

Números Metálicos e o Tabuleiro Digital: Uma experiência didática com o GeoGebra

Maria Graciene Moreira dos Santos

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado do Ceará
Fortaleza, CE — Brasil

✉ gracienemoreira546@gmail.com

 0000-0003-1982-8783

Francisco Régis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado do Ceará
Fortaleza, CE — Brasil

✉ fregis@ifce.edu.br

 0000-0003-3710-1561



2238-0345 

10.37001/ripem.v16i2.4843 

Recebido • 12/03/2026

Aprovado • 28/05/2026

Publicado • 28/08/2026

Editoria • Edvonete Souza de Alencar 

Veridiana Rezende 

Resumo: O ensino de sequências na formação inicial de professores costuma restringir-se à sequência de Fibonacci, frequentemente apresentada por sua origem histórica ou associada a personagens clássicos da matemática, o que pode gerar lacunas conceituais na formação docente. Diante disso, este estudo empírico propõe uma sequência didática sobre números metálicos, partindo da sequência de Fibonacci e utilizando um tabuleiro digital no GeoGebra, fundamentado na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. A pesquisa foi desenvolvida segundo a Engenharia Didática, contemplando análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. A intervenção foi realizada com dois professores da rede estadual de ensino. Os resultados indicam que a proposta favorece a transição entre manipulação digital e formalização algébrica das sequências, promovendo construção autônoma do conhecimento e articulação entre representações geométricas e algébricas.

Palavras-chave: Números Metálicos. GeoGebra. Engenharia Didática. Professor de Matemática. Teoria das Situações Didáticas.

Title in English Metal Numbers and the Digital Board: A didactic experience with GeoGebra

Abstract: The teaching of sequences in initial teacher education is often restricted to the Fibonacci sequence, frequently presented due to its historical origin or associated with classic figures in mathematics, which can generate conceptual gaps in teacher education. Thus, this empirical study proposes a didactic sequence on metallic numbers, starting with the Fibonacci sequence and using a GeoGebra digital board, based on Guy Brousseau's theory of didactic situations. The research was developed according to didactic engineering, including preliminary analyses, conception and *a priori* analysis, experimentation and *a posteriori* analysis, and validation. The intervention was conducted with the assistance of two teachers from the state education network. The results indicate that the proposal favors the transition from digital manipulation to algebraic formalization of sequences, promoting autonomous knowledge construction and articulation between geometric and algebraic representations.

Keywords: Metallic Numbers. GeoGebra. Didactic Engineering. Mathematics Teacher. Theory of Didactic Situations.

Números Metálicos y la Pizarra Digital: Una experiencia didáctica con GeoGebra

Resumen: La enseñanza de secuencias en la formación inicial del profesorado suele limitarse a la secuencia de Fibonacci, presentada frecuentemente debido a su origen histórico o asociada a figuras clásicas de las matemáticas, lo que puede generar lagunas conceptuales en la formación docente. Por ello, este estudio empírico propone una secuencia didáctica sobre números metálicos, partiendo de la secuencia de Fibonacci y utilizando una pizarra digital GeoGebra, basada en la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau. La investigación se desarrolló según la metodología de ingeniería didáctica, incluyendo análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori, y validación. La intervención se llevó a cabo con dos docentes de la red educativa estatal. Los resultados indican que la propuesta favorece la transición de la manipulación digital a la formalización algebraica de secuencias, promoviendo la construcción autónoma del conocimiento y la articulación entre representaciones geométricas y algebraicas.

Palabras clave: Números Metálicos. GeoGebra. Ingeniería Didáctica. Profesor de Matemáticas. Teoría de las Situaciones Didácticas.

1 Introdução

A presente pesquisa tem como finalidade propor uma abordagem investigativa para o ensino de Matemática, explorando as propriedades algébricas e geométricas dos números metálicos por meio da utilização de um tabuleiro digital construído no *software* GeoGebra. O estudo parte da constatação de que, no campo da matemática, as sequências numéricas recorrentes constituem uma área fértil em descobertas, com múltiplas conexões com a álgebra, a análise, a geometria e até mesmo com manifestações artísticas e arquitetônicas.

Embora esse campo possua um amplo potencial formativo, Alves (2017) aponta que, na formação inicial de professores, o ensino de sequências tende a ficar praticamente limitado à sequência de Fibonacci. Em geral, ela é apresentada sobretudo por sua origem histórica e por sua associação a figuras clássicas da matemática. Ainda que essa abordagem tenha seu valor, ela acaba restringindo a compreensão de propriedades algébricas mais abrangentes e reduz as oportunidades de investigar outras sequências, bem como as relações existentes entre elas.

Autores como Grimaldi (2012) e Stillwell (1989) destacam que os livros de história da matemática frequentemente relegam a um segundo plano as generalizações e os aprofundamentos conceituais das sequências. Nessa direção, Alves (2024) observa que não é suficiente tratar tais números como simples curiosidades históricas, sendo necessário fundamentá-los matematicamente. Esse cenário reforça a pertinência de pesquisas contemporâneas voltadas ao estudo de sequências numéricas, que não apenas ampliam o conhecimento teórico em matemática pura, mas também oferecem subsídios para suprir lacunas presentes nos materiais didáticos.

Investigações recentes, como as de Benjamin e Quinn (2003), Alves (2012; 2017), Grimaldi (2012), Mangueira e Alves (2020), Vieira (2020), Alves e Catarino (2022) e Soykan (2023), evidenciam o crescimento desse campo e a necessidade de novas propostas didáticas que articulem tais resultados com a prática pedagógica.

Diante desse contexto, coloca-se a seguinte questão de pesquisa: de que maneira uma sequência didática baseada nos números metálicos, mediada pelo GeoGebra, pode contribuir para a ampliação da compreensão conceitual de sequências na formação inicial de professores?

Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo geral investigar de que modo uma sequência didática baseada nos números metálicos, mediada pelo GeoGebra, favorece a construção da compreensão conceitual de sequências recorrentes na formação inicial de professores.

O estudo busca promover, por meio de uma proposta didática mediada pelo GeoGebra, a compreensão das propriedades algébricas e geométricas dos números metálicos, ampliando o horizonte do ensino de sequências recorrentes para além do caso particular da sequência de Fibonacci. A atividade, centrada no uso de um tabuleiro digital interativo, visa estimular a formulação de conjecturas, o desenvolvimento do raciocínio lógico e a argumentação matemática, de modo que os estudantes possam construir significados a partir da exploração dinâmica das representações.

Ao situar o número de ouro, definido por $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$, dentro da família mais ampla dos números metálicos (Spinadel, 1995), definidos como as raízes positivas da equação quadrática $x^2 - px - q = 0$, com p e $q \in \mathbb{N}$, propõe-se deslocar o olhar da matemática escolar de um caso isolado para uma classe geral de sequências, o que enriquece a compreensão dos fenômenos numéricos.

O GeoGebra foi selecionado como ferramenta principal por ser um *software* livre, de fácil acesso e com interface intuitiva, que oferece múltiplas possibilidades para o desenvolvimento da cognição matemática dos estudantes. Seu caráter dinâmico permite que o aluno interaja com objetos geométricos e algébricos, favorecendo a construção de significados e a visualização de propriedades matemáticas. Como observa Abar (2020), os recursos disponibilizados por esse ambiente digital podem potencializar as práticas docentes, contribuindo para uma atualização metodológica do ensino e para a modernização do conhecimento escolar.

No que se refere ao referencial teórico, optou-se pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (2008), por compreender que essa abordagem coloca o estudante em posição ativa diante do saber, promovendo a autonomia intelectual e a construção de conhecimentos a partir da resolução de situações-problema.

A metodologia adotada fundamenta-se na Engenharia Didática (ED), especialmente em suas quatro etapas constitutivas: as análises preliminares, a análise *a priori*, a experimentação e, por fim, a análise *a posteriori* e validação. Essa estrutura metodológica orienta a construção, a aplicação e a interpretação das situações didáticas elaboradas ao longo da pesquisa, garantindo coerência entre os objetivos formativos, os referenciais teóricos mobilizados e os resultados produzidos.

Na sequência, apresentamos a seção destinada ao referencial teórico e à metodologia da investigação. Nela, discutimos os aportes conceituais que sustentam a proposta, além de detalharmos os procedimentos metodológicos adotados em cada etapa do estudo, de modo a oferecer ao leitor uma visão clara e articulada dos caminhos percorridos na pesquisa.

2 Referencial Teórico: Fundamentação Teórica e Estado da Arte

Inicialmente, são discutidos os aspectos matemáticos dos números metálicos, suas propriedades e vínculos com as sequências numéricas recorrentes. Na dimensão teórica, a pesquisa se apoia na Teoria das Situações Didáticas (TSD), que orienta o desenho das atividades e valoriza o protagonismo do aluno na construção do conhecimento. Por fim, adota-se a Engenharia Didática (ED) como metodologia de estruturação da proposta, contemplando suas etapas iniciais de análise e planejamento.

2.1 Os números metálicos e suas propriedades matemáticas

Tomamos como ponto de partida o número de ouro:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Amplamente reconhecido por sua presença em fenômenos naturais, obras de arte e construções arquitetônicas. Esse número, usualmente associado à sequência de Fibonacci, foi por muito tempo considerado um irracional único e especial. No entanto, Spinadel (1995) demonstrou que ele faz parte de uma família mais ampla, denominada “Números Metálicos”, definidos como as raízes positivas da equação quadrática:

$$x^2 - px - q = 0, \text{ com } p \text{ e } q \in \mathbb{N}.$$

A partir dessa perspectiva, a sequência de Fibonacci deixa de ser vista de forma isolada e passa a constituir um caso particular dentro de uma classe mais geral de sequências recorrentes, que estabelecem vínculos diretos com os números metálicos. Do ponto de vista da utilização da notação matemática moderna, podemos considerar a seguinte definição matemática que caracteriza as propriedades aritméticas dos números metálicos:

Definição 1: Para todo inteiro $n \geq 0$ e todo $k \geq 1$, o conjunto dos números Metálicos $\{M_n\} n \in \mathbb{N}$ fica determinado pela seguinte recorrência homogênea e de 2ª ordem $M_{n+1} = k.M_n + M_{n-1}$, com valores iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$.

Podemos determinar a seguinte equação característica associada com a recorrência anterior, da forma $x^2 = kx + 1$ e que determinaremos as raízes $r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ e $r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$. Com os valores correspondentes com a seguinte raiz positiva passamos a descrever certas razões associadas aos números metálicos. Quando tomamos $k = 1 \therefore x^2 = kx + 1$. Repare que, a partir da definição 1, estabelecemos a seguinte razão $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ amplamente conhecida como a razão ouro.

No quadro 1 indicamos outros casos de razões metálicas e exemplos de recorrências associadas para cada caso.

Quadro 1: Descrição das extensões da sequência de Fibonacci e as razões metálicas

Nome	Relação de recorrência	Razão metálica
Ouro	$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_0 = 0, F_1 = 1$	$r_1 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \dots$
Prata	$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, P_0 = 0, P_1 = 1$	$r_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414 \dots$
Bronze	$BF = 3BF_n + BF_{n-1}, BF_0 = 0, BF_1 = 1$	$r_3 = 3 + \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 3.303 \dots$
Cobre	$CF_{n+1} = 4CF_n + CF_{n-1}, CF_0 = 0, CF_1 = 1$	$r_4 = 2 + \sqrt{5} = 4.236067 \dots$
Níquel	$NF_{n+1} = 5NF_n + NF_{n-1}, NF_0 = 0, NF_1 = 1$	$r_5 = 5 + \sqrt{29} \approx 5.19258 \dots$

Fonte: Elaboração do autor.

2.2 Teoria das Situações Didáticas como base teórica da proposta

A Teoria das Situações Didáticas, elaborada por Guy Brousseau, é uma teoria francesa que fornece um referencial para compreender as relações entre professor, aluno e saber matemático, representadas pelo triângulo didático. Nesse modelo, cada vértice corresponde a um desses elementos e suas interações estruturam o processo de ensino e aprendizagem. Conforme destaca Alves (2016), a teoria permite analisar essas relações de forma dinâmica, evidenciando que o saber não circula de maneira linear entre professor e aluno, sendo mediado pelas condições que organizam a situação de ensino. Neste estudo, essa perspectiva é mobilizada para orientar a análise das interações estabelecidas entre os participantes e o saber

matemático no contexto das atividades propostas.

Nessa perspectiva, não se busca a transmissão direta do conteúdo, mas a criação de condições para que o aluno se aproxime do fazer matemático, adotando uma postura investigativa, formulando hipóteses e validando estratégias. Para Brousseau (2002; 2008), o professor, como mediador, deve produzir situações didáticas que favoreçam a construção e apropriação do conhecimento; nesse sentido, uma situação pode ser compreendida como “uma forma de interação entre um sujeito e um determinado meio. Tal concepção fundamenta, nesta pesquisa, a elaboração das tarefas no âmbito da Engenharia Didática, especialmente na fase de concepção e análise *a priori*.”

O conceito de meio é central nessa teoria, compreendendo o conjunto de elementos, regras, instrumentos, restrições e condições do problema que interagem com o aluno. Esse meio reage às ações do sujeito, validando ou refutando estratégias e tornando o conhecimento matemático necessário à resolução da situação. No contexto desta investigação, o meio é materializado, principalmente, pelo tabuleiro digital construído no GeoGebra, que atua como elemento estruturante das interações e das validações realizadas pelos participantes.

Associado a isso está o contrato didático, entendido como o conjunto de expectativas, geralmente implícitas, que regulam as responsabilidades de professor e aluno diante do saber. Ele define, por exemplo, o que o aluno espera da intervenção do professor e o que o professor espera que o aluno mobilize para resolver um problema. Alterações nesse contrato podem gerar desequilíbrios produtivos, levando o aluno a assumir maior responsabilidade na construção do conhecimento. Essa noção orienta, nesta pesquisa, a análise das mudanças de postura dos participantes ao longo da experimentação, especialmente no que se refere à autonomia na resolução das situações propostas.

O processo de aprendizagem na TSD organiza-se em fases ou dialéticas: ação, formulação, validação e institucionalização. As três primeiras compõem a chamada situação adidática, momento em que o aluno interage com o problema e com o meio sem intervenção direta do professor na condução das estratégias. Nessa etapa, o saber emerge como resposta às exigências impostas pela própria estrutura da situação. Essas fases orientam tanto a organização das atividades propostas quanto os critérios de análise das produções dos participantes ao longo da experimentação. No quadro 2, explicaremos cada fase:

Quadro 2: Caracterização das fases das situações didáticas na perspectiva de Brousseau

Ação	O aluno entra em contato com o problema e mobiliza conhecimentos prévios e interações com o meio para elaborar estratégias iniciais de resolução.
Formulação	O aluno explicita ideias, formula conjecturas e comunica estratégias por meio de diálogo e linguagem matemática ainda não formalizada.
Validação	O aluno organiza e justifica seus argumentos, buscando convencer os colegas sobre a validade de sua solução por meio de explicações e mecanismos de prova.
Institucionalização	O professor intervém para sistematizar e formalizar o conhecimento produzido, atribuindo estatuto matemático ao que foi construído na atividade.

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Desse modo, a TSD estrutura o ensino como um sistema de interações reguladas entre professor, aluno e saber, no qual o meio e o contrato didático desempenham papel fundamental na organização das situações que possibilitam a construção do conhecimento matemático. No âmbito desta pesquisa, essa teoria não é apenas tomada como referência conceitual, mas como

fundamento para a construção, implementação e análise das situações didáticas desenvolvidas, articulando-se diretamente com a Engenharia Didática adotada. A seguir, apresenta-se detalhadamente o percurso metodológico adotado nesta investigação.

3 Procedimentos Metodológico: Engenharia Didática

A metodologia escolhida para estruturar este trabalho foi a Engenharia Didática (ED). Segundo Artigue (1996), a ED configura-se em um esquema experimental, que se norteia em realizações didáticas em sala de aula, referentes à concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. A estrutura de uma ED pode ser organizada em quatro etapas, que são: i) Análises preliminares; ii) Concepção e análise *a priori*; iii) Experimentação e iv) Análise *a posteriori* e validação (interna ou externa), descritas sumariamente no Quadro 3.

Quadro 3: Etapas da Engenharia Didática

Etapa	Descrição
Análises preliminares	Nesta fase, realiza-se um levantamento bibliográfico voltado à fundamentação do quadro teórico-didático, contemplando uma análise epistemológica dos conteúdos envolvidos e de sua abordagem no ensino atual. Inclui-se, ainda, a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos, das dificuldades recorrentes, dos possíveis obstáculos de aprendizagem, bem como a análise do contexto no qual se insere a realização didática.
Concepção e análise <i>a priori</i>	Nesta segunda fase, o pesquisador procede à delimitação das variáveis didáticas, tanto globais quanto locais, sobre as quais a ação pedagógica poderá incidir, com o objetivo de orientar o desenvolvimento da pesquisa e estruturar um plano de ação. Nessa etapa, elabora-se a sequência de ensino e antecipam-se possíveis comportamentos dos participantes, tomando como referência as variáveis previamente estabelecidas.
Experimentação	Nesta fase, procede-se à implementação das situações didáticas, ou da sequência de ensino previamente elaborada. Estabelece-se o contrato didático com os sujeitos envolvidos no processo e realiza-se a coleta dos dados necessários ao desenvolvimento da pesquisa.
Análise <i>a posteriori</i> e validação	Esta última fase fundamenta-se no conjunto de dados coletados durante a experimentação. A partir de sua análise, procede-se ao confronto entre os resultados obtidos e as previsões estabelecidas na análise <i>a priori</i> , com o objetivo de verificar a confirmação ou a refutação das hipóteses formuladas ao longo da investigação.

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Conforme Almouloud e Coutinho (2008, p. 68), o objetivo da ED é, essencialmente, “relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados”. É importante notar que cada etapa da ED pode ser revisitada e aperfeiçoada ao longo da pesquisa, pois elas estão em constante processo de complementação.

3.1 Análise preliminar

Com base nas análises preliminares e levando em conta os aspectos epistemológicos, matemáticos e didáticos relacionados ao tema, constatamos que os livros de História da Matemática apresentam uma cobertura bastante limitada acerca das sequências recorrentes. De modo predominante, essas obras restringem-se a mencionar apenas os exemplos mais conhecidos, como as sequências de Fibonacci e de Lucas (Gullberg, 1997; Krantz, 2006; Stakov, 2009).

Paralelamente, identificamos um grupo de pesquisadores que utiliza jogos, materiais manipuláveis e diferentes configurações de tabuleiros como ponto de partida para explorar ideias matemáticas. Essas propostas permitem estabelecer relações entre padrões de ladrilhamento e propriedades aritméticas, oferecendo abordagens que articulam visualização, contagem e estrutura matemática (Martin, 1996; Heubach, Chinn & Callahan, 2005; Alsina & Nelsen, 2006; Moscovich, 2015; Tedford, 2019; Dresden & Tulsikh, 2021).

Nesse sentido, a presente pesquisa se insere nessa perspectiva ao propor o desenvolvimento de uma sequência didática que articula o estudo dos números metálicos com a utilização de um tabuleiro digital interativo. A proposta busca, assim, superar a abordagem restrita identificada na literatura, explorando generalizações das sequências recorrentes por meio de representações geométricas e algébricas, em um ambiente que favorece a investigação e a construção de significados pelos participantes.

3.2 Análise *a priori*

Nesta etapa, apresentamos a análise *a priori* das situações didáticas concebidas pelo professor-pesquisador para introduzir e explorar os números metálicos, tomando como referência os princípios TSD e apoiando-nos no *software* GeoGebra como instrumento de mediação e exploração matemática.

Foram elaboradas três situações que compõem uma sequência de atividades voltada à construção gradual da ideia central do estudo. A seguir, apresentam-se essas três situações:

Quadro 4: Etapas da Sequência de Atividades

1. De quantas formas diferentes podemos preencher um tabuleiro de comprimento n usando apenas quadrados 1×1 e dominós 1×2 ?	
2. De quantas formas podemos montar um tabuleiro de comprimento n utilizando um quadrado amarelo 1×1 , um quadrado cinza 1×1 e um dominó 1×2 ?	
3. De quantas maneiras podemos preencher um tabuleiro de comprimento n utilizando três quadrados 1×1 , um amarelo, um prata e um bronze, e um dominó 1×2 ?	

Fonte: Elaboração da autora.

É planejado um momento inicial destinado à explicação preliminar da construção realizada no GeoGebra. Nesse primeiro contato, serão apresentados aos participantes os conceitos fundamentais como célula, tabuleiro, ladrilhos e ladrilhamento, de modo a prepará-los para a exploração posterior. Na primeira situação, são disponibilizados aos participantes dois tipos de ladrilhos: um quadrado de dimensão 1×1 , de cor amarela, e um retângulo do tipo dominó de dimensão 1×2 . A tarefa consiste em ladrilhar o tabuleiro, explorando todas as configurações possíveis para diferentes valores de $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

No âmbito da análise *a priori*, prevê-se que, ao manipularem o ladrilhamento no GeoGebra, os participantes iniciem com estratégias de tentativa e erro e contagem direta das

disposições possíveis. Progressivamente, espera-se que percebam a existência de um padrão recursivo, identificando intuitivamente a relação entre os valores obtidos para diferentes dimensões do tabuleiro, aproximando-se da sequência de Fibonacci, ainda que sem formalização inicial.

Na segunda situação, acrescenta-se um novo ladrilho quadrado de dimensão 1×1 , distinguido por uma cor diferente. Essa modificação altera as possibilidades de composição do ladrilhamento, ampliando o número de configurações possíveis. Prevê-se que os participantes reconheçam a necessidade de reorganizar suas estratégias, passando de uma contagem empírica para tentativas de sistematização das regularidades observadas, identificando uma nova relação de recorrência.

Na terceira situação, incorpora-se um terceiro ladrilho quadrado de dimensão 1×1 , novamente diferenciado por cor, o que intensifica a complexidade do problema. Espera-se que, a partir da comparação entre as três construções, os participantes identifiquem que cada configuração de ladrilhos está associada a uma sequência específica, reconhecendo a existência de diferentes recorrências e estabelecendo relações entre elas.

Ao final das manipulações, os alunos serão conduzidos a formular uma generalização das recorrências observadas, articulando-as para chegar à expressão que caracteriza os números metálicos. Espera-se também que percebam que o limite da razão entre termos sucessivos dessas sequências converge para cada um dos números metálicos associados. Aliado a isso, almeja-se que os participantes compreendam que as sequências metálicas compartilham uma estrutura geral de recorrência e que suas razões-limite geram valores específicos denominados números metálicos.

No que se refere à fase de institucionalização, prevê-se que, após as etapas de ação, formulação e validação, o professor intervenha sistematizando os conhecimentos produzidos pelos participantes ao longo das três situações. Espera-se que, a partir das regularidades identificadas nos diferentes ladrilhamentos, sejam formalizadas as relações de recorrência associadas a cada configuração, bem como explicitadas as sequências numéricas emergentes. Nesse momento, a sequência de Fibonacci pode ser retomada como caso particular, sendo então ampliada para a compreensão das sequências associadas aos números metálicos.

Antecipa-se que o professor introduza a definição dos números metálicos como soluções positivas de equações do tipo $x^2 - px - q = 0$, relacionando cada configuração de ladrilhamento às respectivas recorrências e às razões entre termos consecutivos das sequências obtidas. Essa intervenção tem como finalidade atribuir estatuto matemático às construções dos participantes, articulando as representações geométricas exploradas no ambiente digital com sua formalização algébrica.

O ambiente do GeoGebra é concebido como meio didático que reage às ações dos participantes, permitindo validar ou refutar estratégias e favorecendo a formulação de conjecturas. Como dificuldade prevista, destaca-se a transição da identificação empírica das regularidades para sua expressão em termos algébricos, especialmente no reconhecimento das relações de recorrência que caracterizam cada sequência.

Assim como propõe a TSD, buscou-se criar um *milieu* que permitisse ao professor em formação mobilizar diferentes estratégias heurísticas e, ao mesmo tempo, organizar formalmente os elementos que constituem o modelo matemático subjacente aos números metálicos.

3.3 Experimentação

A fase de experimentação constituiu o momento de aplicação das situações didáticas previamente elaboradas na análise *a priori*. Essa etapa teve como objetivo observar, em condições reais de interação, como os participantes mobilizavam estratégias heurísticas, articulavam propriedades das sequências e estruturavam o modelo matemático subjacente às tarefas.

A experimentação foi realizada com dois participantes, professores da rede estadual de ensino, ao longo de quatro aulas desenvolvidas em uma sala de aula do IFCE – Campus Fortaleza. Ambos participaram de forma voluntária e foram previamente informados sobre os objetivos e procedimentos da pesquisa.

No primeiro momento, foi apresentado aos participantes o tabuleiro digital construído no GeoGebra, esclarecendo-se os elementos essenciais da interface, como o conceito de célula, a estrutura do tabuleiro e as possibilidades de manipulação das peças. Em seguida, foram fornecidas as orientações gerais das tarefas, e os sujeitos iniciaram a exploração das situações propostas. Durante toda a aplicação, a pesquisadora atuou apenas como observadora, registrando as ações e estratégias dos participantes por meio de anotações, capturas de tela e gravações realizadas com o auxílio de um *smartphone*, conforme previsto para esta etapa da Engenharia Didática.

Essa fase da ED seguiu as condições estabelecidas na análise *a priori*, orientando a coleta e a organização dos dados. Segundo Almouloud (2007), os métodos de coleta devem ser claros e coerentes com os objetivos da investigação. Assim, a avaliação considerou não apenas os resultados de cada situação, mas também os processos desenvolvidos pelos participantes: a formulação de conjecturas, as estratégias de validação, a identificação das recorrências e a interpretação das relações algébricas e geométricas presentes nos ladrilhamentos.

4 Resultados: Análise *a posteriori* e validação

Para preservar a identidade dos participantes, os sujeitos foram identificados como P1 e P2 ao longo da análise. No início da atividade, os participantes foram convidados a realizar uma exploração livre do tabuleiro digital, manipulando suas configurações, observando padrões e levantando hipóteses sobre possíveis regularidades numéricas.

Observa-se, nesse momento inicial, a predominância de estratégias exploratórias, nas quais os participantes interagem com o ambiente sem recorrer, inicialmente, a procedimentos sistemáticos. Ao explorar as possibilidades de preenchimento do tabuleiro, o sujeito P1 afirma: “*Eu posso preencher todos eles com o quadrado amarelo, né?*”. Essa fala evidencia uma primeira estratégia baseada em um caso trivial, indicando uma abordagem ainda restrita à experimentação direta.

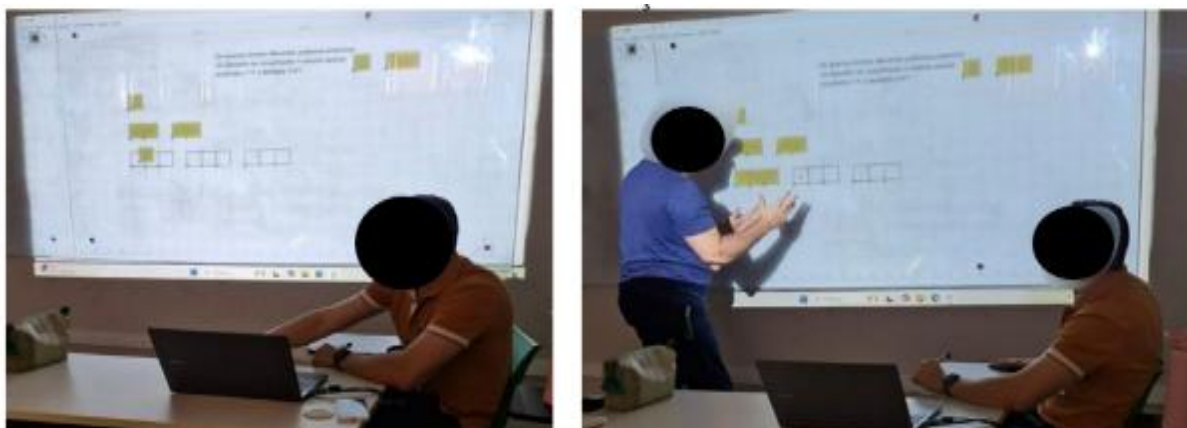
Em seguida, ao afirmar “*Espera, deixa eu pensar as outras maneiras*”, P1 sinaliza um deslocamento de uma ação puramente exploratória para uma tentativa de ampliação do espaço de soluções, sugerindo o início de um processo de organização do pensamento. Entretanto, é a intervenção de P2 que promove uma mudança mais significativa na compreensão da tarefa. Ao explicitar: “*tu tem que entender que temos essas duas peças disponíveis [...] e dizer de quantas maneiras consegues combinar*”, P2 introduz uma leitura mais estruturada do problema, destacando a necessidade de considerar a totalidade das combinações possíveis.

Essa intervenção pode ser interpretada, à luz da TSD, em relação ao contrato didático instituído na situação, no qual se pressupõe que os participantes devem mobilizar estratégias para compreender o problema e identificar todas as possibilidades de combinação das peças. A

fala de P2, ao explicitar as regras da tarefa e os critérios envolvidos, evidencia a apropriação dessas expectativas didáticas, tornando mais explícitas as condições da situação e contribuindo para a reorganização da atividade de P1. Como resposta, P1 afirma: “*Eu entendi, agora estou começando a entender melhor*”, indicando uma reconfiguração de sua compreensão da tarefa.

A imagem apresentada ilustra dois momentos distintos dessa interação. No primeiro, observa-se o sujeito P1 manipulando o tabuleiro e explorando possibilidades de preenchimento, caracterizando a fase de ação, na qual o conhecimento ainda não está explicitado, mas emerge da interação com o *milieu*. No segundo momento, a intervenção de P2 favorece a explicitação das ideias, marcando a passagem para a fase de formulação.

Figura 1: Interação inicial entre os participantes P1 e P2 no momento de ação e formulação



Fonte: Dados da pesquisa.

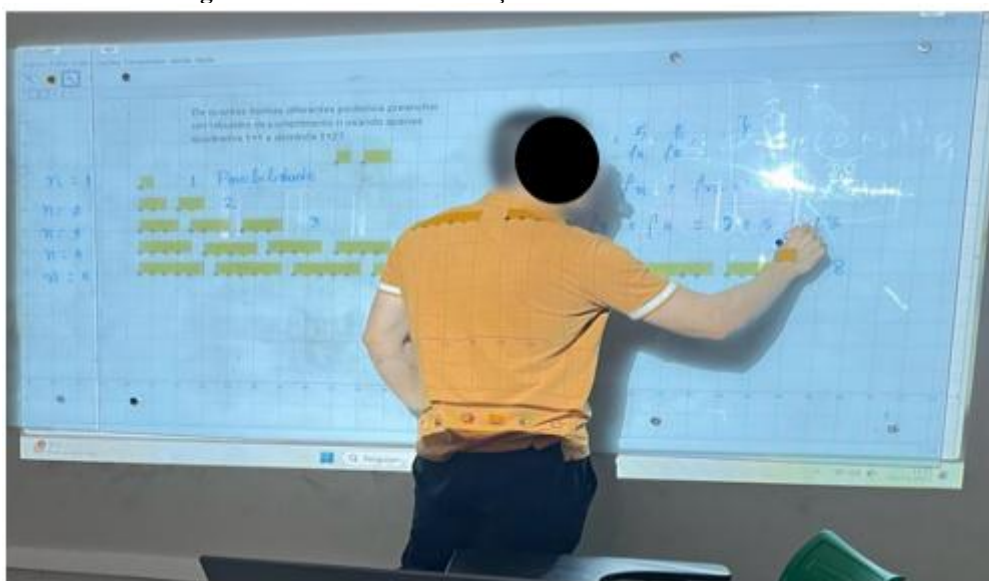
Esse movimento de transição entre ação e formulação evidencia o papel do ambiente digital como *milieu*, uma vez que as interações com o GeoGebra, associadas às trocas entre os participantes, possibilitam a construção progressiva de significados.

Após concluírem os ladrilhamentos para $n = 1, 2, 3$ e 4, os participantes começaram a identificar padrões emergentes. P2 rapidamente associou os valores obtidos aos termos da sequência de Fibonacci, iniciando um diálogo com o colega. O sujeito P1 observou que “*os números gerados pelos ladrilhamentos são iguais aos da sequência de Fibonacci*”, ao que P2 confirmou. A partir disso, P1 inferiu que seria possível determinar a quantidade de ladrilhamentos para $n = 5$ sem realizar toda a construção, utilizando a lei de recorrência. P2 reforçou essa percepção, destacando que “*a soma dos termos anteriores gera o próximo valor da sequência*”. Em seguida, P1 expressou a relação recorrente como $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, e P2 complementou afirmando que “*a forma equivalente $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ também poderia ser usada*”.

Esse momento evidencia uma mudança significativa na forma de abordagem do problema, na medida em que os participantes deixam de depender da enumeração direta e passam a operar com uma generalização, utilizando uma relação recorrente para antecipar resultados. Tal movimento indica a consolidação de um raciocínio estruturado, no qual os casos particulares passam a ser organizados por meio de uma regra.

A imagem a seguir registra esse momento, que se caracteriza como a validação da primeira etapa da sequência didática.

Figura 2: Momento de validação: discussão sobre a lei de recorrência



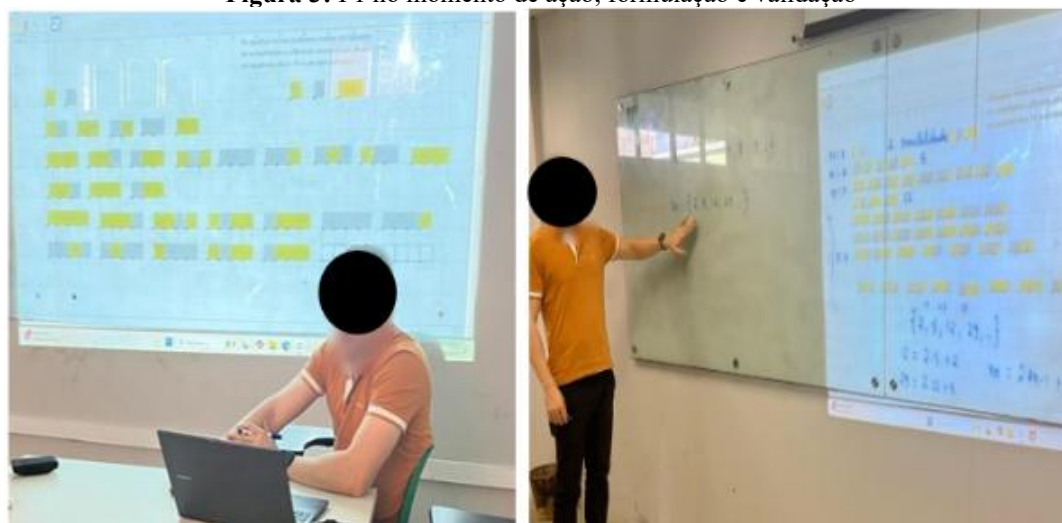
Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, inicia-se a segunda construção, agora composta por dois quadrados 1×1 de cores distintas e um dominó 1×2 . Observou-se que P1 permaneceu concentrado na manipulação direta do *software*, enquanto P2 adotou uma postura mais orientadora, acompanhando a atividade e sugerindo estratégias para o ladrilhamento. Mesmo após a orientação de P2 para esgotar todas as possibilidades de forma ordenada, P1 procedeu de maneira intuitiva e acabou se perdendo na contagem das configurações quando $n = 3$. Nesse momento, P1 comentou: *"tu precisa seguir um pensamento linear, senão fica confuso entender o processo depois."* Diante disso, P2 concordou e respondeu: *"Verdade, vamos refazer então"*.

Essa situação evidencia uma dificuldade na organização das estratégias de contagem, indicando que a ampliação das possibilidades combinatórias exige um nível maior de sistematização. Ao reconhecer a necessidade de um "pensamento linear", P1 explicita um obstáculo relacionado à organização do raciocínio, o que leva à retomada da atividade sob uma nova perspectiva.

A figura 3 tem-se o momento de ação formulação e validação.

Figura 3: P1 no momento de ação formulação e validação



Fonte: Dados da pesquisa.

Após ladrilhar o $n = 4$, os participantes começaram a discutir sobre a recorrência que estaria gerando os termos. P1 comentou *“aqui a quantidade cresce mais rápido que a outra.”* Em seguida, P2 acrescentou *“e lembra a sequência de Pell, mas eu não lembro mais como era a recorrência”*. No início dessa etapa, P1 tentou identificar o padrão da sequência por meio de diferentes estratégias. Primeiro buscou somar os termos anteriores, e em seguida tentou multiplicar cada termo por seu antecessor, na tentativa de encontrar uma regra que explicasse o crescimento.

Durante a análise da segunda construção, P2 avançou na identificação do padrão numérico associado ao ladrilhamento. Ao observar o crescimento da sequência, ele comentou: *“Aqui cada novo termo é como duas vezes o anterior somado com o que veio antes dele.”* A partir dessa percepção, P1 formulou a recorrência $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Essa relação passou a orientar a compreensão da estrutura da sequência gerada na segunda situação.

Na terceira construção, P2 assumiu a manipulação direta do tabuleiro no GeoGebra, enquanto P1 o auxiliava na organização das ideias. Durante esse processo, P2 explicou detalhadamente sua estratégia de enumeração das possibilidades, afirmando: *“veja bem, minha estratégia aqui foi essa: eu tenho essas três peças que são quadrados, né? Então, para $n = 3$, eu comecei assim: três ouros. Ai a próxima eu vou usar dois ouros e uma das outras peças dos quadrados. Primeiro faço com dois ouros e uma prata: fica uma prata no final, depois no meio e depois no início. Depois eu vou com dois ouros e um bronze, sigo a mesma estratégia. Veja que essa aqui pra bronze é igual à que fiz com prata, tá vendo? Se para a combinação com ouro eu tenho 7 possibilidades, então vou ter 7 para o quadrado prata e 7 para o quadrado bronze.”*

Na sequência, ele passou a considerar a peça 1×2 : *“agora eu vou usar o dominó. Vou combinar o ouro com o dominó: eu tenho um ouro e um dominó, e um dominó e um ouro. São duas possibilidades. Então também vou ter a mesma estratégia para prata e dominó e para bronze e dominó. Então já são mais 6 possibilidades.”*

Por fim, P2 analisou as combinações entre os três quadrados: *“agora eu vou combinar os três quadrados entre si: ouro, prata e bronze. Para combinar, uma possibilidade é uma de cada: ouro–prata–bronze, depois ouro–bronze–prata. Ai, começando com prata, eu tenho prata–ouro–bronze, prata–bronze–ouro. E começando com bronze, tenho bronze–ouro–prata e bronze–prata–ouro.”*

Nesse momento, P1 reconheceu a clareza do raciocínio adotado pelo colega, afirmando: *“nossa, que legal, o que tava me deixando confuso era que eu não seguia um padrão lógico”*. Além da explicação verbal, P2 também organizou as peças no próprio tabuleiro digital, agrupando-as visualmente para facilitar a compreensão de P1. A articulação entre representação visual e organização das ideias contribui para a consolidação das estratégias adotadas. A Figura 4 apresenta esse momento, que se configura como um episódio representativo da explicação de P2.

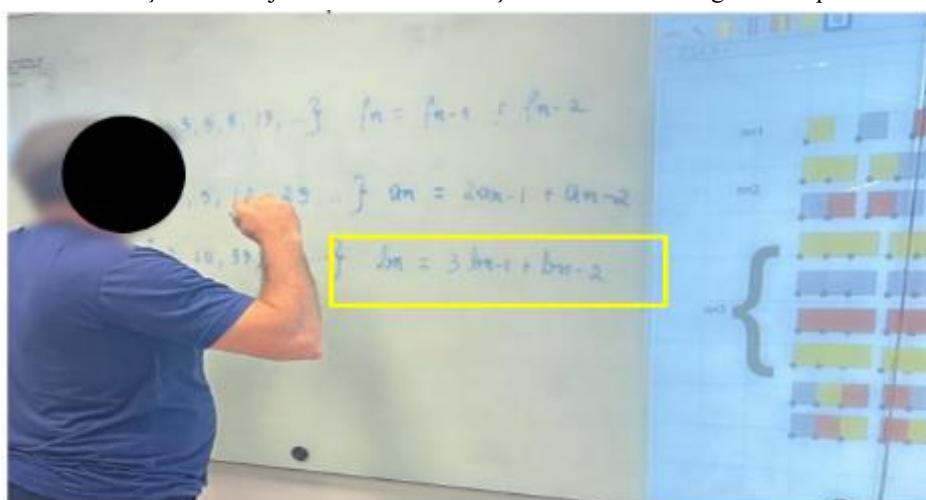
Figura 4: Estratégia combinatória elaborada por P2 durante a terceira construção



Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida P2 valida suas ideias e destaca a sequência formada, a recorrência da sequência e sua associação com a sequência de Bronze, conforme figura 5:

Figura 5: Registro da validação das conjecturas e da formulação da recorrência ligada à sequência de Bronze



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a manipulação das três construções com diferentes combinações de ladrilhos, a pesquisadora retomou a discussão propondo questionamentos sobre os padrões observados nas recorrências geradas. A análise coletiva permitiu identificar que, embora as sequências fossem distintas, todas obedeciam a uma estrutura semelhante, variando apenas o coeficiente que multiplicava o termo anterior. Diante disso, os participantes passaram a refletir sobre a possibilidade de estabelecer uma recorrência geral, considerando k como uma constante associada à quantidade de quadrados utilizados na construção.

Essa percepção indica um avanço para um nível mais geral de compreensão, no qual os participantes deixam de analisar casos isolados e passam a reconhecer uma estrutura comum subjacente às diferentes situações.

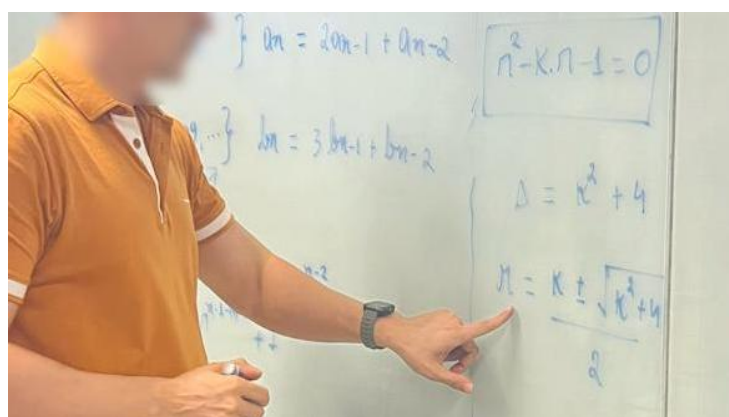
Nesse momento, P2 observou: “Se a gente generalizar essa recorrência com uma constante, podemos associar a outra sequência e a outras possibilidades de ladrilhar o tabuleiro com mais peças.” A fala sinalizou a compreensão de que o modelo poderia extrapolar

os casos particulares já estudados.

Ao examinarem os valores obtidos nos diferentes ladrilhamentos, os participantes perceberam ainda que as sequências apresentavam um crescimento progressivamente mais acelerado conforme o valor de k aumentava. Essa constatação motivou a investigação da razão entre termos consecutivos, na tentativa de compreender de que modo o número de configurações crescia à medida que o tabuleiro se ampliava. P1 comentou que essa divisão “parecia se aproximar de um mesmo número”, sugerindo que poderia haver uma taxa de crescimento associada à recorrência geral.

Tomando essa ideia como ponto de partida, P1 passou a explorar algebricamente a recorrência generalizada, investigando o que ocorreria caso essa razão pudesse ser representada por um valor fixo. O desenvolvimento desse raciocínio conduziu à obtenção de uma equação de segundo grau, registrada na Figura 6.

Figura 6: Momento de generalização feita por P1



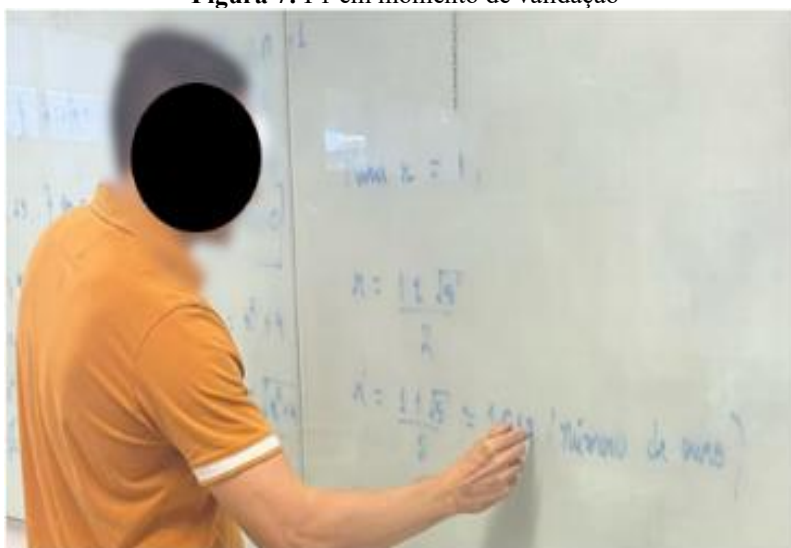
Fonte: Dados da pesquisa.

A expressão encontrada indicava que o número associado ao crescimento da sequência deveria satisfazer uma equação da forma $r^2 - kr - 1 = 0$. Esse resultado evidencia a transição do raciocínio empírico para uma modelagem algébrica, na qual a regularidade observada passa a ser expressa por meio de uma relação formal.

A partir desse resultado, a pesquisadora assumiu o momento de institucionalização, apresentando formalmente o conceito de números metálicos e explicitando sua relação com as sequências recorrentes construídas ao longo da atividade. Nesse momento, destacou que a equação obtida pelos participantes corresponde exatamente à equação característica da recorrência que define os números metálicos.

Em seguida, apresentou a definição formal, explicitando que, para cada inteiro k , a sequência associada é determinada por uma recorrência homogênea de segunda ordem com coeficiente k , e que a equação característica correspondente coincide com aquela deduzida durante a exploração do tabuleiro. A pesquisadora então solicitou que os participantes determinassem as raízes dessa equação, aprofundando a análise do significado matemático do resultado obtido, conforme a figura.

Figura 7: P1 em momento de validação



Fonte: Dados da pesquisa.

P1 determinou $k = 1$ e obteve o conhecido número de ouro, que está diretamente relacionado à sequência de Fibonacci. A pesquisadora conclui afirmando que a razão áurea corresponde ao limite da razão entre termos consecutivos dessa sequência. Ela destaca ainda que, de maneira análoga, os demais números metálicos também são definidos pelo limite das razões de suas respectivas sequências recorrentes, como ocorre com a razão de prata, associada à sequência de Pell, e com o número de bronze, associado à sequência de Bronze e assim também para as demais que não foram trabalhadas na aplicação.

Nesse momento, a pesquisadora assumiu a etapa de institucionalização, sistematizando o conhecimento produzido e apresentando formalmente o conceito de números metálicos. Explicou que, para cada inteiro positivo k , o número metálico de ordem k é definido como a raiz positiva da equação $x^2 - kx - 1 = 0$, isto é, $\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$.

Destacou ainda que essa equação coincide exatamente com aquela obtida pelos participantes a partir da generalização da recorrência construída nos ladrilhamentos. Ao explicitar essa correspondência, evidenciou-se que o conceito de número metálico não foi introduzido como um elemento externo ao processo investigativo, mas emergiu como formalização do padrão estrutural identificado na atividade, consolidando a articulação entre o modelo combinatório e sua expressão algébrica.

Considerações Finais

Os resultados obtidos neste estudo evidenciam que a abordagem proposta constitui uma alternativa didática viável para ampliar o tratamento das sequências numéricas nos cursos de formação docente, superando a centralidade quase exclusiva da sequência de Fibonacci. Ao tomar os números metálicos como foco estruturante e integrá-los a um tabuleiro digital elaborado no GeoGebra, foi possível demonstrar que a articulação entre exploração visual, experimentação dinâmica e formalização algébrica favorece a compreensão estrutural das sequências recorrentes, em consonância com o objetivo proposto.

A modelização fundamentada na Teoria das Situações Didáticas permitiu organizar um ambiente de aprendizagem que, nos dados analisados, favoreceu a atuação investigativa dos participantes, evidenciada na formulação, validação e generalização das relações de recorrência construídas ao longo das atividades. As etapas da Engenharia Didática mostraram-se adequadas

ao evidenciar a coerência entre as escolhas didáticas, a experimentação e a análise dos resultados, possibilitando a validação interna da proposta.

A experimentação com dois professores da rede estadual indicou a viabilidade pedagógica da atividade, ao promover conexões entre representações geométricas e expressões algébricas e favorecer a passagem da manipulação à generalização, aspecto central da proposta. Como contribuição para a Educação Matemática, o estudo evidencia possibilidades de articulação entre abordagens investigativas, recursos digitais e formalização algébrica no ensino de sequências.

Como limitação, destaca-se o número reduzido de participantes, o que restringe a generalização dos resultados, além de aspectos operacionais do material, como a necessidade de aprimoramento na distinção visual das peças utilizadas no GeoGebra.

Em síntese, os resultados indicam que o objetivo foi alcançado ao evidenciar que a proposta favorece uma transição gradual entre a manipulação e a formalização, permitindo que os participantes construam e generalizem relações associadas às sequências recorrentes e aos números metálicos. Para pesquisas futuras, pretende-se ampliar a aplicação da proposta com um número maior de participantes, bem como explorar novas configurações de ladrilhamento que possibilitem o aprofundamento das relações matemáticas envolvidas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio e suporte financeiro concedido no Brasil pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

Referências

- Abar, C. A. A. P. (2020). A transposição didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9(1), 59–75.
- Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR.
- Almouloud, S. A. & Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia didática: Características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPED. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(1), 62–77.
- Alves, F. R. V. (2012). História da matemática: Os números figurados 2D/3D. *Conexões, Ciência e Tecnologia*, 6(2), 1–20.
- Alves, F. R. V. (2016). Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): O caso das equações diferenciais de segunda ordem. *ENCITEC*, 6(2), 1–22.
- Alves, F. R. V. (2017). Fórmula de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: Demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci – SGF. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 17(33), 1–16.
- Alves, F. R. V. (2024). História da matemática e tecnologia: Visualização de sequências recorrentes, algumas propriedades e a noção de tabuleiro 2D/3D. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 13, 1–16.
- Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. C. (2022). Sequência de “Padovan ou Coordonner”. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 22(45), 1–23.
- Artigue, M. (1996). Engenharia didáctica. In J. Brun (Org.), *Didáctica das matemáticas* (M. J. Figueiredo, Trad., pp. 193–217). Instituto Piaget.

- Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2006). *Math made visual: Creating images for understanding mathematics*. Mathematical Association of America.
- Benjamin, A. T. & Quinn, J. J. (2003). The Fibonacci numbers—Exposed more discretely. *Mathematics Magazine*, 76(3), 182–192.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: Conteúdos e métodos de ensino*. Ática.
- Dresden, G. & Tulsikh, M. (2021). Tiling a $2n$ board with dominos and L-shaped trominoes. *Journal of Integer Sequences*, 24(2), 1–15.
- Grimaldi, R. P. (2012). *Fibonacci and Catalan numbers*. John Wiley & Sons.
- Gullberg, J. (1997). *Mathematics: From the birth of numbers*. W. W. Norton.
- Heubach, S., Chinn, P. & Callahan, P. (2005). Tiling with trominoes. *Congressus Numerantium*, 177, 33–44.
- Krantz, S. G. (2006). *An episodic history of mathematics: Mathematical culture through problem solving*. Mathematical Association of America.
- Mangueira, M. C. S. & Alves, F. R. V. (2020). Números híbridos de Fibonacci e Pell. *Revista Thema*, 17(3), 831–842.
- Martin, G. E. (1996). *Polyominoes: A guide to puzzles and problems in tiling*. Mathematical Association of America.
- Moscovich, I. (2015). *Puzzle universe: The history of math in 315 puzzles*. Firefly Books.
- Soykan, Y. (2023). A study on generalized Blaise numbers. *Asian Journal of Advanced Research and Reports*, 17(1), 32–53.
- Spinadel, V. W. de. (1995). *La familia de números metálicos*. Universidad de Buenos Aires. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2469987.pdf>
- Stakhov, A. (2009). *The mathematics of harmony: From Euclid to contemporary mathematics and computer science*. World Scientific.
- Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history*. Springer.
- Tedford, S. J. (2019). Combinatorial identities for the Padovan numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 57(4), 291–298.
- Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. (2022). A combinatorial approach to the numbers of Padovan generalized. *Axioms*, 11, 1–16.
- Vieira, R. P. M. (2020). *Engenharia didática (ED): O caso da generalização e complexificação da sequência de Coordonier ou Padovan* [Dissertação de mestrado, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará].