CÁLCULO INFINITESIMAL: PASSADO OU FUTURO?

Roberto Ribeiro Baldino

RESUMO

Qual a relação do curso de cálculo com o curso de análise? Em que medida um curso de cálculo deve ou pode ser um curso de análise? Que papel desempenha o conceito de limite num primeiro curso de cálculo? Essas questões são sempre atuais. Para discuti-las, tomarei como ponto de partida a segunda edição de (Swokowski, 1995). Escolho este porque é atual e é um bom livro, portanto sua estrutura é essencialmente a mesma de todos os outros livros de cálculo encontrados nas livrarias. Mostrarei que essa estrutura gera dificuldades para os alunos, principalmente no conceito de integral. Discutirei essas dificuldades a partir de um artigo intitulado *Uma mudança de ponto de vista sobre o ensino da integral* (CI2U, 1990). Argumentarei pela insuficiência das soluções oriundas desses dois autores, mostrarei como elas se originam na insistência de manter o conceito de limite como fundamento do cálculo e acenarei com o *cálculo infinitesimal* como sugestão de uma alternativa didática para a seqüência de disciplinas cálculo-análise. Discutirei as resistências que se opõem a um tal projeto e terminarei exemplificando os conceitos de derivada e integral pela via dos infinitésimos, sobre a mais simples das funções não triviais $f(x) = x^2$.

SWOKOWSKI, 2ª EDIÇÃO: UM NOVO LIVRO

Graças à Editora Makron Books do Brasil podemos contar, a partir deste ano, com a tradução da quinta edição do livro de cálculo de Swokowski (Swokowski, 1995). A tradução que foi denominada 2ª edição, na verdade é um livro novo, muito melhor que o antigo. Transparece que a nova organização foi feita por quem experimentou o material em sala de aula e sabe bem em que pontos os alunos encontram dificuldades. Várias mudanças eram obviamente necessárias, como a postergação da fórmula de Taylor para o segundo volume, junto com séries de potências. Outras eram esperadas e são bem-vindas. Por exemplo, há muito se sabe que a dificuldade que os alunos encontram nos problemas de aplicações de derivadas, como problemas de taxas de variação e de máximos e mínimos, não está no cálculo das derivadas ou na determinação dos extremos. O que eles não conseguem é escrever

* Prof. da Pós Graduação em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro - SP

a fórmula da função a derivar! Por isso é louvável que vários problemas típicos, como os das caixas sem tampa, dos cilindros inscritos em cones etc., tenham sido antecipados para um capítulo inicial, denominado *Revisão pré-cálculo*. Esses problemas aparecem aí sob a demanda *escreva y em função de x*. Mais tarde, quando forem retomados no capítulo *Aplicações da derivada*, a principal dificuldade estará resolvida, porque o conceito de função estará melhor compreendido. Outro ponto positivo é a antecipação das funções trigonométricas para os capítulos iniciais. Embora continue-se a só poder contar com as funções exponenciais e logarítmicas e suas derivadas a partir do capítulo 7, o cálculo das derivadas de seno, co-seno e tangente foi antecipado para o capítulo 3. Com isso pode-se contar com essas funções nos exercícios de aplicações das derivadas e nos exercícios da regra da cadeia. De fato, era difícil ensinar a derivada da composta só com exemplos de funções algébricas, sem contar com os cavalos de batalha $\cos x^2$ e $\cos^2 x$.

Nesta nova edição muitos exemplos e exercícios foram acrescentados e as figuras foram substancialmente melhoradas. É possível que (Swokowski, 1995) venha a se constituir no livro da década entre nós. Exatamente por isso, tomá-lo-ei como ponto de partida para discutir questões que há muito rondam os cursos de cálculo e que podem ser colocadas, em primeira aproximação, assim: qual a relação do curso de cálculo com o curso de análise? Em que medida um curso de cálculo deve ou pode ser um curso de análise? Que alternativas temos para evitar o uso do conceito de limite em um primeiro curso de cálculo? Não vou levar em conta argumentos ridículos, do tipo "sempre é bom": *Sempre é bom que o aluno veja épsilons e deltas, para depois quando precisar, lembrar de que já ouviu falar*. Vou começar descrevendo a estrutura de (Swokowski, 1995) que é essencialmente a mesma de todos os outros livros de cálculo. Mostrarei, em seguida, que dificuldades epistemológicas tal estrutura gera, principalmente no conceito de integral, e discutirei essas dificuldades a partir de um artigo de (CI2U, 1990) intitulado *Uma mudança de ponto de vista sobre o ensino da integral*. Argumentarei pela insuficiência das soluções oriundas desses dois autores, mostrarei como elas se originam na concepção histórica dos limites e números reais e acenarei com uma sugestão didática alternativa para as disciplinas de cálculo de análise.

AS DIFICULDADES COM A INTEGRAL

(Swokowski, 1995) começa com um capítulo de revisão do segundo grau. O capítulo 2 contém um estudo bastante desenvolvido de limites, incluindo a definição por épsilons e deltas, exemplos de existência e provas de não existência, casos finitos e infinitos, assíntotas horizontais e verticais, descontinuidades de primeira e segunda espécie, como $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. No capítulo 3, a derivada é apresentada como limite da razão incremental, o capítulo 4 entra em aplicações da derivada e o capítulo 5 devota considerável espaço à teoria da integração. Em 5.1 e 5.2 apresenta-se a integral indefinida, com a mudança de variável. Em 5.3 e 5.4 apresenta-se, respectivamente, a área e a integral como limites de somas de Riemann, exemplificando com o cálculo de áreas conhecidas, do trapézio e do círculo. Em 5.5 estão as propriedades óbvias da integral, em 5.6 os teoremas fundamentais do cálculo e em 5.7 a regra de Simpson. O capítulo 7 é devotado a aplicações da integral. O 8° capítulo estuda as funções logarítmicas e exponenciais, o 9° exercita técnicas de integração e o 10° ensina finalmente a regra de L'Ôpital e integrais impróprias.

À medida em que é aproximadamente esta a estrutura de qualquer livro de cálculo que se encontre nas livrarias, os comentários que farei tomando (Swokowski, 1995) como ponto de partida se aplicam a todos os outros. Adotemos o ponto de vista de um leitor que não esteja submetido ao uso do livro em sala de aula e que, pelo contrário, esteja curioso para saber como os conceitos de derivada e integral se aplicam às funções.

Este leitor pode pensar na mais simples das funções não triviais, $f(x) = x^2$, sobre a qual tudo fica transparente, e percorrer (Swokowski, 1995) visando a esclarecer os conceitos a partir de sua aplicação à parábola. Examinando o texto, notará que os papéis dessa função nos capítulos da derivada e da integral são muito diferentes. No capítulo 3, x^2 é apresentada como o primeiro exemplo, esclarecedor do limite da razão incremental, logo após a definição de derivada (ib. pág. 116). Em contraposição, no capítulo 5, a parábola $(16-x^2)$ aparece pela primeira vez como o sexto exemplo de cálculo de áreas por somas de Riemann, enquanto o primeiro exemplo de cálculo de área usando o teorema fundamental do cálculo não é x^2 mas, sim, $6x^2-5$ (ib. pág. 364). Conclui-se que a função x^2 não é invocada para esclarecer o conceito de integral. Pelo contrário, ela o obscurece, à medida em que a área da parábola é calculada pela fórmula da soma dos quadrados dos naturais, demonstrada por indução no apêndice. O leitor fica inevitavelmente se perguntando de que cartola saiu essa fórmula. Preocupado dom ela, desvia sua atenção da relação dela com a integral.

Outro sintoma de que as coisas não vão tão bem com a integral quanto com a derivada é que a notação $\int f(x)dx$ para a primitiva de uma função que (Swokowski, 1995) coloca no início do capítulo sobre integração, fica totalmente misteriosa. Por que denotar antiderivadas assim e não, por exemplo, por $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$? A mudança de variáveis apresentada em 5.2, não explora a força dessa notação e aparece como um ritual burocrático com dx e du (Swokowski, 1995, p. 319):

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

$$Se\ u = g(x)\ \ e\ \ du = g'(x)dx, \text{ entao}$$

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Por que não optar por

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int d(F(g(x))) = F(g(x)) + C$$

com cancelamento dos símbolos $\int$ e d ? Seria esse um atrevimento que o autor quer evitar?

Um terceiro sintoma de dificuldades é a ambigüidade do estatuto epistemológico da integral. Na definição (Swokowski, 1995, p.343) o autor escreve (negritos dele e grifos meus):

"A afirmação $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(w_k)\Delta x_k = L$ significa que, para todo e (...)"

No entanto, logo abaixo lê-se: "O número L *é um* **limite de somas de Riemann**". Nesta mesma página há mais três ocorrências da expressão "se o limite existe". Ora, antes de mais nada, não se trata, aqui, do limite de uma função: a cada valor de $\|P\|$ não corresponde um e um só valor da soma. Não é o mesmo conceito de limite que o leitor terá visto no capítulo 2, *Limites de funções*. Dizer que "o número L é um limite (...)" dá margem a que se entenda que se trata de demonstrar a igualdade entre duas grandezas e não de definir um significante pelo outro. A ênfase no "significa que" não é suficiente para instituir a definição como princípio e impor que "limite" signifique o processo ε–δ aí descrito, e não o processo ε–δ da definição anterior de limite de função. Só quando o leitor tiver o conceito de *filtro* poderá ver que aquele é um caso particular deste.

Mais uma dificuldade com a integral: no prefácio (Swokowski, 1995) declara que, "*quase todos os exemplos sobre aplicações de integrais definidas foram refeitos, de modo a substituir limites formais de normas por um método mais intuitivo, utilizando diferenciais*". De fato, a figura 6.7, por exemplo, (ib. p. 392) modifica a figura 6.6 de (Swokowski, 1983 p. 275) e introduz *dx* como *largura do retângulo*, visando a obter a fórmula da área sem escrever a soma de Riemann nem o limite. Entretanto, o leitor é deixado a meditar o que dx, enquanto *"largura de um retângulo"*, tem a ver com a *"diferencial dx da variável independente"* definida na página 162 da nova edição.

Em resumo, a estrutura de (Swokowski, 1995) bem como de todos os outros livros de cálculo vendáveis, constrói-se sobre uma pedra fundamental, o conceito de limite, que é usado para fundamentar os dois conceitos básicos de derivada e integral. Como vimos, essa diretriz de *produção de significados no campo semântico dos limites* gera problemas epistemológicos que se traduzem em dificuldades para os alunos. Esforços para evitar algumas, fazem aparecer outras, como um mosaico que não se encaixa. A insistência em antecipar e trivializar o conceito de limite é tal que ele parece mais importante que os conceitos de derivada e integral que nele se fundam. É inevitável lembrar os trabalhos de Arquimedes, onde exemplificar exaustivamente *o método de exaustão* parece mais importante que obter o resultado. Apesar de ser exagero dizer que (Swokowski, 1995) e os livros vendáveis de cálculo precisam de derivadas e integrais para terem onde investir o conceito de limite, fica-se com a impressão final de que eles tentam cobrir um cadáver com um lençol muito curto. Não é de admirar que, para os alunos, tal como no tempo de Leibniz, o cálculo ainda seja uma questão de fé.

PESQUISA EM UM IREM

As dificuldades dos estudantes com a teoria da integração têm sido notadas e estudadas pela escola francesa de Educação Matemática. *"Só duas aquisições menores e totalmente redutoras parecem resistir ao desgaste do tempo: na Matemática, o cálculo de primitivas e em Física um formalismo cômodo de equacionamento"* (CI2U, 1990, p. 210). De fato, a maioria dos alunos que passam por cursos de cálculo, lembram que a integral é um limite de somas e que a área da parábola é obtida pela variação da primitiva $x^3/3$, mas não conseguem explicar o que uma coisa tem a ver com a outra. Quando se lhes pede para calcular a derivada de $\int_a^x \sqrt[4]{t^2+1}\,dt$, a maioria deles, primeiro, se empenha em longos esforços para calcular uma primitiva. Isso mostra que reduziram o conceito ao algoritmo.

Sobre o procedimento de equacionamento dos problemas de Física, o autor diz que "não fornece ao estudante paradigmas que facilitariam a emergência do conceito (de integral), porque os 'equacionamentos integrais' são apresentados, na maioria das vezes, de modo formal e totalmente 'naturalista' ". Citarei o longo argumento para dele fazer uso posterior. (Os grifos são meus.) "Para calcular um resultado R representando, por exemplo uma grandeza associada a um objeto, (esses equacionamentos) propõem avaliar a quantidade $\sum dR$ correspondente a uma parcelização deste objeto em pequenos pedaços. Escolhem, então, uma parametrização x. Situam-se, então, em um ponto M(x), tomam um elemento $d\Omega$ "*infinitamente pequeno*" do objeto considerado, situado ao redor de M(x) e materializam sua medida por símbolos dl ou dS ou dV, etc. Depois, calculam a *contribuição* elementar ou *infinitesimal* dR = f(x) dx onde f(x) é uma fórmula que leva em conta a intensidade do fenômeno que produz o resultado e a escolha da parametrização x. Enfim, externam a intenção de calcular a soma das *contribuições infinitesimais* colocando diante do produto um dos símbolos integrais $\int$, $\iint$, $\iiint$, conforme o caso. Uma vez cumprido esse "ritual de integração", engajam-se na procura de uma primitiva; se conseguem achá-la, a matematização do problema é considerada como tendo sucesso total." (CI2U, 1990, p. 211).

O autor localiza o problema no conceito de função integrável e vai orientar a solução por aí. "Na prática, fazemos a hipótese didática que é, em grande parte, a impossibilidade de concretizar para os alunos este conceito de integrabilidade que arruina o ensino da teoria da integral (ib. p. 209). Segundo essa hipótese a solução proposta se exerce segundo duas diretrizes. A *diretriz didática* consiste em organizar o ensino segundo etapas ditadas pela análise epistemológica do procedimento de integração: *etapa de decomposição* (o problema global é aditivamente localizável), *etapa de enquadramento* (o problema admite por toda parte estimativas do tipo "produto simples") e *etapa de passagem ao limite* (o erro global do enquadramento desaparece por passagem ao limite" (ib. p. 217). O controle do erro o leva a enfrentar a questão da integrabilidade. Simultaneamente procura "resistir à facilidade pedagógica de abordar bastante cedo o cálculo das primitivas" (ib. p. 220), para evitar que o aluno "reduza o conceito (de integral) ao primeiro algoritmo de cálculo que se lhe ofereça" (ib. p.209), "avisando aos alunos que, nos exames, eles terão de manipular integrais de funções das quais eles não saberão necessariamente calcular as primitivas" (ib. p. 220).

Assim, a diretriz *didática* da solução de (CI2U, 1990) implica manter o conceito de limite como pedra fundamental da integral. Não difere, pois, da estratégia de (Swokowski, 1995) e dos livros de cálculo. A redução do conceito ao algoritmo parece inevitável à medida em que o conceito e o algoritmo não se correspondem: o conceito está no campo semântico discreto-numérico das somas de Riemann, o algoritmo pertence ao contínuo geométrico. Entre eles há o abismo epistemológico que a teoria dos limites tenta transpor.

Outra diretriz, de (CI2U, 1990) que denominarei *pedagógica*, consiste em favorecer que o aluno "*entre em uma certa problemática científica de modelização do real*". Em resumo, o ponto de vista de é o seguinte (itálicos do autor, grifos meus): "*Pensamos que, enquanto o estudante não entrar em uma certa problemática científica de modelização do real, de controle da adequação e da validade dos procedimentos empregados, o ensino de conceitos sofisticados, como este de integral só pode se apresentar a ele como uma espécie de mistificação; desde o começo ele vai muito provavelmente, reduzir o conceito ao primeiro algoritmo de cálculo que se lhe ofereça, porque apenas o cálculo terá alguma* *significação enquanto meio de ação*" (p. 209).

Para realizar a diretriz pedagógica de mergulhar o aluno na problemática científica de *controle de validade* dos procedimentos usados na matemática, (CI2U, 1990) propõe instituir o debate nos anfiteatros em torno de questões matemáticas. O argumento é que a permanência do algoritmo e do processo de equacionamento resistem ao tempo porque sobre elas o aluno pôde agir cientificamente, enquanto a "aquisição deste conceito (de integral) corresponde, para os estudantes do ciclo básico a um salto epistemológico em sua apreensão do que seja um encaminhamento científico" (ib. p. 209). A aposta é que o debate científico em que o aluno fala nos anfiteatros lhe dará a oportunidade de "exercer suas iniciativa e suas competências anteriores sobre a parte conceitual (...) a tempo de não perder o sentido do conceito de integral ao usá-lo em outras disciplinas" (ib. p. 214). "O procedimento integral de partição, aditividade, majoração, minoração e passagem ao limite torna-se progressivamente, para o conjunto dos protagonistas do debate, o único procedimento racional que permite simultaneamente fazer cálculos matemáticos sem se descolar da realidade física" (ib. p.216). O exemplo de debate que o autor apresenta se refere ao cálculo da força de atração gravitacional entre uma barra retilínea e uma massa pontual situada sobre seu eixo.

A estratégia pedagógica adotada por (CI2U, 1990) se enquadra nas tentativas de *fazer o aluno falar*. (Lacan, 1973, p. 18). *Fazer o aluno falar* é uma prática louvável na qual a escola francesa de Educação Matemática está se iniciando. Certamente, suspender os malabarismos com o saber que os catedráticos europeus exibem nos enormes anfiteatros gelados, para escutar o aluno, é um procedimento político de louvável atrevimento, quase impensável em círculos matemáticos. Sabemos que "seria totalmente utópico acreditar que uma tal montagem didática vá deslanchar subitamente uma forte paixão científica nos anfiteatros" (ib. p. 220). Porém, com os vários anos de experiência que acumulamos tentando fazer o aluno falar, sabemos também que, nos anfiteatros, jamais falarão mais que uma parcela ínfima dos alunos e que, dependendo das circunstâncias, essa prática pode ser tão discriminatória quanto a aula expositiva dirigida apenas aos poucos que podem manter o diálogo como professor.

O risco de difundir o autoritarismo na tentativa de fazer o aluno falar é ainda maior quando se pensa, como em (CI2U, 1990), que "essa montagem didática" se destina ao "estudante que deseja compreender o que aprende" (p. 220, grifo meu). Com este tipo de pensamento, o fracasso da estratégia pedagógica é rapidamente lançado sobre o aluno que "não deseja compreender", ou, como é voz corrente em nosso meio, sobre o aluno que "não quer nada" (Baldino e Cabral, 1994). Além disso, leve-se em conta que não existe uma "problemática científica" universal: cada ciência tem a sua. Os estudantes de Física, por exemplo, por que deveriam eles entrar na problemática científica da matemática? Por que deveriam eles se preocupar com o controle matemático de bom termo dos procedimentos que usam se esse controle lhes é dado pela Física, não pela Matemática? Por que deveriam se preocupar se as funções com que estão trabalhando são "integráveis" se o exemplo mais imediato de uma função limitada não integrável à Riemann já lhes parece uma curiosidade patológica, sem sentido? E a massa de Dirac, que para eles é tão concreta e fundamental? No curso de cálculo ela sequer existe: funções descontínuas não têm derivadas.

À medida em que (CI2U, 1990) não apresenta resultados finais da pesquisa, ainda se pode dizer que "a experiência mostra que este conceito (de função integrável) permanece estranho, senão inacessível à maioria dos estudantes, que o percebem como uma "filigrana" de matemáticos e não o vêem, de modo algum, como fecho da abóbada, como a garantia de bom termo do novo procedimento no qual se iniciam" (ib. p. 209). Ora, se o aluno vê o conceito de integral como "mistificação de matemáticos", tal como afirma (ib. p. 209), não se deve esperar atitude mais benevolente em relação ao conceito de limite. Para apresentar este conceito (Swokowski, 1995) emprega um capítulo inteiro. Aqui também o conceito é violentamente reduzido ao algoritmo. O que fica dele após o curso de cálculo? É o cálculo do limite por substituição do valor na fórmula da função, quando ela é contínua, e a regra de L'Ôpital, quando aparece uma indeterminação. Este capítulo sobre limites de (Swokowski, 1995) é excelente para as primeiras semanas de um curso de análise após o ciclo básico mas seu valor para o curso de cálculo é, pelo menos, duvidoso.

CÁLCULO INFINITESIMAL, O FANTASMA DE UM ANTEPASSADO

Lamentando que as aplicações da integral nas ciências aplicadas não favoreçam o conceito de integral, (CI2U, 1990) empreende a crítica do procedimento integral descrito acima como "formal e totalmente 'naturalista'". É o seguinte o teor dessa crítica: o recurso aos "infinitamente pequenos" atribuído ao procedimento criticado, vigente nas ciências aplicadas, "deveria, normalmente, dar lugar a discussões sobre o sentido que se atribui ao d( ), porque a única *medida infinitamente pequena* no *modelo standard* é zero e não pode ser questão aqui de escrever que todas as *quantidades infinitesimais* são nulas, porque a soma seria, ela também, invariavelmente nula. Mas o contrato didático tácito é feito de tal modo que se constata que essas discussões, por assim dizer, jamais ocorrem. (...) Durante o ritual de integração, o "deslize simbólico do sinal $\sum$ ao sinal $\int$ tem o poder mágico de resolver todos os conflitos semânticos". (ib. p. 211, grifos meus).

A conseqüência desse procedimento sobre os alunos é que "eles não vêem, de jeito nenhum, em que direção devem procurar (ou, ao menos eles não suspeitam que o problema se situa, provavelmente, em nível da ordem de grandeza dos *infinitésimos desprezados*) para explicar o paradoxo seguinte: Se aplicarmos o procedimento de "dividir uma esfera ou cone em fatias finas e substituirmos o volume de cada um delas pelo volume de uma fatia do cilindro inscrito ou circunscrito (não importa) de mesma grossura" obtemos, por soma e passagem ao limite, as fórmulas clássicas do volume da esfera ou do cone (logo o método é bom!); se reaplicarmos exatamente a mesma técnica aos mesmos objetos, substituindo o volume pela superfície lateral, obteremos sabe-se lá o que (logo o método só é confiável quando é escolhido pelo professor)" (ib. 1990, p. 211, grifos meus).

A primeira observação a fazer é que não se encontra em (Swokowski, 1995) o menor vestígio da problemática dos *infinitésimos*. Lá o *dx* é "largura de um retângulo", que nada tem de infinitesimal, e é também a "diferencial da variável", $dx = \Delta x$. Um pouco de história esclarece a razão dessa ausência. O cálculo das tangentes e das áreas preocupou a humanidade desde a antigüidade, mas foi Pierre Fermat (1601-1665) quem primeiro compreendeu a relação entre esses dois problemas. Desde então os modelos iniciais de coeficiente angular da tangente (velocidade) e área (espaço percorrido) foram sendo submetidos a princípios de precisão de linguagem denominados *rigor matemático* e terminaram gerando os conceitos de derivada e integral como os conhecemos hoje. Em continuação ao trabalho de Fermat, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) enunciaram a relação entre tangentes e áreas sob formas nas quais hoje se reconhece *o teorema fundamental do cálculo* (Swokowski, 1995, p. 362). Esse teorema se resume dizendo que derivada e integral são operações inversas.

Desde que esse resultado fundamental foi afirmado, independentemente por Newton e por Leibniz, a matemática, ou pelo menos o cálculo, vem se constituindo pela luta entre justificações diferentes dessa crença: uma justificação no campo semântico contínuo-geométrico, centrada na noção de *infinitésimo*, e outra, no campo semântico discreto-numérico, centrada na noção de *limite*. No tempo de Leibniz eram os infinitésimos que predominavam. Foi Leibniz quem introduziu a notação para integral e derivada que prevalece até hoje: dx é um acréscimo infinitesimal a x do qual resulta um acréscimo infinitesimal, dy, a y. O quociente desses infinitésimos Leibniz pensava como a derivada de y e a integral era uma soma infinita dos dy. Faltava dizer o que se entendia por infinitésimos. Eram números? Não eram nulos, mas eram menores, em valor absoluto, que qualquer número positivo. E o que seria uma soma de um número infinito de parcelas?

Essas questões permaneceram aborrecendo os matemáticos desde Newton e Leibniz. O modo de produção da justificação, ou seja, o modo de produção do conhecimento, sempre foi o do embate entre pontos de vista opostos. A ciência esteve sempre submetida à dialética do sujeito e do outro cuja regra fundamental é esta: cada vez que um fala, arrisca-se a mostrar-se descosido perante o outro (Lacan, 1973). A tentativa constante de evitar a queda ao falar é denominada, ainda hoje, *rigor matemático*. Em fins do século passado a concepção discreta-numérica começou a levar vantagem no debate matemático, impulsionada por Agustin-Louis Cauchy (1789-1857) que trouxe o conceito de *limite* definitivamente para o primeiro plano, por Karl Weierstrass (1815-1897) que o formalizou, e por Richard Dedekind (1831-1916) que o fundou no conceito de *número real*. A partir de então as múltiplas realizações da matemática se devem ao conceito de número real, que garante a completeza da reta.

Os infinitésimos são expurgados sistematicamente da matemática do século XX. Há alguns anos, falar neles era sintoma de insuficiência conceitual. Entretanto, o conceito de número real, hoje, se revela tão desajeitado nas salas de aula quanto a teoria dos irracionais no tempo de Euclides e Eudoxo. Apesar de todos os esforços em contrário, os alunos continuam acreditando de 0,999... é menor que 1 e, quando respondem que é igual, o fazem porque sabem que esta é a norma culta, que é assim que se deve responder. No íntimo continuam acreditando que é menor e, quando justificam isso, o que nos dizem, no fundo, é que *falta um infinitésimo* para que 0,999... seja igual a 1. Leibnitz certamente não discordaria disso. Parece que os infinitésimos estão inscritos no "hardware biológico" do ser humano. A Física e, em particular, a disciplina intermediária entre ela e a Matemática que é a mecânica do contínuo, continuam a se pautar por conceitos infinitesimais. O cálculo diferencial e integral é um objeto de estudo que continua assombrado pelo fantasma de seu antepassado, *o cálculo infinitesimal*. É a problemática da exclusão dos infinitésimos que *causa seu desejo* (Lacan, 1973).

INFINITÉSIMOS COMO CONCEPÇÃO CLANDESTINA

Essa digressão histórica explica a ausência de referências a infinitésimos em (Swokowski, 1995) e explica, em parte, as dificuldades epistemológicas que essa obstinação provoca. Porém, como se explica que os infinitésimos reapareçam em (CI2U, 1990)? Trata-se de retrocesso ou avanço da Educação Matemática? Na década de 60 Abraham Robinson (1918-1974) fundamentou os infinitésimos rigorosamente, a partir das teorias dos conjuntos. Esse ramo da matemática é conhecido como *análise não-standard* e, em contraposição, a análise clássica é denominada *modelo standard*. Os números reais são parte dos *hiper-reais* que incluem infinitésimos e números infinitos. Com estes pode-se formalizar o que se entende por uma soma de *infinitas parcelas*, legitimando o modo pelo qual os alunos gostam de se referir às séries. A partir da análise não-standard, do ponto de vista matemático, tanto a teoria dos números reais com os conceitos de limite quanto a dos números *hiper-reais*, com os infinitésimos, ficam igualmente válidas.

Porém, em (CI2U, 1990) os infinitésimos comparecem com estatuto ambíguo. Primeiro são criticados, quando são usados nos procedimentos das ciências aplicadas, porque não são discutidos suficientemente: "claramente, o 'procedimento integral' tantas vezes utilizado com conhecimento de causa em ciências aplicadas, não é, para os estudantes, senão um formalismo de equacionamento de problemas concretos sobre os quais eles não têm praticamente nenhum controle semântico." Mais adiante os infinitésimos são adotados pelo autor como fator explicativo do comportamento dos alunos, que "não vêem (...) os infinitésimos desprezados".

A crítica de (CI2U, 1990) ao "ritual de integração" das ciências aplicadas pressupõe que o modelo vigente que elas adotam seja o modelo standard, dos números reais, onde não há quantidades infinitamente pequenas, a não ser zero. Ora, para ser coerente com a crítica que dirige às ciências aplicadas, o próprio autor, que propõe ensinar a teoria da integração per etapas baseadas na teoria dos limites, não deveria fazer uso das concepções infinitesimais como elementos explicativos. Uma vez que o faz, deveria reconhecer que as ciências aplicadas jamais abandonaram o modelo infinitesimal e que, discutir o *"d( )"*, como o autor pede, no campo semântico dessas ciências, é pedir-lhes que explicitem o *modelo não-standard* que estão usando. Ora, isso é tarefa de matemáticos! Essa discussão só tem legitimidade na matemática. À medida em que ela não ocorre, a Educação Matemática arrisca associar-se às ciências aplicadas no uso dos infinitésimos como *concepção clandestina*. O autor poderia ter socorrido essas ciências formulando corretamente o processo que elas estão usando e que é diferente do processo que ele critica e que transcrevi acima. A formulação correta mostra que o "deslize do simbólico", do significante $\sum$ para o significante $\int$, é conseqüência da tentativa de evitar declarar que se está pensando em de *somas infinitas*, o que acerbaria as críticas dos partidários do expurgo, embora desde o advento da análise não-standard somas infinitas sejam matematicamente legítimas. A formulação é resumida no que denominarei *procedimento de integração infinitesimal:*

"Para calcular um resultado R representando, por exemplo uma grandeza associada a um objeto Ω, propomos avaliar a quantidade $\int_{\Omega} dR,\ \iint_{\Omega} dR,\ \iiint_{\Omega} dR$ correspondente a uma parcelização deste objeto em uma infinidade de pedaços infinitesimais. Escolhemos, então, uma parametrização x. Situamo-nos em um ponto M(x), tomamos um elemento dΩ infinitamente pequeno do objeto considerado, situado ao redor de M(x), obtido por variações infinitesimais do parâmetro x, e materializamos sua medida por símbolos dl ou dS ou dV, etc. Depois, calculamos a contribuição elementar ou infinitesimal dR = f(x) dx onde f(x) é uma fórmula que leva em conta a intensidade do fenômeno que produz o resultado e a escolha da parametrização x. Enfim, externamos a intenção de calcular a soma infinita das contribuições infinitesimais, substituindo o produto dR = f(x) dx no símbolo integral que inicialmente expressou o resultado a calcular. Uma vez encontrada a expressão a integrar, engajamo-nos na procura de uma primitiva; se não conseguimos achá-la, calculamos a integral numericamente, etc. (CI2U, 1990, p. 211).

Segundo o ponto de vista do expurgo, pode-se entender a aposta de (CI2U, 1990) como essencialmente a mesma de (Swokowski, 1995) e da matemática do século XX: a vitória do cálculo diferencial e integral sobre o infinitesimal, ainda entrincheirado nas ciências aplicadas, pela aplicação exaustiva do conceito de limite. Pode-se questionar se não é exatamente a ênfase, posta por essa tendência, na passagem ao limite das somas de Riemann, que faz o aluno se perder e confundir o elemento de área do cone ou da esfera com o do cilindro. Se isso é verdade, (CI2U, 1990) estará atribuindo as dificuldades geradas pelo método que ele próprio propõe, ao "ritual de integração" das ciências aplicadas. Se a dificuldade decorre não desse procedimento e sim da tentativa de aproximar as áreas por somas finitas, não é na direção delas que se deve encaminhar estratégia didática. Parece que cada fracasso da terapia reforça a necessidade de repetir o remédio. Por que, em vez disso, não se provê o aluno com o *conceito do algoritmo* que está usando e que vai permanecer depois?

A PROPOSTA ALTERNATIVA

Argumento que, se pensasse primeiro nos elementos infinitesimais de área do cone e da esfera, ficaria claro ao aluno que eles não podem ser comparados aos elementos infinitesimais do cilindro sem a multiplicação por algo como um cosseno. Arquimedes viu isso muito bem. Advogo a diretriz didática de enfatizar o processo e equacionamento integral pela via dos infinitésimos e das somas infinitas, *mantendo* o *sentido* do que se está calculando em primeiro plano. Não se trata de desprezar o controle sobre o erro, pelo contrário, trata-se de manter estrita vigilância sobre os infinitésimos desprezados e sua contribuição para o erro global.

Essa diretriz costuma ser (mal) entendida como uma proposta de "ensinar análise não-standard" no curso de cálculo. Não se trata disso. Essa foi a tentativa heróica de (Kiesler, 1986) cuja lição é preciso aprender. O objetivo de qualquer curso de cálculo não é ensinar, nem a teoria dos limites, nem a dos infinitésimos. O cálculo poderá ter como objetivo aplicá-las, investi-las em situações didáticas. Ensinar análise real ou análise não-standard são objetivos de disciplinas posteriores, de análise matemática. No cálculo o aluno tem que aprender processos básicos de equacionar e resolver problemas com os conceitos de derivada e integral. A justificativa matemática, "científica" e os limites dos modelos usados devem ser objeto da análise matemática.

LEGITIMIDADE E A RESISTÊNCIA À MUDANÇA

No último parágrafo o autor de (CI2U, 1990) enuncia a dificuldade da implantação das diretrizes didática e pedagógica que ele propõe, isto é, aborda o tema da *resistência a mudança*: "Em falta dessas precauções pedagógicas (resistir ao cálculo prematuro das primitivas) certamente um pouco primárias, nós tivemos de constatar, infelizmente, que a pressão algorítmica se torna tal, em razão da economia de pensamento que permitem as notações diferenciais, que os professores não podem mais fazer viver a integral enquanto conceito." Embora o cálculo infinitesimal seja uma diretriz diferente dessa, é preciso reconhecer que as reações contra a mudança do que denomino *ensino tradicional vigente*, são, entre nós, de mesma natureza e intensidade que em França. Toda iniciativa de modificá-lo deve ser cercada dos cuidados da boa prática política. Por exemplo, se dissermos aos calouros que o capítulo sobre limites não vai ser "dado", eles tenderão a concordar silenciosamente, porque, enfim, é "menos matéria". Porém necessitam, simultaneamente, que a instituição, e não só o professor, lhes garanta que isso "não vai fazer falta". Em caso contrário, quando chegarem ao segundo ano, saberão encontrar a desculpa de que vão mal nas matérias seguintes porque o professor do primeiro ano não "cumpriu o programa". Com isso buscarão atenuar as condições de aprovação, responsabilizando a instituição por seu eventual fracasso.

O problema de em qual das teorias fundar o curso de cálculo, se na dos limites ou na dos infinitésimos, não pode ser resolvido pela *legitimidade epistemológica*: ambas são matematicamente corretas, logo epistemologicamente legítimas. Para resolver esse problema, é preciso recorrer à *legitimidade educativa* (Chevallard 1989, p. 63). A legitimidade educativa se constitui através de decisões que são essencialmente políticas. Por exemplo quando ouvimos o aluno falar que as séries são somas infinitas ou que 0.999... é menor que 1, nós vamos reforçar ou abalar essa concepção? Temos de decidir se devemos nos opor e erradicar esta concepção espontânea do aluno, para ali implantar a oficial, ou se é preferível reforçá-la.

Sempre se soube que nem tudo pode ser estudado no cálculo. Muitos resultados são usados ali sob a garantia de que poderão ser justificados pela *análise matemática*, como a integrabilidade das funções contínuas e a regra de L'Ôpital para o caso ∞/∞, cuja demonstração a maioria dos livros não traz. Porém, só os alunos de Matemática têm essa disciplina no currículo e, nem por isso, se diz que a formação dos que não a têm vá ficar incompleta. Poder-se-ia pensar que, por isso, seria fácil substituir o cálculo pelo cálculo infinitesimal para alunos de Física ou de engenharia, uma vez que, de um ou de outro modo, jamais verão a justificativa do que falta e muitos resultados permanecerão, para sempre, repousando na palavra do mestre. Esse raciocínio poderia ser reforçado pelo fato de que os professores das disciplinas aplicadas, certamente estarão usando procedimentos infinitesimais de integração.

Entretanto, esses argumentos são insuficientes para defender a mudança. A existência de uma disciplina homologada pelo departamento responsável, mesmo que fora do currículo dos alunos, é fundamental para garantir a *legitimidade institucional* dos conteúdos do cálculo. Que aconteceria se, por exemplo, na véspera da prova, os alunos decorassem que, pela opinião do professor de análise, os infinitésimos não existem, são coisas do passado?

Por isso a escolha da diretriz didática do cálculo não se esgota nele mesmo. À medida em que a relação do cálculo com a análise é de garantia da *legitimidade institucional*, só há duas possibilidades: ou não se fala em infinitésimos em cálculo ou se institui uma disciplina de análise não-standard junto com o cálculo infinitesimal na graduação. O que não é ético é continuar usando os infinitésimos como *concepção clandestina*, especialmente para decidir quem será aprovado.

A TRANSPARÊNCIA DA FUNÇÃO X² NO CÁLCULO INFINITESIMAL

O cálculo infinitesimal pressupõe, como estrutura básica, os números hiper-reais, *R, assim como o cálculo diferencial e integral pressupõe os números reais, R. Pode-se pensar *R como constituído por R, acrescido dos infinitésimos, que são os $\varepsilon \in {}^*R$ cujo módulo é menor que todos os reais positivos, dos infinitos, que são os $\Omega \in {}^*R$ cujo módulo é maior que todos os reais positivos e, mais, as *mônadas*. A mônada de um $x \in R$ é constituída por todos os $y \in {}^*R$ que estão infinitamente próximos de x, ou seja, pelos y tais que y-x é infinitésimo. *R é um corpo ordenado, embora não completo; a mônada do zero, por exemplo, que é o conjunto dos infinitésimos, é limitada mas não tem supremo nem ínfimo. O inverso de um infinitésimo (não nulo) é um número infinito e vice-versa.

Em vez dos diagramas sobre limites, como as retas secantes pontilhadas que se aproximam da reta tangente (Swokowski, 1995, fig. 3.3, p. 115) o cálculo infinitesimal usa a ampliação das mônadas por meio de um microscópio de poder infinito (Kiesler, 1986, fig. 2.2.4, p. 57). Ampliando a mônada do ponto onde a reta da figura 1, abaixo, tangencia a parábola, o que se vê é a curva e a reta coincidirem, enquanto os pontos $P = (x, x^2)$ e $Q = (x+dx, (x+dx)^2)$ por onde passa uma reta secante infinitamente próxima à tangente, aparecem como distintos. Definindo dy como em (2), o coeficiente angular dessa secante é o quociente (3). Esse quociente pertence à mônada do número real 2x. A derivada 2x, definida em (4), será então a parte real desse número hiper-real. As funções deriváveis serão aquelas para as quais essa parte real não depende do acréscimo infinitesimal dx dado a x.[1]

(1)Os autores da análise não-standard denominam parte standard, e abreviam st, o que estou denominando parte real e abreviando re.Talvez no afã de negociar a aceitação da análise não- standard, esses autores preferiram conservar a notação dy/dx para parte real do quociente diferencial, de modo a preservar a fórmula dy = f' (x) dx, consagrada no cálculo diferencial e integral. Optei por conservar o significado histórico do símbolo.

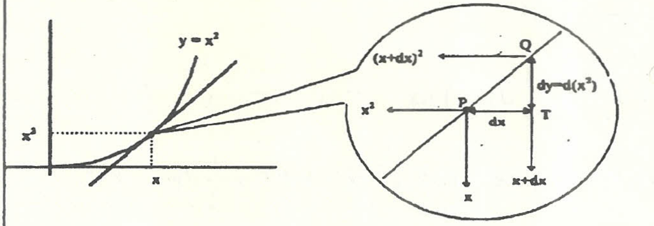

Figura 1.

$$(1)\quad y = x^2$$

$$(2)\quad dy = d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + dx^2$$

$$(3)\quad \frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

$$(4)\quad f'(x) = re\frac{dy}{dx} = 2x$$

Para obter a área do segmento parabólico S entre os pontos de abcissas a e b, seguimos o *procedimento de integração infinitesimal*, descrito acima. Pensamos o segmento S dividido numa infinidade de pedaços infinitesimais de área dA e escrevemos (5). Tomamos uma parametrização x para [a, b] e descrevemos S como a parte do plano sob o gráfico da parábola $f(x) = x^2$. Consideramos um número infinito, ω, dividimos [a,b] em ω partes iguais, cada uma de comprimento $dx = \frac{1}{\omega}$

Situamo-nos sobre o ponto de abcissa x, ampliamos a mônada de P, como na figura 1, e expressamos dA como soma da área de um retângulo e de um triângulo de base infinitesimal dx. Usando (2), obtemos (6)[2]. A integral é uma soma das infinitas parcelas assim obtidas. Como dx é constante, pode-se fatorá-lo. Supondo que já tenhamos calculado a integral da identidade e da constante, completamos o cálculo em (7), restando calcular a parte real da integral de x^2. Note que nenhum infinitésimo foi "desprezado", até que se chegasse ao passo final. O erro global, foi mantido sob controle.

(2) Poderíamos tomar uma parametrização (x , y) de S , efetuar partições infinitas sobre os eixos, expressar dA = dx dy e a integral dupla, para x variando entre a e b e y entre 0 e x^2.

$$(5) \quad A(S) = re\int_S dA$$

$$(6) \quad dA = x^2dx + \frac{1}{2}d(x^2)\,dx = x^2dx + xdx^2 + \frac{1}{2}dx^3$$

$$(7) \quad A_a^b(x^2) = re\int_a^b dA = re\int_a^b (x^2dx + xdx^2 + \frac{1}{2}dx^3) =$$

$$= re\left[\int_a^b x^2dx + dx\int_z^b xdx + \frac{1}{2}dx^2\int_a^b dx\right] =$$

$$= re\left[\int_a^b x^2dx + dx\frac{b^2-a^2}{2} + dx^2(b-a)\right] = re\int_a^b x^2dx$$

Para completar o cálculo da integral, examinamos a função $y = x^3$. De (8) a (10) obtemos o integrando $x^2\,dx$ que, substituído em (7) nos conduz a (11).

$$(8) \quad y = x^3$$

$$(9) \quad dy = d(x^3) = (x+dx)^3 - dx^3 = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$$

$$(10) \quad x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3) - xdx^2 - \frac{1}{3}dx^3$$

$$(11) \quad A_a^b(x^2) = re\int_a^b x^2dx = re\int_a^b (\frac{1}{3}d(x^3) - xdx^2 - \frac{1}{3}dx^3) =$$

$$= re\left[\frac{1}{3}\int_a^b d(x^3) - dx\int_a^b xdx - dx^2\int_a^b dx\right] =$$

$$= re\left[\frac{b^3-a^3}{3} - dx\frac{b^2-a^2}{2} - dx^2(b-a)\right] = \frac{b^3-a^3}{3}$$

A igualdade $\int_a^b d(x^3)dx = \dfrac{b^3-a^3}{3}$ é o teorema fundamental do cálculo que pode ser concretizado para funções com derivadas contínuas em nível de um curso de cálculo através da figura 2. Efetuando-se uma partição infinita de [a, b] obtém-se (se a função for monótona) uma partição infinita de [c, d]. Então c-d é igual a soma infinita dos infinitésimos dy que são iguais ao coeficiente angular da secante $\dfrac{dy}{dx}$ vezes dx:

$$c - d = \int_c^d dy = \int_a^b \frac{dy}{dx} dx$$

Esta igualdade, bastante evidente para funções monótonas, não requer passagem ao limite nem o uso do teorema da média.

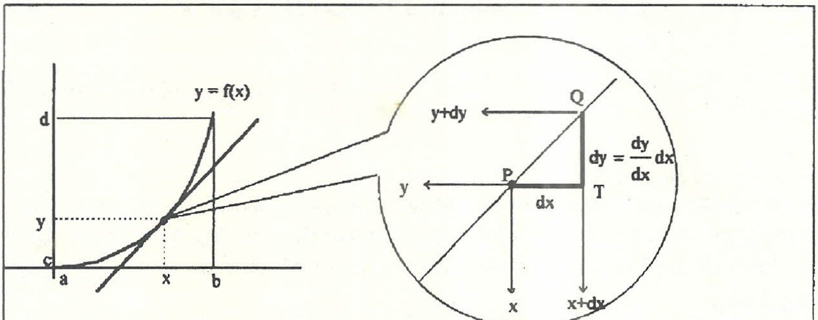

Figura 2.

Bibliografia

Baldino, R. R. e Cabral, T. C. B. (1994) A pulsão em um caso de dificuldade especial em cálculo. Papirus. Educação e Sociedade, Ano XV, dezembro, 1994, p. 485-500.

Chevallard, Y. (1989). Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Fac. des Sciences de Luminy, Univ. d'Aix-Marseille II.

CI2U (1990). Enseigner autrement les mathématiques en DEUG à première année. Commission Inter-IREM Université.

Kiesler, H. J. (1986). Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach. Boston. Prindle, Weber & Schimidt.

Lacan, J. (1973). Le séminaire de Jacques Lacan. Livre XI: les quatre concepts fondamentaux de la psychanalyse –1964. Paris: Editions du Seuil.

Swokowski, E. (1995). Cáclculo com geometria analítica. São Paulo. Makron Books do Brasil. 2ª edição. Orig. Calculus - Fifth Edition.