

Manifestações do pensamento matemático de estudantes em resoluções de avaliações de cálculo diferencial e integral segundo o modelo teórico de ações mentais matemáticas

Emanuel Gomes Peixoto

Secretaria Municipal de Educação de Goiânia

Goiânia, GO — Brasil

✉ emanuellgomees@gmail.com

id [0000-0001-9191-3363](#)

Karly Barbosa Alvarenga

Universidade Federal de Goiás

Goiânia, GO — Brasil

✉ karly@ufg.br

id [0000-0001-7670-8548](#)

Leniedson Guedes dos Santos

Universidade Federal do Oeste da Bahia

Barreiras, BA — Brasil

✉ leniedson.santos@ufob.edu.br

id [0000-0001-6666-8378](#)



2238-0345 

10.37001/ripem.v16i2.4740 

Recebido • 15/10/2025

Aprovado • 01/09/2026

Publicado • 30/09/2026

Editoria • Edvonete Souza de Alencar 

Veridiana Rezende 

Resumo: Este estudo teve como objetivo examinar as ações mentais matemáticas mobilizadas por estudantes na resolução de duas questões de avaliações de Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisa, de natureza qualitativa, exploratória e descritiva, foi realizada com discentes dos cursos de Física Médica e Engenharia Física de uma universidade pública. A análise fundamentou-se no Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas, que articula pressupostos do Pensamento Matemático Avançado e das Neurociências Cognitivas. Os pesquisadores mapearam as possíveis ações mentais, posteriormente identificadas nas resoluções dos estudantes. Como resultado, as resoluções foram classificadas em quatro categorias: Mobilização articulada e integrada; Mobilização diversa, porém desarticulada; Mobilização restrita e pouco efetiva; e Ausência ou não evidência de mobilizações. Conclui-se que a quantidade e, principalmente, a qualidade da articulação entre as ações mentais estão diretamente relacionadas ao aprofundamento da compreensão dos conceitos de Cálculo.

Palavras-Chave: Pensamento Matemático. Ações Mentais Matemáticas. Cálculo Diferencial e Integral. Neurociências Cognitivas. Educação Matemática.

Manifestations of students' mathematical thinking in solving differential and integral calculus assessments according to the theoretical model of mathematical mental actions

Abstract: This study aimed to examine the mathematical mental actions mobilized by students when solving two Differential and Integral Calculus assessment questions. The qualitative, exploratory, and descriptive research was conducted with students from the Medical Physics and Physical Engineering programs at a public university. The analysis was based on the Theoretical Model of Mathematical Mental Actions, which articulates assumptions of Advanced Mathematical Thinking and Cognitive Neuroscience. The researchers mapped possible mental actions, which were later identified in the students' solutions. As a result, the solutions were classified into four categories: Articulated and integrated mobilization; Diverse but disjointed mobilization; Restricted and ineffective mobilization; and Absence or no evidence of mobilization. The conclusion is that the quantity and, especially, the quality of the articulation between mental actions are directly related to the deepening of understanding of

Calculus concepts.

Keywords: Mathematical Thinking. Mathematical Mental Actions. Differential and Integral Calculus. Cognitive Neuroscience. Mathematical Education.

Manifestaciones del pensamiento matemático de los estudiantes al resolver evaluaciones de cálculo diferencial e integral según el modelo teórico de las acciones mentales matemáticas

Resumen: Este estudio tuvo como objetivo examinar las acciones mentales matemáticas movilizadas por los estudiantes al resolver dos preguntas de evaluación de Cálculo Diferencial e Integral. La investigación cualitativa, exploratoria y descriptiva se realizó con estudiantes de los programas de Física Médica e Ingeniería Física de una universidad pública. El análisis se basó en el Modelo Teórico de Acciones Mentales Matemáticas, que articula supuestos del Pensamiento Matemático Avanzado y la Neurociencia Cognitiva. Los investigadores mapearon posibles acciones mentales, que luego fueron identificadas en las soluciones de los estudiantes. Como resultado, las soluciones se clasificaron en cuatro categorías: Movilización articulada e integrada; Movilización diversa pero desarticulada; Movilización restringida e ineficaz; y Ausencia o ninguna evidencia de movilización. La conclusión es que la cantidad y, especialmente, la calidad de la articulación entre acciones mentales están directamente relacionadas con la profundización de la comprensión de los conceptos de Cálculo.

Palabras clave: Pensamiento Matemático. Acciones Mentales Matemáticas. Cálculo Diferencial e Integral. Neurociencia Cognitiva. Educación Matemática.

1 Pensamento Matemático: um contexto

Compreender a natureza do pensamento matemático, bem como questões referentes à aprendizagem da matemática e ao desenvolvimento do raciocínio e da criatividade matemática, constitui tema de diversas pesquisas que, em sua maioria, evidenciam processos cognitivos associados ao estudo dessa área do conhecimento (Alvarenga et al., 2022; Stayce, 2006; Schoenfeld, 1992; Tall, 1991; Dreyfus, 1991). Quando relacionado às Neurociências Cognitivas, esse fenômeno também pode ser compreendido por meio da atuação biológica do cérebro durante a assimilação de conceitos matemáticos, o que transcende abordagens exclusivamente psicológicas (Alvarenga, 2021; Nanpo et al., 2022; Nascimento, 2025; Nomura & Bianchini, 2011; Pereira & Tonelli, 2024).

Em pesquisa bibliográfica, Peixoto, Alvarenga e Santos (Manuscrito submetido para publicação) evidenciaram que o Pensamento Matemático é frequentemente relacionado a abordagens que o descrevem por habilidades, competências, processos ou características. Uma delas sustenta que ele pode ser compreendido como uma competência composta por quatro processos fundamentais: especializar (solucionar problemas a partir de exemplos), generalizar (reconhecer padrões e relações), conjecturar (antecipar resultados e vínculos) e convencer (articular argumentos que legitimem determinada afirmação) (Mason, Burton & Stacey, 2010). Alguns autores também associam diferentes ações cognitivas à essência do Pensamento Matemático, como elaborar hipóteses, induzir, deduzir, descrever, generalizar, modelar e verificar (Liu & Niess, 2006); formular conjecturas, experimentar, visualizar, descrever, inventar, generalizar e empregar a linguagem matemática com precisão (Cuoco et al., 1996; Mason & Johnston-Wilder, 2004).

Outra interpretação parte da resolução de problemas abordada pela Taxonomia de Bloom Revisada (Anderson et al., 2001), empregada para categorizar os níveis de domínio cognitivo no estudo da matemática. Essa versão reformulada procura ilustrar os processos

cognitivos por meio de verbos como lembrar, compreender, aplicar, analisar, avaliar e criar. São inúmeras as vertentes de pesquisa nesse campo, e esses exemplos demonstram que não existe uma definição única para o Pensamento Matemático, mas diversos modelos que se adequam a distintos objetivos de pesquisa (Peixoto, Alvarenga & Santos; Manuscrito submetido para publicação).

O Pensamento Matemático Avançado (PMA), por exemplo, envolve a inter-relação de processos cognitivos, como visualização, representação, classificação, tradução, generalização, justificação, síntese e abstração (Dreyfus, 1991). Tais processos interagem no decorrer da aprendizagem e estão presentes na cognição de crianças em relação a conceitos fundamentais, não se restringindo à matemática avançada ou ao ensino superior. Esses pressupostos fundamentaram diversas investigações que analisaram os processos do PMA mobilizados por estudantes ao realizarem suas atividades de matemática (Gonçalves & Silva, 2023; Reis, Lopes & Malaspina, 2024; Torrente & Reis, 2023; Inarejos Filho, 2023; entre outros).

As pesquisas nessa área, independentemente da abordagem, buscam desenvolver metodologias de ensino e de aprendizagem que tornem as práticas docentes mais aplicáveis e apoiem o desenvolvimento do conhecimento matemático de educadores e de alunos da Educação Básica e do ensino superior. Desde o início da década de 1990, a comunidade voltada à Educação Matemática tem demonstrado interesse em compreender teorias históricas — como a teoria Psicogenética, de Piaget — para formular novas abordagens relacionadas ao pensamento matemático, conforme evidenciado por Tall (1991), Dreyfus (1991), Dubinsky (1991), Harel e Sowder (2005), entre outros.

Nesse contexto, a neurociência, com seus dispositivos tecnológicos, demonstra que o cérebro apresenta áreas específicas vinculadas à aprendizagem matemática, que a topologia cerebral tem se modificado ao longo da evolução humana e que novos entendimentos sobre como o ser humano aprende têm emergido (Alvarenga & Domingos, 2021; Haase & Ferreira, 2009; Grabner et al., 2017; Leikin et al., 2014, entre outros).

Ao se depararem com os fundamentos teóricos vinculados ao PMA, inicialmente delineados por Tall (1991), Dreyfus (1991), Dubinsky (1991), Harel e Sowder (2005), entre outros, e ao aplicá-los em suas pesquisas — por exemplo, ao estudar o esboço gráfico de alunos recém-ingressos no ensino superior (Ferreira & Alvarenga, 2017) —, Alvarenga e Domingos (2020) notaram que os processos mentais relacionados ao Pensamento Matemático mencionados na literatura poderiam ser ampliados e explicitados em conjunto. Assim, novas características, originadas das Neurociências Cognitivas, foram agregadas às teorias do Pensamento Matemático para direcionar e aprofundar o entendimento sobre o assunto, resultando na formulação de um Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (MTAMM), proposto por Alvarenga e Domingos (2021).

A inquietação acerca da quantidade de ações mentais inconscientes, mas importantes para emergirem à superfície da mente, bem como o interesse pelo conhecimento das diversas áreas de ativação cerebral relacionadas a diferentes conteúdos matemáticos, resultou em uma pesquisa continuamente aprofundada (Ferreira & Alvarenga, 2017; Alvarenga & Domingos, 2020; 2021; Alvarenga et al., 2022; Alvarenga, 2023). O principal objetivo deste estudo é examinar as diferentes mobilizações mentais matemáticas observadas nas resoluções de alunos em duas questões de Cálculo Diferencial e Integral, fundamentando-se no MTAMM. Assim, propõe-se a seguinte questão investigativa: quais ações mentais foram mobilizadas pelos estudantes nas resoluções de duas questões que envolviam conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral?

2 Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas

Os avanços nas neurociências cognitivas têm contribuído significativamente para a compreensão da aprendizagem matemática, ao analisar a topologia cerebral em diferentes escalas — desde redes neuronais diminutas até os complexos circuitos do cérebro humano, composto por cerca de 100 bilhões de neurônios (Lucini *et al.*, 2019). Nesse contexto, a matemática não deve ser vista apenas como um sistema de regras abstratas, mas como uma habilidade profundamente entrelaçada ao funcionamento cerebral, envolvendo múltiplas regiões e processos cognitivos especializados.

Alvarenga (2021) indica que diferentes ações mentais matemáticas mobilizam distintas áreas cerebrais, evidenciando que a aprendizagem matemática resulta da atuação integrada de uma rede distribuída de áreas do cérebro, e não de um mapeamento rígido e isolado. Para fins educacionais e ilustrativos, é possível destacar algumas dessas regiões e suas respectivas funções: o córtex pré-frontal, por exemplo, participa do raciocínio lógico e da resolução de problemas complexos; o lobo parietal, especialmente o sulco intraparietal, processa quantidades e relações numéricas; o córtex occipito-temporal contribui para o reconhecimento de símbolos e números; e o hipocampo atua na recuperação de conhecimentos matemáticos armazenados, como propriedades algébricas e a tabuada (Alvarenga, 2020). A autora defende que o conhecimento dessas ações mentais, aliado à sua mobilização consciente e coerente, pode impulsionar significativamente o desenvolvimento do pensamento matemático.

O MTAMM foi desenvolvido a partir da análise das construções mentais mobilizadas por estudantes da Educação Básica e do ensino superior durante a resolução de situações-problema (Alvarenga, 2023). Sua formulação apoia-se em investigações sobre o Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991; Dubinsky & McDonald, 2001; Harel & Swoder, 2005; Tall, 1991), bem como em aportes das neurociências cognitivas (Leikin *et al.*, 2014; Pizyblski *et al.*, 2009; Smedt & Verschaffel, 2010) e da metacognição (Grabner *et al.*, 2017; Gomes & Colombo Junior, 2018). Além disso, sua formulação emergiu da constatação de que os currículos da Educação Básica, e mesmo os de formação inicial de professores, não explicitam processos mentais elaborados que favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes (Alvarenga, 2020).

O Pensamento Matemático Avançado é compreendido como um processo complexo, no qual diversos componentes mentais interagem de forma intrincada e eficiente, em rápida sucessão ou até mesmo simultaneamente (Dreyfus, 1991). Entre esses processos mentais, destacam-se representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair e formalizar. Compreendê-los, tanto individualmente quanto em suas inter-relações, constitui um pré-requisito fundamental para apoiar os estudantes na construção de formas de pensar mais próximas daquelas desenvolvidas por especialistas (Dreyfus, 1991).

Com o objetivo de evidenciar essas construções mentais, especialmente aquelas que podem ser estimuladas na Educação Básica — com ênfase no ensino médio — e nos cursos das áreas de exatas no ensino superior, o estudo culminou na organização de um quadro com 52 ações mentais. A primeira versão do MTAMM foi proposta por Alvarenga e Domingos em 2020, como resultado de uma pesquisa de pós-doutorado, e, posteriormente, adaptada, refinada e discutida pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM) da Universidade Federal de Goiás (UFG), que segue promovendo sua discussão e expansão, cujos desdobramentos se refletem em diversas publicações. Seu formato atual (Quadro 1) é utilizado como ferramenta analítica para identificar e destacar as ações mentais envolvidas na resolução de avaliações de estudantes do ensino médio e do ensino superior (Alvarenga, 2021, 2023; Alvarenga & Ferreira, 2017; Alvarenga & Domingos, 2020; Cabral *et al.*, 2021; Peixoto & Alvarenga, 2024), especialmente em contextos de Cálculo Diferencial e Integral.

Quadro 1: Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (MTAMM)

Algebrizar (AM1)	Analisar a direção inversa da manipulação (AM2)	Argumentar de forma textual, sem a formalização ou a linguagem matemática (AM3)
Classificar (AM4)	Coletar informações/dados (AM5)	Comparar por meio de problemas semelhantes (AM 6)
Compensar (AM7)	Conectar experiências anteriores (<i>met-before</i>) (AM8)	Conjecturar (AM9)
Convencer o outro, explicar verbalmente (AM10)	Criar a própria linguagem matemática (AM11)	Dar contraexemplos (AM12)
Demonstrar, provar (AM13)	Distinguir o que são hipóteses e o que é tese (AM14)	Elaborar casos particulares (AM15)
Empregar propriedades dos números reais (AM16)	Encapsular processos em objetos, descapsular objetos em processos (AM17)	Enumerar etapas (AM18)
Estimar, fazer aproximações (AM19)	Evidenciar (AM20)	Fazer “mostrações” (AM21)
Fazer analogias entre outros conteúdos (AM22)	Fazer operações com números reais (AM23)	Flexibilizar contextos (AM24)
Flexibilizar interpretações (AM25)	Formalizar (AM26)	Generalizar (AM27)
Geometrizar (AM28)	“Graficar” (AM29)	Identificar (AM30)
Induzir (AM31)	Inferir (AM32)	Interpretar (AM33)
Investigar (AM34)	Manipular Algebricamente (AM35)	Manipular expressões da direita para a esquerda, quando possível. Reverter (AM36)
Manipular expressões de baixo para cima (AM37)	Modelar (AM38)	“Numerizar” (AM39)
Organizar, desorganizar e reorganizar (AM40)	Repensar, refazer e repensar, isto é, tentar, tentar e tentar... (AM41)	Representar (AM42)
Simplificar (AM43)	Sintetizar (AM44)	Tabelar (AM45)
Traduzir da língua materna para a linguagem matemática simbólica (AM46)	Traduzir da linguagem matemática para a língua materna (AM47)	Transpor ideias (mudar de um contexto para o outro) (AM48)
Transpor informações (estar coerente; conectar informações) (AM49)	Usar linguagem matemática adequada (AM50)	Verificar (AM51)
Visualizar (AM52)		

Fonte: Alvarenga & Domingos, 2020.

Importa destacar que o MTAMM não pretende substituir as teorias já consolidadas sobre o Pensamento Matemático Avançado, mas oferecer um referencial complementar e aplicável às práticas pedagógicas. Seu objetivo não é apenas apoiar professores no planejamento de aulas, na elaboração de atividades e na análise de resoluções, por meio da explicitação das ações mentais que favorecem a construção de um Pensamento Matemático mais sofisticado; busca,

sobretudo, contribuir para a compreensão conceitual dos estudantes a partir da identificação, da nomeação e da discussão dessas ações, orientando-os em suas resoluções de situações-problema de matemática (Alvarenga & Domingos, 2020; Alvarenga *et al.*, 2022; Cabral *et al.*, 2021; Peixoto & Alvarenga, 2024).

Assim, metodologias de ensino orientadas pelo MTAMM podem favorecer a introdução intencional dessas ações em sala de aula, oferecendo subsídios tanto para a prática docente quanto para a elaboração de materiais didáticos, inclusive nos níveis mais avançados da educação. Seu propósito central é oferecer um instrumento que auxilie professores e estudantes a reconhecer os possíveis caminhos mentais acessíveis em situações de ensino e aprendizagem, independentemente do nível escolar, ajustando-se à complexidade dos conteúdos abordados.

3 A metodologia de pesquisa

Esta investigação, de natureza qualitativa, apresenta características exploratórias, descritivas e explicativas (Cordeiro *et al.*, 2023). A coleta de dados ocorreu em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), destinada aos discentes dos cursos de Física Médica e Engenharia Física da UFG. Foram analisadas as resoluções das duas primeiras avaliações aplicadas presencialmente pelo docente: um teste (Av1) e uma prova posterior (Av2). Embora a turma contasse com 60 estudantes, a análise restringiu-se aos 34 participantes que compareceram a ambas as avaliações, identificados como A1, A2, A3, ..., A34.

Embora todas as questões das avaliações tenham sido examinadas, a análise aprofundada concentrou-se em duas delas, extraídas, respectivamente, da Avaliação 1 e da Avaliação 2 (ver Quadro 2). Essa seleção justifica-se pela abrangência dos conteúdos abordados e pela intencionalidade na elaboração dos enunciados. A questão 1 (Q1) transcende a mera aplicação de regras de limite de uma função, exigindo que o estudante utilize esses conceitos do Cálculo Diferencial e Integral para investigar o comportamento assintótico e gráfico de uma função. A questão 2 (Q2) segue abordagem semelhante, voltada à introdução e à aplicação do conceito de derivada como taxa de variação instantânea. Ambas as questões desafiam os estudantes a interpretar seus resultados, favorecendo a transição entre diferentes representações.

Quadro 2: Questões selecionadas

Avaliação	Questão	Enunciado																
Av1	Q1	Considere a função $h(x) = \frac{x}{x^4+1}$ a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$. b) Determine $h(0)$, $h(1)$, $h(-1)$. c) Encontre as raízes de $h(x)$. d) Interprete os resultados dos limites da letra a). e) Esboce uma ideia do gráfico de $h(x)$ usando os resultados das letras a), b), c) e d).																
Av2	Q2	Seja v centímetros cúbicos de volume de um cubo tendo uma aresta a centímetros. Use a tabela para registrar a taxa de variação média do volume com relação a a quando esta varia de: <table><tr><td>a)</td><td>3,00 a 3,20</td><td>Intervalo</td><td>Taxa de variação média</td></tr><tr><td>b)</td><td>3,00 a 3,10</td><td>3,00 a 3,20</td><td></td></tr><tr><td>c)</td><td>3,00 a 3,01</td><td>3,00 a 3,10</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3,00 a 3,01</td><td></td></tr></table> d) Qual a taxa de variação instantânea do volume em relação a a quando $a = 3\text{cm}$? e) O que se observa, pela tabela, da taxa de variação média? Obs. Não use regras de derivação!	a)	3,00 a 3,20	Intervalo	Taxa de variação média	b)	3,00 a 3,10	3,00 a 3,20		c)	3,00 a 3,01	3,00 a 3,10				3,00 a 3,01	
a)	3,00 a 3,20	Intervalo	Taxa de variação média															
b)	3,00 a 3,10	3,00 a 3,20																
c)	3,00 a 3,01	3,00 a 3,10																
		3,00 a 3,01																

Fonte: Avaliações do Professor da Turma.

O objetivo central desta análise foi identificar as possíveis ações mentais mobilizadas nas resoluções, tomando como base o MTAMM, e categorizar os tipos de mobilização ocorridos (Quadro 3). Assim, avançamos de uma análise particular para uma análise mais ampla, examinando a relação entre a ativação (ou a ausência) de ações mentais específicas e a aprendizagem dos conceitos de CDI.

Para tanto, foram realizadas três etapas principais: 1) o mapeamento, pela ótica dos pesquisadores, das ações mentais potenciais em cada situação-problema; 2) a análise das resoluções individuais dos estudantes, com a identificação das ações mentais efetivamente acionadas; e 3) o exame da correspondência entre o acerto (ou erro) da resolução e a quantidade e a qualidade das ações mentais mobilizadas. Esse procedimento analítico culminou na categorização das resoluções em quatro grupos, definidos segundo os padrões de mobilização das ações mentais (ver Quadro 3).

Quadro 3: Categorizações do Pensamento Matemático nas resoluções

Categoria	Descrição
Mobilização articulada e integrada	Reflete a mobilização rica, variada e articulada das ações mentais identificadas. Quando diversas AM interagem simultaneamente entre si, existindo coerência e conexão entre elas, apresenta-se um Pensamento Matemático Avançado.
Mobilização diversa, porém, desarticulada	Há a mobilização de um conjunto diversificado de AM, mas a articulação ou a conexão entre elas é deficiente. As AM não provocam uma reflexão sobre como os conceitos estão correlacionados. Apresenta-se um PM em transição para o Avançado.
Mobilização restrita e pouco efetiva	As ações mobilizadas são insuficientes em quantidade e/ou qualidade de articulações para lidar com a complexidade do problema.
Ausência ou não evidência de mobilizações	Há uma ausência ou mobilização mínima das ações mentais relevantes ao conteúdo de CDI e Matemática Básica. Reflete uma falta de compreensão dos conceitos fundamentais prévios a CDI.

Fonte: Autoria própria.

Essas categorias fundamentam-se na compreensão de Dreyfus (1991), para quem o Pensamento Matemático Avançado se manifesta por meio da inter-relação simultânea de múltiplos processos mentais, e na perspectiva de Alvarenga e Domingos (2020), que o entendem como resultado da mobilização consciente e coordenada de diversas ações mentais no enfrentamento de uma situação-problema.

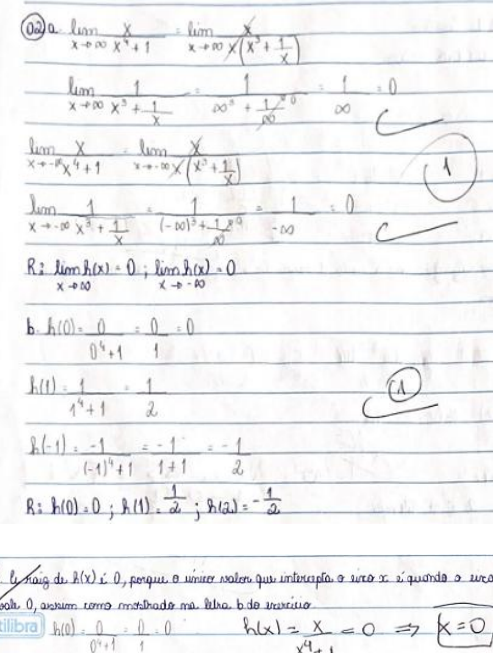
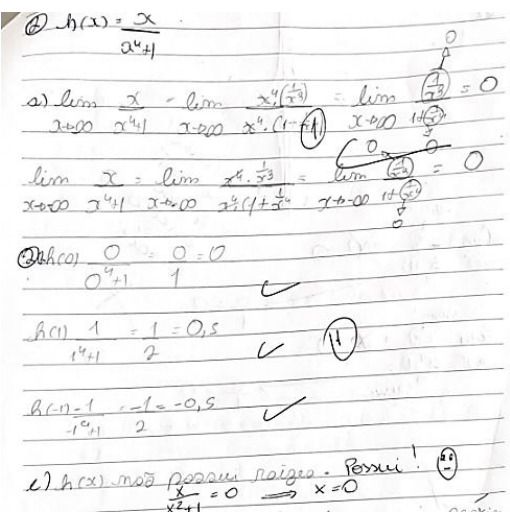
4 Uma discussão inicial sobre as Ações Mentais

De modo geral, certas Ações Mentais tendem a ser mobilizadas com maior frequência sempre que um estudante se envolve na resolução de uma situação-problema. Um exemplo é *Conectar Experiências Anteriores*, cuja ativação costuma estar presente nas ocasiões em que o estudante consegue avançar na tarefa. Isso se justifica porque experiências anteriores influenciam diretamente o modo como novos problemas são interpretados e enfrentados. Como destaca Tall (2013), o termo *met-before* refere-se a qualquer vivência prévia que afeta o pensamento atual — seja essa influência favorável ou problemática. Embora funcione como um jogo de palavras em inglês, sua essência remonta à noção de “obstáculo epistemológico”, proposta por Bachelard (1938), ao apontar que ideias intuitivas prévias podem tanto apoiar quanto dificultar o desenvolvimento de novos conhecimentos teóricos. Nesse contexto, *met-before* designa vivências prévias que influenciam o modo de pensar no presente, abrangendo contribuições positivas e negativas.

Uma resolução da Q1 pode apresentar a mobilização da AM8 de modo mais consistente quando há coerência entre os conceitos de Funções, Gráficos de Funções e Limites de Funções. Uma resposta parcialmente correta ou incompleta, como quando o aluno consegue desenvolver o cálculo do limite, mas não determina as raízes da função ou não apresenta o esboço gráfico

correto, evidencia que as *antigas* experiências não estão sendo acionadas *de forma conexa/adequada* em relação a determinados conceitos matemáticos (Quadro 4).

Quadro 4: Resoluções dos estudantes

Resolução A1 – Q1	Resolução A5 – Q1
 Resolução A1 – Q1 02) a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{x}}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty^3 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{x}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{(-\infty)^3 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$ R: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ b) $h(0) = \frac{0}{0^4 + 1} = \frac{0}{1} = 0$ $h(1) = \frac{1}{1^4 + 1} = \frac{1}{2}$ $h(-1) = \frac{-1}{(-1)^4 + 1} = \frac{-1}{1 + 1} = \frac{-1}{2}$ R: $h(0) = 0$; $h(1) = \frac{1}{2}$; $h(-1) = \frac{-1}{2}$ 03) b) A raiz de $h(x)$ é 0, porque o único valor que anula o numerador é zero e quando o numerador é zero, o denominador não é zero. balança $h(x) = \frac{0}{0^4 + 1} = \frac{0}{1} = 0$ $h(x) = \frac{x}{x^4 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$	 Resolução A5 – Q1 02) $h(x) = \frac{x}{x^4 + 1}$ a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + 1} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + 1} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + 1} = 0$ b) $h(0) = \frac{0}{0^4 + 1} = \frac{0}{1} = 0$ $h(1) = \frac{1}{1^4 + 1} = \frac{1}{2}$ $h(-1) = \frac{-1}{(-1)^4 + 1} = \frac{-1}{1 + 1} = \frac{-1}{2}$ c) $h(x)$ não possui raízes. Porquê! $\frac{x}{x^4 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$
A resolução A1 é coerente com os conceitos matemáticos prévios ao CDI. Percebe-se, por exemplo, que ele apresenta uma resposta correta a cada item e aplica de forma adequada conceitos de funções e limites de funções.	A5 desenvolve o cálculo do limite da função corretamente, indicando ter experiências anteriores relacionadas a esse conceito, mas comete um equívoco ao afirmar, no item c), que as raízes da função não existem, embora tenha calculado a raiz no item b). Isso pode indicar uma barreira em conectar experiências prévias ao CDI, transpor informações de forma coerente, entre outras AM.

Fonte: Dados da pesquisa.

Obviamente, outras AM são fundamentais na resolução de problemas matemáticos, entre elas a ação de classificar (AM4), empregar propriedades dos números reais (AM16), estimar e fazer aproximações (AM19), realizar operações com números reais (AM23), “graficar” (AM29), interpretar (AM33) e usar linguagem matemática adequada (AM50). Elas podem ser inerentes ao processo de pensar matematicamente e, como argumentam Gray e Tall (2014), fazem parte do desenvolvimento contínuo do PMA como aspectos procedimentais da matemática, relacionados à manipulação rotineira de objetos que podem ser representados por meio de materiais manipuláveis, da linguagem oral, de símbolos ou de imagens mentais.

Pode-se considerar que tais mobilizações deveriam ocorrer automaticamente na resolução de questões de CDI. A capacidade de interpretar gráficos (AM33), por exemplo, é crucial para a compreensão de funções e de seus limites. Além disso, ações mentais como empregar propriedades dos números reais (AM16), estimar e fazer aproximações (AM19), algebrizar (AM1), entre outras, refletem o desenvolvimento do pensamento simbólico e formal, conforme descrito por Dreyfus (1991). Essas habilidades são essenciais para a transição dos conceitos concretos aos abstratos, como ilustram os estudos de Ferreira (2021) sobre a compreensão de limites.

Como já mencionado, o foco principal aqui não é listar cada caso específico de mobilização nem quantificar sua frequência de ocorrência. Em vez disso, conforme sugerido

por Dubinsky (1991), a ênfase recai sobre a compreensão de como essas ações se inter-relacionam e de como podem contribuir para uma construção robusta da compreensão matemática. Por isso, ao analisar as resoluções, opta-se por discutir qualitativamente o modo como foram acionadas.

Com base nessa perspectiva, elaborou-se um levantamento inicial das possíveis Ações Mentais Matemáticas que, na visão dos pesquisadores, poderiam ser mobilizadas nas resoluções. Esse mapeamento prévio não pretende esgotar todas as possibilidades de ação, mas apontar, à luz do MTAMM, aquelas que se mostram mais relevantes diante das exigências conceituais e operatórias da situação-problema proposta.

5 Um olhar metacognitivo para as ações mentais envolvidas nas resoluções

A estratégia metodológica implementada nesta etapa fundamenta-se em princípios da metacognição, compreendida como o ato de pensar sobre o próprio pensamento, necessária para que os autores-pesquisadores pudessem antecipar os processos cognitivos que a tarefa analisada poderia suscitar (Santos *et al.*, 2021). Portanto, o mapeamento das potenciais AM mobilizadas em cada situação-problema, sob a perspectiva dos autores-pesquisadores, constitui uma preparação fundamental para analisar com precisão as resoluções e o pensamento matemático dos participantes da pesquisa (Quadro 5). Vale ressaltar que a descrição das estratégias cognitivas que poderiam emergir nas resoluções não deve ser tomada como um algoritmo rígido, mas como uma orientação flexível (Santos *et al.*, 2021). Assim, reconhece-se a impossibilidade de prever todas as possibilidades, sendo o objetivo dessa etapa oferecer uma base inicial para compreender o raciocínio mobilizado pelos estudantes.

Quadro 5: Mapeamento das ações mentais potenciais em cada situação-problema

	Ótica dos pesquisadores
Q1	Dado o enunciado da questão 1, o processo de resolução pode se iniciar com a ação de classificar (AM4), na qual o problema é reconhecido como um estudo de uma função envolvendo limites e representação gráfica. Em seguida, a ação de conectar experiências anteriores (AM8) é mobilizada, ativando a bagagem de conteúdos prévios (funções) e, principalmente, conectando com as técnicas de resoluções de problemas do mesmo tipo. Ainda nesse primeiro contato, é preciso identificar (AM30) que se trata de uma função racional, o que leva a buscar estratégias típicas, como a comparação entre os graus do numerador e do denominador ou a divisão pela maior potência de x. É importante também verificar (AM51) se, quando os limites são aplicados à função, existem indeterminações ou restrições. A parte prática envolve ações como manipular algebricamente (AM35) a expressão para que ela resulte em uma forma que permita a aplicação do limite no infinito. A ação de estimar/fazer aproximações (AM19) é usada ao atribuir valores grandes para x e obter um resultado que se aproxima de 0. Indo além, é possível perceber que, quando x tende a valores grandes positivamente, o resultado se aproxima de zero por valores positivos, e que, quando x tende a valores grandes negativos, o resultado se aproxima de zero por valores negativos. Por fim, usar a linguagem matemática adequada (AM50) envolve escrever corretamente a notação de limite, utilizando o símbolo de igualdade com coerência, além de seguir a hierarquia algébrica para manipular a expressão e fornecer os resultados. Ao determinar pontos específicos da função, mobiliza-se a ação fazer operações com números reais (AM23), pois o processo envolve avaliar expressões numéricas e resolver a equação resultante. Para encontrar as raízes, pode-se adotar um caminho analítico, o qual envolve inicialmente a ação de interpretar (AM33) o significado de raiz no contexto de uma função racional e o papel do numerador e do denominador nesse tipo de função. Para encontrar a raiz, faz-se $h(x) = 0$, ou seja, $\frac{x}{x^4+1} = 0$. Isso só acontece quando o numerador é zero, portanto, a única raiz é $x = 0$. Alternativamente, pode-se argumentar de forma textual (AM3), conectando esta informação (AM49) ao resultado de $h(0) = 0$, obtido no item anterior.

	Ótica dos pesquisadores
	Ao pedir uma interpretação do resultado dos limites no infinito, podem ser mobilizadas diferentes ações. Argumentar de forma textual (AM3) é mobilizada quando se utiliza a linguagem natural, com frases como “a função vai se aproximando de zero”, sem usar a notação formal. Inferir (AM32) e interpretar permite extrair uma conclusão sobre o comportamento global da função com base no limite, como em “a função tende a zero nos extremos”. Transpor informações (AM49) consiste em mover o resultado do limite para uma interpretação verbal ou gráfica — por exemplo, reconhecer que o limite indica uma assíntota horizontal em $y = 0$. Se foram testados valores grandes (ex.: $x = 100$) antes de concluir sobre o limite, está-se usando casos particulares (AM15) para apoiar a generalização. Por fim, a questão culmina no esboço do gráfico, o que mobiliza um conjunto de ações atreladas a todas as informações encontradas anteriormente. O processo inicia-se ao Transpor Informações (AM49), transferindo os resultados dos cálculos numéricos e dos limites para uma representação gráfica coerente. Essa etapa alimenta a ação de representar (AM42) a função visualmente, o que efetivamente se concretiza ao graficar (AM29), construindo ou imaginando a forma da curva a partir dos dados e do comportamento da função. Para refinar esse esboço, é comum elaborar casos particulares (A15), usando valores específicos de x para entender melhor a forma da curva, e identificar (AM30) características cruciais como a raiz, a assíntota horizontal e a simetria ímpar. Cada um desses passos requer a ação de interpretar (AM33) o significado dos dados e cálculos no contexto gráfico. Toda essa estrutura cognitiva é englobada pela ação de visualizar (AM52). Por último, a ação de verificar (AM51) é mobilizada para confrontar o gráfico final com os dados obtidos, assegurando a consistência e a coerência da solução.
Q2	A resolução da Questão 2 mobiliza uma trajetória que conecta conceitos geométricos a noções de cálculo, como taxas de variação. Uma possível sequência de ações mentais para solucionar o problema pode ser descrita da seguinte forma: O processo pode se iniciar com a ação de geometrizar (AM 28), na qual se visualiza o cubo para interpretar o contexto do problema. Imediatamente, é necessário algebrizar (AM1), expressando o volume do cubo na notação $V = a^3$. Em seguida, a ação de classificar (AM4) permite reconhecer o problema como um estudo sobre a taxa de variação média e instantânea. Para prosseguir, é preciso mobilizar a ação conectar experiências anteriores (AM8), ativando os conhecimentos prévios sobre funções, limites e a definição de taxa de variação. Para os itens (a), (b) e (c), a principal ação mobilizada é fazer cálculos com os números reais (AM23), que envolve calcular potências, subtrair e dividir para encontrar as taxas de variação média nos diferentes intervalos. Os resultados obtidos são organizados por meio da ação tabelar (AM45), conforme solicitado explicitamente no enunciado. Ao avançar para o item (d), a restrição de não usar regras de derivação força um caminho específico. É preciso usar a linguagem matemática adequada (AM50) para formular a taxa de variação instantânea por meio da definição formal de limite. A resolução demanda um intenso uso da ação algebrizar para expandir a expressão $(3 + h)^3$ e simplificar a fração algébrica. O passo final do cálculo envolve estimar, fazer aproximações (AM19), que está intrinsecamente ligado ao conceito de limite, ao analisar o comportamento da expressão quando o intervalo h se aproxima de zero. Finalmente, para responder ao item (e), a ação central é interpretar (AM33) o comportamento dos valores na tabela. Isso requer transpor Informações (AM49), conectando os resultados numéricos das taxas de variação média (obtidos nos primeiros itens) com o valor da taxa de variação instantânea (calculada no item d) para formular uma conclusão. Durante todo o processo, ações como repensar, refazer, tentar (AM41) podem ser ativadas para corrigir cálculos ou ajustar o raciocínio caso surjam inconsistências.

Fonte: Dados da pesquisa.

O Quadro 5 sistematiza discursivamente uma possível trajetória para solucionar as questões analisadas. Nele, destaca-se como algumas AM podem ser evidenciadas e associadas às mobilizações mentais de um estudante, etapa essencial para a fase subsequente da pesquisa. Embora tenham sido apontadas duas vias para responder aos itens 1 e 2, reconhece-se a impossibilidade de antecipar todas as estratégias dos respondentes. Assim, este texto constitui

apenas um esboço e uma fundamentação inicial para uma análise mais aprofundada.

6 Mobilização articulada e integrada

Consideramos que, quanto maior a quantidade de ações mentais mobilizadas, maior é a possibilidade de avanço do pensamento matemático (Alvarenga & Domingos, 2020). Além disso, essas ações devem estar correlacionadas e conectadas entre si. Um exemplo é a resolução de A2 da Q1 (Quadro 6), que atende a todos os critérios esperados. Nela, é possível identificar a interpretação correta dos limites (AM33), bem como a conexão e a coerência entre as informações apresentadas nas alternativas (AM49). Além disso, tanto a argumentação textual (AM3) quanto o esboço gráfico (AM29) apontam para a visualização correta dos limites, das raízes e da curva (AM52). Tais elementos relacionam-se à coerência das respostas apresentadas em cada alternativa e à interpretação dos limites e das raízes da função.

Quadro 6: Resolução A2 – Questão 1

A2 – Q1

01- $h(x) = \frac{x}{x^4+1}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^4+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4+1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^4}} = \frac{0}{0} = 0 //$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^4+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4+1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^4}} = \frac{0}{0} = 0 //$

b) $h(x) = \frac{x}{x^4+1}$

$h(0) = \frac{0}{0^4+1}$

$h(0) = 0 //$

$h(1) = \frac{1}{1^4+1}$

$h(1) = \frac{1}{2} //$

$h(-1) = \frac{-1}{(-1)^4+1}$

$h(-1) = -\frac{1}{2} //$

02- c) $h(x) = 0$

$\frac{x}{x^4+1} = 0 \Rightarrow x = 0 //$

d) Quando os valores da abscissa tendem a mais o infinito, ou menos o infinito, os valores da imagem tendem a zero.

e)

Fonte: Dados da pesquisa.

As resoluções de A1 e A8, referentes à questão 2 da segunda avaliação (Quadro 6), demonstram coerência entre as informações (AM49), uso adequado da linguagem matemática (AM50) e argumentação textual consistente (AM3).

Quadro 7: Resolução estudantes A6 e A8 – Questão 2

A1 – Q2	
---------	--

A8 – Q2

a) $V(3) = 3^3 = 27$
 $V(3,2) = 3,2^3 = 32,768$
T.V.M: $\frac{V(3,2) - V(3)}{3,2 - 3} = \frac{32,768 - 27}{0,2} = 28,84$

b) $V(3) = 27$
 $V(3,1) = 3,1^3 = 29,791$
T.V.M: $\frac{V(3,1) - V(3)}{3,1 - 3} = \frac{29,791 - 27}{0,1} = 27,91$

c) $V(3) = 27$
 $V(3,01) = 3,01^3 \approx 27,271$
T.V.M: $\frac{V(3,01) - V(3)}{3,01 - 3} = \frac{27,271 - 27}{0,01} \approx 27,1$

d) T.V.I: $\lim_{a \rightarrow 3} \frac{V(a) - V(3)}{a - 3} = \lim_{a \rightarrow 3} \frac{a^3 - 3^3}{a - 3} = \lim_{a \rightarrow 3} \frac{(a-3)(a^2 + 3a + 3^2)}{a - 3} = \lim_{a \rightarrow 3} (a^2 + 3a + 3^2) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 3^2 = 27$

e) Observa-se que quanto mais próximo de 3 cm o valor dos arestos comparados, mais a taxa de variação média se aproxima de 27. Assim, é possível concluir que a taxa de variação instantânea, quando a aresta for 3 cm, será 27.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, na resolução de uma questão que envolve o cálculo da taxa de variação instantânea em um ponto, sem utilizar diretamente as regras de derivação, uma das primeiras mobilizações é conectar experiências anteriores (AM8), como já discutido anteriormente. Isso fica evidente nos dois exemplos acima (A1 e A2), nos quais ambos mobilizaram conhecimentos prévios sobre taxa de variação média e sobre o conceito de Limite, fundamentais para compreender a transição entre variação média e variação instantânea.

Notamos também que investigar (AM34) é crucial, pois o estudante precisa explorar o comportamento da função em torno do ponto $x = a$, selecionando valores de h próximos de zero e analisando como a função se comporta nesses intervalos. Isso requer análise cuidadosa dos resultados obtidos e também interpretação (AM33), a fim de atribuir significado aos cálculos realizados em termos de variação da função e aproximação de limites.

Observa-se que transpor informações e manter a coerência é importante nesse contexto (AM49), pois é necessário converter a ideia de limite de uma função em uma forma matemática que represente a taxa de variação instantânea, compreendendo como o conceito abstrato de limite se aplica concretamente à função em questão. Além disso, foi imprescindível manipular expressões algébricas (AM35) para simplificar o Limite e calcular a taxa de variação média.

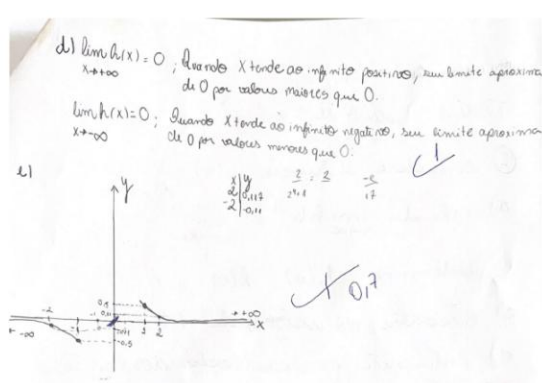
Por fim, a verificação (AM51) pode ser empregada quando o estudante revisa seus cálculos e seu raciocínio para garantir que a aproximação realizada é válida e que o limite calculado representa, de fato, a taxa de variação instantânea correta. Essa ação assegura que a solução esteja coerente e que a interpretação dos resultados seja consistente com a teoria.

As resoluções de A1 e A8 apresentaram aspectos relacionados às ações mentais citadas anteriormente. Acreditamos que elas foram acionadas de modo a possibilitar aos estudantes uma compreensão profunda e robusta da questão, evitando uma resolução mecânica do problema e favorecendo o desenvolvimento de um entendimento consistente dos conceitos subjacentes. Ao explicitar essas ações mentais, professores podem direcionar o ensino para fortalecer tais habilidades, promovendo uma aprendizagem mais consciente e eficaz.

7 Mobilização diversa, porém desarticulada

Em alguns casos, pode ocorrer uma aprendizagem em que o estudante desenvolve a resolução corretamente até certo ponto, mas, por falta de cuidado ou de compreensão mais aprofundada, acaba cometendo algum deslize que afeta o resultado. As resoluções A3 e A5 exemplificam essa situação (Quadro 7).

Quadro 8: Resoluções dos Participantes A3 E A5

A3	A5
	

Fonte: Dados da Pesquisa.

No primeiro caso, no item “e”, é realizado um esboço de um gráfico que não representa a função $h(x)$. Apesar de os limites e raízes da função serem representados corretamente, o gráfico representa uma função descontínua. Já A5, não determinou as raízes da função, demonstrando haver essa barreira ao esboçar o gráfico.

Uma parcela significativa das resoluções enquadradas nessa categoria apresentou dificuldades em dois conceitos principais: raízes da função e esboço gráfico. De modo geral, esses respondentes conseguiram desenvolver corretamente o cálculo de limites e interpretá-los, mas não tiveram êxito em articular esses conceitos a um esboço gráfico coerente da função. Ao analisar o desempenho dos alunos na elaboração de gráficos, Nasser (2009) observou que a principal dificuldade enfrentada pelos estudantes de Cálculo está na falta de uma preparação prévia adequada sobre funções, a qual pode começar ainda no Ensino Fundamental.

É interessante notar que o formato da questão induz o estudante a um pensamento investigativo, no qual explora uma função diante de diversos conceitos (limites, raízes e cálculo

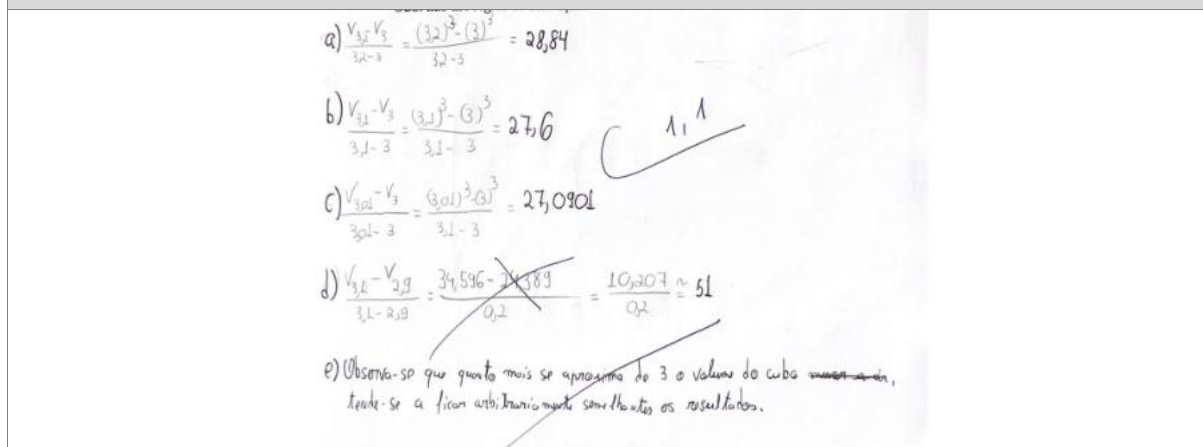
de pontos específicos). Nesse sentido, mesmo não sendo inteiramente autônomo, o respondente poderia mobilizar a AM34, que consiste em investigar o comportamento de $h(x)$. É necessário que os alunos aprendam a investigar por si mesmos e a desenvolver o pensamento matemático enquanto desenvolvem sua própria matemática (Schastai, 2017). Esse tipo de desenvolvimento é fundamental quando algo não foi completamente compreendido no decorrer da resolução, como ocorre no caso em que o estudante não encontra as raízes, mas, ao esboçar o gráfico, representa $h(0) = 0$.

Esse obstáculo foi encontrado em diversas outras resoluções, nas quais o participante poderia ter avançado mais em seu raciocínio se mobilizasse as AM de modo consciente, mantendo-se atento a novas possibilidades, como investigar o comportamento da função ao verificar a imagem da função para outros valores do domínio próximos de zero.

No exemplo a seguir, referente à Av2-Q2 (Quadro 9), A7 apresenta, no item “d”, continuidade em relação ao padrão de resolução dos itens anteriores. Entretanto, para calcular a taxa de variação instantânea em um ponto sem utilizar as regras tradicionais de derivação, deve-se recorrer ao conceito de limite, base para o cálculo da derivada. A ideia é aproximar a taxa de variação média (TVM) da taxa de variação instantânea (TVI), fazendo com que os intervalos da TVM se tornem cada vez menores e se aproximem progressivamente do ponto da TVI.

Quadro 9: Resolução A7 – Questão 2

A7 – Q2



Fonte: Dados da pesquisa.

Para obter a taxa de variação instantânea, calcula-se o limite da taxa de variação média à medida que h se aproxima de zero, utilizando-se o seguinte limite:

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esse limite, se existir, é a derivada de $f(x)$ no ponto $x = a$, representando a taxa de variação instantânea. O equívoco cometido na resolução A7 indica uma mobilização diversificada de várias Ações Mentais, como classificar (AM4), conectar experiências anteriores (AM8), estimar e fazer aproximações (AM19), realizar operações com números reais (AM23), entre outras. No entanto, essas ações não se articulam de modo coerente, uma vez que não provocam uma reflexão sobre como os conceitos de TVM e TVI estão correlacionados.

8 Mobilização restrita e pouco efetiva

Essa categoria pode representar uma parcela significativa dos tipos de Pensamento Matemático quando investigados em relação aos conceitos de CDI, refletindo o cenário atual do ensino dessa disciplina, historicamente marcado por elevados índices de reprovação ou desistência (Rosa, Alvarenga & Santos, 2019; Barbosa, 2004; Rasmussen, Marrongelle & Borba, 2014). Enquadram-se nela aqueles que desenvolveram parcialmente suas respostas, em geral revelando um conhecimento fragmentado dos conceitos de matemática básica e, sobretudo, de CDI.

Por exemplo, uma análise geral da Av1-Q1 revelou que os alunos que apresentaram mobilizações insuficientes naquele momento não conseguiram manipular algebricamente os limites, determinar as raízes das funções, interpretar o significado dos limites encontrados nem elaborar os gráficos. Embora tenham classificado, conectado experiências anteriores e realizado cálculos com números reais, essas habilidades não foram suficientes para a resolução esperada (Quadro 10).

Quadro 10: Resolução A14 – Questão 1

A14 – Q1

Fonte: Dados da Pesquisa.

A resolução de A14 mostrou certo êxito nos itens que exigiam apenas cálculos com números reais (AM23). No entanto, no item “a”, embora tenha demonstrado consciência da necessidade de manipular algebricamente (AM35) para retirar a indeterminação do limite, a execução foi equivocada. O estudante identificou o tipo de problema (AM4, AM30), mas a fragilidade técnica resultou em limites incorretos (+1 e -1). Ao tentar interpretar (AM33) e visualizar (AM52) nos itens “d” e “e”, a resolução apresentada revela uma profunda confusão entre os conceitos de assíntotas verticais e horizontais. A14 interpretou os limites no infinito como assíntotas verticais ($x = 1$ e $x = -1$), quando deveriam ser horizontais ($y = L$). Assim, produziu-se um choque visual e lógico que não foi percebido pelo respondente. Mesmo marcando corretamente os pontos $f(1) = 1/2$ e $f(-1) = -1/2$, desenhou simultaneamente assíntotas verticais sobre esses mesmos valores de x .

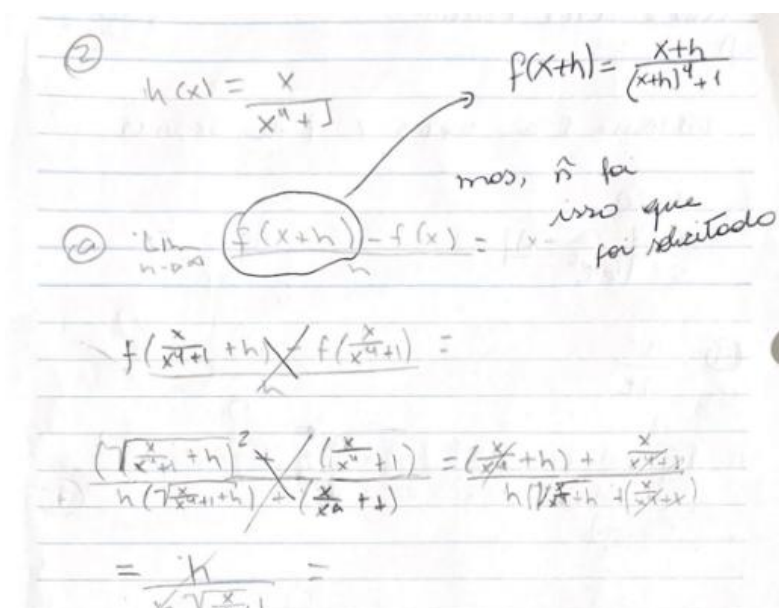
Essa contradição demonstra a falta de reflexão sobre os próprios resultados e a ausência da ação verificar (AM51). Se tivesse utilizado uma tabela (AM45) para estimar e realizar aproximações (AM19), testando valores maiores de x , poderia perceber que a função tende a zero quando x tende ao infinito positivo ou negativo, corrigindo o erro algébrico inicial. Essas fragilidades revelam que, embora tenham sido mobilizadas diferentes ações mentais, a falta de uma articulação mais coerente entre elas e os conceitos específicos do CDI impede um entendimento mais robusto do problema.

Essa limitação pode ser atribuída à ausência de reflexão sobre o próprio fazer, isto é, à reprodução mecânica de resoluções sem a compreensão efetiva do que os conceitos representam e de como se articulam. Assim, a maioria dos participantes da pesquisa enquadra-se nessa categoria, refletindo uma dificuldade generalizada em conectar logicamente conceitos matemáticos fundamentais às suas resoluções.

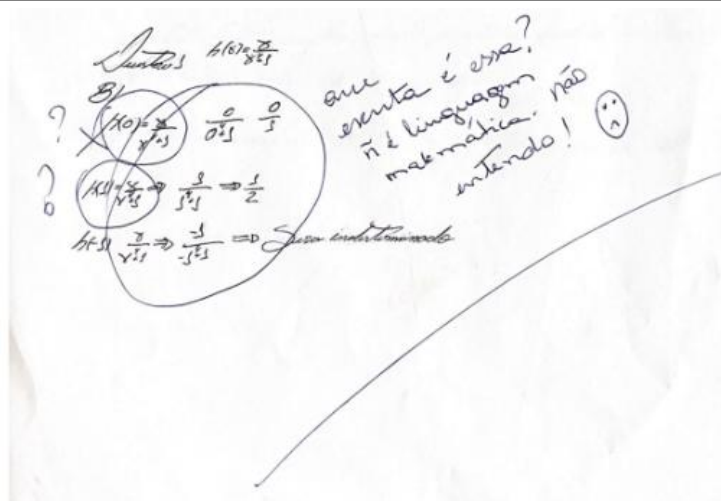
9 Ausência ou não evidência de mobilizações

Essa categoria abrange as resoluções das avaliações que obtiveram resultados muito próximos de zero. Em geral, esses casos refletem uma falta de compreensão dos conceitos fundamentais relacionados ao CDI, o que dificulta a assimilação de conteúdos mais avançados presentes nas avaliações. As resoluções frequentemente se limitam a cálculos pontuais da função ou revelam erros que indicam uma incompreensão profunda dos conceitos abordados (Quadro 11).

Quadro 11: Resolução A35 e A36 – Questão 1

A35- Q1	
---------	--

A36 – Q1



Fonte: Dados da pesquisa.

Pesquisas indicam que muitos alunos enfrentam dificuldades significativas ao ingressar em cursos superiores de exatas, especialmente nas disciplinas de CDI. Uma das principais razões para esses desafios está na ausência de uma base sólida de conhecimentos matemáticos adquirida durante o Ensino Fundamental e Médio, período em que muitos alunos não dominam operações matemáticas fundamentais (Godoy & Faria, 2012; Macêdo, 2010; Bressan *et al.*, 2009).

Além disso, a transição entre o ensino médio e o ensino superior também contribui para essas dificuldades, pois os alunos são confrontados com um ritmo acelerado de introdução de novos conceitos e técnicas, sem o tempo necessário para sua consolidação (Nasser, Sousa & Torraca, 2021). Essas barreiras na aprendizagem revelam não apenas a fragilidade dos alunos em relação aos conceitos específicos do CDI, mas também a necessidade de intervenções pedagógicas capazes de enfrentar tais lacunas.

Uma abordagem que pode contribuir para enfrentar essas dificuldades consiste em conduzir os estudantes ao desenvolvimento de maior consciência sobre seu próprio processo de aprendizagem, o que pode ser alcançado por meio de habilidades metacognitivas na formação do pensamento matemático, incentivadas desde o início da escolaridade.

10 Conclusões

As análises realizadas neste estudo destacam a importância da mobilização consciente das AM para o desenvolvimento do PMA em estudantes de Cálculo Diferencial e Integral. Observamos que a diversificação e a simultaneidade dessas ações nas resoluções dos alunos se correlacionam com maior compreensão dos conceitos matemáticos abordados e com o estabelecimento de conexões adequadas entre eles. Ao mesmo tempo, evidenciou-se que mobilizar diversas Ações Mentais na resolução de uma mesma situação-problema não reflete, necessariamente, um Pensamento Matemático Avançado, pois podem existir lacunas nas resoluções, como ocorre na categoria 2: **mobilização diversa, porém desarticulada**. Sugerimos que algumas ações mentais, como investigar e verificar, podem auxiliar no processo de reflexão e no avanço do raciocínio matemático, estimulando a atenção à coerência entre as respostas apresentadas em uma mesma situação-problema.

Retomando o problema de pesquisa que norteou este estudo “quais as ações mentais foram mobilizadas pelos estudantes em resoluções de duas questões que envolviam conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral?”, a análise permitiu explicitar e sintetizar as ações efetivamente acionadas para solucionar as tarefas. Dentre as principais mobilizações

identificadas nas resoluções dos discentes, destacam-se: argumentar de forma textual (AM3), classificar (AM4), conectar experiências anteriores (AM8), estimar e fazer aproximações (AM19), realizar operações com números reais (AM23), graficar (AM29), interpretar (AM33), investigar (AM34), manipular expressões algébricas (AM35), transpor informações (AM49), verificar (AM51) e visualizar (AM52). Constatou-se que o êxito nas resoluções não dependeu apenas da evocação pontual dessas ações, mas sim de uma coordenação coerente entre elas, evidenciando que a transição de conceitos prévios para a formulação de gráficos, o cálculo de limites e as taxas de variação exige uma mobilização articulada de saberes.

Por um lado, as mobilizações restritas e pouco efetivas enquadram a maioria das resoluções analisadas, uma vez que representam estudantes que possuem certo conhecimento sobre o conteúdo, mas não conseguem estabelecer as conexões adequadas no momento solicitado. Por outro lado, a ausência ou a insuficiência na mobilização dessas ações evidenciou fragilidades no entendimento dos conceitos de matemática básica, refletindo desafios persistentes no ensino de disciplinas como CDI.

Diante dos resultados obtidos, sugerimos a necessidade de novas abordagens pedagógicas que promovam a conscientização e a aplicação estratégica das AM em contextos de ensino e de aprendizagem. Tais abordagens podem favorecer, por exemplo, o avanço do pensamento matemático daqueles que se encontram nas categorias 2 ou 3, especialmente quando o professor explicita ao estudante as AM que precisariam ser mobilizadas para que ele avance em seu raciocínio.

A elaboração de questões avaliativas — e também de situações-problema ao longo da disciplina — direcionadas a estimular a mobilização de diferentes ações mentais pode contribuir para maior eficácia no processo educativo. Além disso, a inclusão de entrevistas ou de coletas de dados diversificadas em futuras pesquisas pode oferecer uma compreensão mais ampla e detalhada das dificuldades enfrentadas pelos estudantes, possibilitando intervenções pedagógicas mais direcionadas.

Em suma, este estudo reforça a relevância de integrar o conhecimento teórico sobre ações mentais e neurociências cognitivas à Educação Matemática, especialmente em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral. Ao promover uma reflexão sobre as práticas pedagógicas e os processos de avaliação, podemos seguir um caminho de melhoria contínua da aprendizagem matemática, capacitando os estudantes a superar desafios e a alcançar um entendimento mais profundo e interconectado dos conceitos matemáticos.

Conflitos de Interesse

- A autoria declara não haver conflitos de interesse que possam influenciar os resultados da pesquisa apresentada no artigo.

Declaração de Disponibilidade dos Dados

- Os dados produzidos, ou coletados, e analisados no artigo serão disponibilizados mediante solicitação à autoria.

Referências

- Alvarenga, K. B. (2021). Maneiras de avançar o pensamento matemático na educação básica com respaldo das neurociências. In E. C. de Faria, M. A. Gonçalves Júnior, & M. G. Moraes (Orgs.), *A educação matemática na escola: Pesquisas e práticas goianas* (pp. 44–57). Cegraf UFG.

- https://publica.ciar.ufg.br/ebooks/ebook_a_educacao_matematica_na_escola/05.html
- Alvarenga, K. B. (2023). Avançando o pensamento matemático com base nos resultados das neurociências cognitivas. In P. Scott, Y. Morales, & A. Ruíz (Orgs.), *Investigación: 10. Educación Matemática en las Américas 2023* (pp. 55–61). Ciaem. <https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen10-Tema-9.pdf>
- Alvarenga, K. B., & Domingos, A. (2020). *Ressignificação do pensamento matemático avançado* [Relatório de pós-doutorado não publicado]. Universidade Nova de Lisboa.
- Alvarenga, K. B., & Domingos, A. (2021). Conexões entre neuroeducação e formação de professores. *Revista Internacional de Formação de Professores*, 6, 1–24. <https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/554/>
- Alvarenga, K. B., & Ferreira, C. (2017). Pensamento matemático elementar versus pensamento matemático avançado: Uma análise de esboços gráficos de funções em cálculo diferencial e integral. In *Livro de atas do VIII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática* (pp. 575–583). <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/204801>
- Alvarenga, K. B., Rocha, C. N., Carvalho, P. P. T., Soares, M. J. R., & Lima, J. A. (2022). Investigação acerca das possíveis ações mentais desenvolvidas por estudantes do 1º ano do ensino médio no retorno às aulas presenciais. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 18, 176–187. <https://doi.org/10.18542/amazrecm.v18i41.13501>
- Anderson, W. L., & David, R. K. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Addison Wesley Longman, Inc.
- Barbosa, M. A. (2004). *O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral* [Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná]. <https://arquivum.grupomarista.org.br/pergamumweb/vinculos/tede/marcosedu.pdf>
- Bressan, P. M., Azambuja, C., Gonçalves, N., & Muller, M. J. (2009). Cálculo diferencial e integral I: Investigação sobre dificuldades dos alunos. In *Anais do décimo Salão de Iniciação Científica da PUCRS* (pp. 1172–1175).
- Burón, J. (1996). *Enseñar a aprender: Introducción a la metacognición*. Ediciones Mensajero.
- Cordeiro, F. de N. C. dos S., Cordeiro, H. P., Pinto, L. O. A. D., Sefer, C. C. I., Santos-Lobato, E. V., Mendonça, L. T. de, & Sá, A. M. M. (2023). Estudos descritivos exploratórios qualitativos: Um estudo bibliométrico. *Brazilian Journal of Health Review*, 6(3), 11670–11681. <https://doi.org/10.34119/bjhrv6n3-259>
- Costa, C. (2002). Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Orgs.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 257–273). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organising principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15, 375–402.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced*

- mathematical thinking* (pp. 25–41). Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275–282). Kluwer Academic Publishers.
- Godoy, L. F. S. de, & Faria, W. C. (2012). O cálculo diferencial e integral e suas aplicações no ensino da engenharia: Uma análise de currículo. *Anais do Congresso de Iniciação Científica do INATEL*. Instituto Nacional de Telecomunicações.
- Gomes, A. R., & Colombo Júnior, P. D. (2018). Diálogos necessários: Neurociência, emoções e a formação inicial de professores. *Revista Iberoamericana de Educación*, 78(1).
- Gonçalves, J. A., & Silva, K. A. P. da. (2023). Processos do pensamento matemático avançado mobilizados em tarefas investigativas para a educação financeira. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 18, 1–22. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e94576>
- Grabner, R. H., Obersteiner, A., Smedt, B., Vogel, S., von Aster, M., Leikin, R., & Nuerk, H. (2017). Mathematics education and neuroscience. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. ICME.
- Haase, V. G., & Ferreira, F. O. (2009). Neurociência e educação. In M. R. Carvalho & R. M. Almeida (Orgs.), *Cérebro e aprendizagem: Um diálogo entre a neurociência e a educação* (pp. 25–45). WAK Editora.
- Grabner, R. H., Stichel, B., & Feller, K. (2017). Reading and writing: A neuroscientific perspective on a complex, culturally defined, and late acquired skill. In K. Cain, D. Compton, & R. Parrila (Eds.), *Theories of reading development* (pp. 43–66). John Benjamins.
- Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27–50. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3
- Inarejos Filho, O. (2023). *Possíveis contribuições do pensamento matemático avançado para o ensino de matemática na educação básica* [Tese de doutorado, Universidade Estadual de Londrina].
- Leikin, M., Waisman, I., Shaul, S., & Leikin, R. (2014). Brain activity associated with translation from a visual to a symbolic representation in algebra and geometry. *Journal of Integrative Neuroscience*, 13(1).
- Leikin, R., Zazkis, D., & Zazkis, R. (2018). What is in a task: Mathematical affordances for developing professional knowledge of pre-service teachers. *ZDM*, 50(4), 575–586.
- Liu, P. H., & Niess, M. L. (2006). An exploratory study of college students' views of mathematical thinking in a historical approach calculus course. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 373–406.
- Lucini, F. A., Ferrano, G. D., Sigman, M., & Makse, H. A. (2019). How the brain transitions from conscious to subliminal perception. *Neuroscience*, 441, 280–290. <https://doi.org/10.1016/j.neuroscience.2019.03.047>

- Macêdo, L. (2010). Dificuldades de aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral: Estudo de caso com alunos do curso de licenciatura em química. *Anais do Quinto CONNEPI*. CONNEPI.
- Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin Press.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Pearson Education Limited.
- Nanpo, D. S. O., Caetano, R. S., & Bezerra, R. C. (2022). Fatores fundamentados pela neurociência cognitiva no ensino e aprendizagem da matemática: Uma revisão sistemática da literatura. *Brazilian Journal of Development*, 8(8), 55785–55796.
- Nascimento, J. S. L. do. (2025). *Matemática e neurociência: Estruturas didáticas para facilitar a construção do pensamento matemático em alunos com discalculia* [Trabalho de conclusão de curso em Matemática, Universidade Federal da Paraíba].
- Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In M. C. R. Frota & L. Nasser (Orgs.), *Educação matemática no ensino superior: Pesquisas e debates* (pp. 43–58). SBEM.
- Nasser, L., Sousa, G. A., & Torraca, M. (2022). Transição do ensino médio para o superior: Implicações das pesquisas desenvolvidas por um grupo colaborativo. *Boletim GEPEM*, 78, 83–101. <https://doi.org/10.4322/gepem.2022.012>
- Nomura, J. I., & Bianchini, B. L. (2012). Contribuições da neurociência cognitiva no pensamento matemático avançado e na educação matemática. In *Anais do Quinto Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1–18).
- Peixoto, E. G., & Alvarenga, K. B. (2024). Ações mentais matemáticas identificadas em resoluções de avaliações de cálculo diferencial e integral. In *Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. <https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/187>
- Pereira, B. M., & Tonelli, E. (2024). Neurociência cognitiva e educação matemática: Uma revisão sistemática da literatura. *Revista Tecnologia & Cultura*, 56–63.
- Pizyblski, L. M., Santos Júnior, G., & Pinheiro, N. A. M. (2009). Relações entre o ensino da matemática e a neurociência. In *Anais do Primeiro Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia*.
- Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. (2014). Research on calculus: What do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, 46, 507–515. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x>
- Reis, F. da S., Lopes, A. P. C., & Malaspina, É. R. (2024). O pensamento matemático avançado no ensino de equações diferenciais ordinárias e de geometria analítica e cálculo vetorial. In *Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1–13). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Rosa, C. M., Alvarenga, K. B., & Santos, F. F. T. (2019). Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: Um estudo de caso. *Revista Internacional de Educação Superior*, 5. <https://doi.org/10.20396/riesup.v5i0.8653091>
- Santos, M. A. S., Alvarenga, K. B., & Silva, G. R. (2018). Pensamento matemático: Gráficos de funções polinomiais e áreas no ensino superior. In *Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*.

- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 334). Macmillan.
- Smedt, B. de, & Verschaffel, L. (2010). Traveling down the road: From cognitive neuroscience to mathematics education ... and back. *ZDM Mathematics Education*, 42.
- Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important*. Progress Report of the APEC Project: Collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II) – Lesson study focusing on mathematical thinking. <https://pt.scribd.com/document/362483519/What-is-Mathematical-Thinking-and-Why-is-It-Import>
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In D. Carraher & L. Miera (Eds.), *Proceedings of XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 161–175). <https://digilander.libero.it/leo723/materiali/algebra/dot1995b-pme-plenary.pdf>
- Torrente, C. R., & Reis, F. da S. (2023). A mobilização de processos do pensamento matemático avançado na resolução de questões da OBMEP. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 13(2), 1–22.