primary school teachers' concepts of fractions and teaching strategies [Paper presentation]. 10º Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME-10), Copenhagen, Dinamarca.
- Campos, T. M. M., Magina, S., & Nunes, T. (2008). O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1). <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/545>
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. Á. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Day, C. (1999). *Developing teachers: The challenges of lifelong learning*. Falmer Press.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119–161). Macmillan Publishing Co.
- Escolano, R., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(1).
- Isoda, M., & Baldin, Y. Y. (2023). Estudio de clases japonés, su naturaleza y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, 44(2), 5–35. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p5-35.id1410>
- Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–180). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lewis, C., Perry, R., & Hurd, J. (2004). A deeper look at lesson study. *Educational Leadership*, 61(5), 18–22.
- Martins, P. B. (2020). *Potencialidades dos estudos de aula para a formação continuada de um grupo de professores que ensinam matemática na rede municipal de São Paulo no contexto de uma pesquisa envolvendo implementação curricular* [Tese de doutorado, Universidade Cruzeiro do Sul].
- Martins, P. B., Borelli, S. de S., & Curi, E. (2025). As dimensões de conhecimentos profissionais e de cultura de colaboração evidenciados por professores que ensinam matemática no contexto do lesson study. *Paradigma*, 46(1), Artigo e2025020. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025020.id1726>

- Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Artmed.
- Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D., & Wade, J. (2003, junho). *The effect of situations on children's understanding of fractions* [Apresentação de trabalho]. Encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, Inglaterra.
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355–377.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema*, 30(56), 868–891.
- Powell, A. B. (2018). Melhorando a epistemologia de números fracionários: uma ontologia baseada na história e neurociência. *REMATEC*, 13(29). <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2018.n29.p0p.id148>
- Richit, A. (2020). Estudos de aula na perspectiva de professores formadores. *Revista Brasileira de Educação*, 25.
- Richit, A. (2021). Desenvolvimento profissional de professores: um quadro teórico. *Research, Society and Development*, 10(14), Artigo e22247. <https://doi.org/10.33448/rsd-v10i14.22247>
- Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, 1(3), 476–503. <https://doi.org/10.33532/revemop.v1n3a08>
- Silva, D. A., Ciríaco, K. T., & Ponte, J. P. (2025). Colaboração em estudos de aula: limites, desafios e perspectivas no contexto de Portugal. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 15(3), 1–21. <https://doi.org/10.37001/ripem.v15i3.4597>
- Utamura, G. Z. (2019). *Conhecimento profissional de professoras de 4º ano centrado no ensino dos números racionais positivos no âmbito do estudo de aula* [Tese de doutorado, Universidade Cruzeiro do Sul].