Caderno para o Professor de Matemática de Mato Grosso do Sul

Org. Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Regional de Mato Grosso do Sul

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
REGIONAL DE MATO GROSSO DO SUL

Caderno para o Professor de Matemática de Mato Grosso do Sul

SBEM-MS

Conselho Editorial e Científico

Organização:

Campo Grande (MS), Setembro de 2021.

Caderno para o Professor de Matemática de Mato Grosso do Sul

Imagem da capa e do fundo das páginas: PIXABAY - https://pixabay.com/pt/photos/l%c3%a1pis-apontador-caderno-918449/

Capa e diagramação: Thiago Pedro Pinto

ISBN: 978-65-87305-07-3

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Caderno para o professor de matemática de Mato Grosso do Sul [livro eletrônico] / org. Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional de Mato Grosso do Sul. -- Brasília, DF : SBEM Nacional, 2021.

PDF

ISBN 978-65-87305-07-3

1. Matemática - Estudo e ensino I. Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional de Mato Grosso do Sul.

21-85072 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Apresentação

Este caderno se origina em 2013 com a parceria entre a Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED). As três instituições tem um objetivo em comum: o constante contato e aprimoramento dos professores que ensinam Matemática em nosso estado.

Deste interesse comum nasce uma atividade formativa para professores da SED do Ensino Médio, quatro dias de intensas atividades nos quais aproximadamente 140 professores se encontraram e dialogaram sobre as propostas aqui apresentadas – a eles nosso muito obrigado, seus nomes constam no final deste Caderno. Após este encontro, os autores reelaboraram suas propostas na forma de textos que pudessem levar àqueles que não estavam presentes um pouco da experiência vivida nestes dias.

As atividades e textos tiveram foco professores do Ensino Médio por sugestão da SED, que, naquele momento, propunha mudanças em seu currículo. A SBEM-MS intermediou o contato com o PPGEdumat e organizou as ações e produção deste material. Os autores que constam neste caderno tem uma íntima relação com a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e participam ou participaram do PPGEdumat na forma de docente ou discente.

Objetivamos com este Caderno Pedagógico de Matemática nortear ações para que as instituições garantam aos estudantes uma formação que atenda as atuais demandas a fim de formar cidadãos críticos, participativos e autônomos para progredir, tanto no trabalho como na sequência de seus estudos, relacionando, sobremaneira, seus conhecimentos prévios com os linguísticos.

Assim, enfatiza-se, neste documento, com foco na Matemática, que experiências exitosas são profícuas para o crescimento intelectual e corroboram para a consolidação da teoria com a prática, bem como capacitam os estudantes à aplicabilidade e ampliação de seus conhecimentos em situações de investigações concretas, estimulando o interesse e a aprendizagem com excelência.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional de Mato Grosso do Sul

www.sbem-ms.com.br

Prefácio

Há quem ainda pense que para se tornar um professor de matemática é preciso conhecer em certa profundidade um conteúdo e ter uma boa oratória. Se tornar pode parecer estranho, pois aprendemos, ensinamos, imitamos, mas pouco nos tornamos. No máximo, nos transformamos ou mudamos alguns de nossos hábitos.

Há também quem ainda diga que professor de matemática ensina conteúdo. Esta é sua profissão: um facilitador, um ensinador, um transmissor. Ensinar conteúdos não parece uma frase muito estranha e até muito comum em nosso dia a dia. Eu ensino para alguém que supostamente aprende. Eu explico. O que seria da vida de um professor se lhe tirasse o afeto do ensino ou, indo além, o afeto de ensinar bem a alguém?

Pois bem, neste pequeno escrito, argumento que professor se torna e se torna sempre em movimentos, atravessamentos, afetações. Um professor não nasceu com uma estrela na testa indicando seu dom de ensinar; nem mesmo foi predestinado por ter uma certa empatia com os outros, ou levar um jeito para ensinar. Professor se torna em processos sistemáticos, dinâmicos e constituídos em meio a uma política, ética e estética. Quanto mais pensem que isso pouco importa, pois o conteúdo de função polinomial do primeiro grau é, e sempre será, o mesmo, mais a escola está fadada a uma política da reprodução e da aceitação; uma política que adestra o desejo de nossas crianças e adolescentes.

O professor se torna e ao se tornar, produz (e também é produzido em) efeitos. Estes me interessam. Com esses processos, formações se inventam. Um professor formador que atua na universidade, que se conecta a um professor em formação, em seu segundo ano da Licenciatura em Matemática, que se conecta a um professor que atua há 15 anos na Educação Básica, que se conecta a um professor que cursa um mestrado em Educação Matemática, que se conecta com outro professor que está em seus primeiros anos de trabalho, que se conecta a um professor que...

Movimentos, atravessamentos, afetações. Um tornar-se.

Há uma narrativa que restringe o trabalho profissional de um professor de matemática ao ensino de conteúdos. Há alguém que ensina: o professor; há um conteúdo estático, pontual, com regras e características que beiram uma suposta essencialidade e que deve ser ensinado: função polinomial de primeiro grau; e, há alguém que aprende: o aluno. Meu convite para uma problematização desta ideia, tão naturalizada em nossos horizontes culturais, é na direção de produzir uma escola outra, na qual leve a sério as singularidades de corpos de alunos, suas histórias econômicas e sociais, seus sonhos e desejos, suas opiniões e seus modos idiossincráticos de fazer uma certa humanidade ser inventada. Um professor convida seus alunos para a produção de comprometimentos com certos projetos, que acontecem em certos espaços, tempos, matérias e significações. Imitação, imaginação, projeção e esquecimentos também entram na ciranda de um lugar escola, uma instituição que uma grande capilaridade em nossa sociedade.

Espaços, tempos, matérias, significações: invenção e regulação de pertencimentos.

Com esses dois argumentos, singelamente produzidos, penso que posso falar um pouco de uma história da produção deste caderno para o professor de matemática.

Estávamos, Adriana Barbosa, uma colega do Instituto de Matemática, e eu, em uma reunião com outros colegas da Secretária Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul. Nos entre de uma conversa e outra, surge uma demanda: *vocês da SBEM- MS, poderiam produzir um material para o professor de matemática de nosso estado, um caderno*. Um contra argumento aparece com certa naturalidade: mas há muitos materiais didático-pedagógicos para professores de matemática, não há necessidade de produzir mais um material. Conversa vai, conversa vem, e outra ideia, junto a essa, acontece: vamos, então, produzir um material didático-pedagógico com a participação de professores de matemática de nosso estado. A desculpa é a produção de um material, com a intenção de aglutinar professores de matemática em espaços de discussões, problematizações, produções de possibilidades. Não seria um material para o professor, mas sim um material *com* o professor. Não seria um material idealizado por pessoas que pouco habitam a sala de aula, mas por aqueles que a vivenciam todos os dias, diferentes realidades escolares, com múltiplas condições de trabalho e possibilidades bem condicionadas aos contextos econômicos e culturais.

Naquele momento, esta ideia fez meus olhos brilharem.

Diferentes professores de diferentes escolas, juntos com professores da universidade, alunos da pós-graduação em Educação Matemática, com uma intenção de partilhar narrativas, desafios, ideias, possibilidades. Depois de um tempo, os encontros aconteceram com a participação de muitos professores de matemática de nosso estado, em espaços nos quais discutimos juntos alguns convites para salas de aula de matemática. Depois de um longo tempo, entre percalços, dificuldades, esquecimentos, esse material acontece em uma publicação. É fruto de um trabalho de vários professores, comprometidos com a construção em conjunto de algo. A partilha, o desabafo, o entusiasmo, a ousadia: entre afetos e vontades de produzir algo com as salas de aulas de matemática que acontecem todos os dias.

Nos tornamos professores todos os dias e isso exige estudo, partilha, espaços comuns para um contar de nossas vivências, realizações e dificuldades.

A prática profissional de um professor de matemática é muito mais que ensinar conteúdos matemáticos para seus alunos. É um afetar e ser afetados em espaços, tempos, matérias, significações, em produções e regulações de pertencimentos. Em uma sala de aula do sexto ano do Ensino Fundamental II, uma matemática se inventa com alunos e professores que têm uma história, uma vontade. Não temos números nas escolas, mas humanos. Não temos apenas aprender, mas inventar, imaginar, imitar, ficcionar.

Que este caderno possa ser o primeiro de muitos e que estes possam ser produzidos por muitos professores, sempre em um trabalho coletivo.

Gostaria de parabenizar o esforço da atual diretoria, na figura do professor Thiago Pedro Pinto, para a publicação deste material. Que possamos sempre nos encontrar para nos tornar em produções de pertencimentos.

João Viola

UFMS

Primavera de 2021

Sumário

História da Matemática para Professores de Matemática do Ensino Médio

Antonio Sales[1]
José Luiz Magalhães de Freitas[2]

Por que introduzir o estudo da História da Matemática no ensino médio? Como inserir os conteúdos de História da Matemática no currículo escolar? O que se espera como benefício para o currículo do aluno?

Essas questões não têm uma resposta fácil e imediata, mas alguma coisa se pode dizer a respeito. Evidentemente que faremos uma defesa da inclusão da História da Matemática no currículo do ensino médio, mas não temos a pretensão de sermos convincentes. O que pretendemos com essa introdução é apenas produzir alguns momentos de reflexão sobre o currículo e sobre a importância da história, esclarecendo que por currículo não estamos pensando apenas na ementa, nem na quantidade de conteúdo a ser ministrada, enfim, no que está prescrito. Estamos pensando em algo mais amplo como a cultura geral do aluno, por exemplo. Estamos preocupados com as relações que ele poderá estabelecer, entre o passado e o presente da Matemática, bem como entre diversas culturas, por meio do conhecimento da História da Matemática.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) “os conceitos abordados em conexão com a história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo” (BRASIL, 1998, p. 42).

A História da Matemática, segundo o mesmo documento, pode contribuir para desmitificar a Matemática, na medida em que revela os percalços seguidos pela humanidade para chegar ao conhecimento matemático que temos hoje. Nem tudo foi acertado da primeira vez, as fórmulas que temos hoje começaram de forma mais simples e exigiram persistência dos estudiosos ao longo do tempo. Hoje, talvez, classifiquemos de rudimentar a forma como os egípcios calculavam área e as resoluções particulares para cada tipo de equação do primeiro grau. Os sistemas de numeração desses povos antigos não facilitavam o cálculo e a álgebra era retórica (quadro I), ou seja, os procedimentos eram descritos na linguagem natural, ocupando muito espaço e exigindo mais a memorização do que algoritmos e técnicas.

[1] UEMS/UNIDERP - profesales@hotmail.com.
[2] UFMS/UNIDERP - joseluizufms2@gmail.com.

Ao nos revelar as fragilidades dos procedimentos desses povos e, em muitos casos, também o elevado grau de abstração a que eles chegaram, a História da Matemática nos mostra uma Matemática produzida nos embates da vida em busca da solução de problemas que os incomodavam e requeriam uma tomada de atitude. Ela nos mostra um quadro de pessoas levando consigo uma cabeça plena de desafios, incomodada com problemas que requeriam mais do que um serviço braçal para resolvê-los.

Foram essas pessoas, esses povos da antiguidade, dizem os PCN, que forneceram as bases para o avanço tecnológico que temos hoje. A partir das observações do dia-a-dia e de avançar do ponto onde o outro parou que nos legaram todo esse conhecimento que hoje nos proporciona o privilégio de desfrutar do aparato científico e tecnológico de que dispomos.

“A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural” (BRASIL, 1998, p. 42).

Apesar de defendermos a inclusão da História da Matemática no currículo sabemos que algumas questões permanecem. Como inserir o conteúdo da História da Matemática em um programa já apertado? Qual a melhor forma e como definir o melhor momento de apresentar a História?

Novamente admitimos não ter respostas satisfatórias e se as tivéssemos talvez não as apresentássemos porque elas seriam satisfatórias para nós e não, necessariamente, para os professores. Acreditamos que cada professor tem o seu perfil e condições de escolher o melhor momento, mas admitimos que há várias maneiras de apresentar a História da Matemática:

1. seguindo a linha do tempo, apresentando os fatos históricos cronologicamente. Alguns livros já trazem essa linha do tempo simplificada;
2. por povos: focalizando a produção de cada povo e destacando semelhanças e diferenças na produção deles;
3. por temas: por exemplo, números irracionais, equações, logaritmos, funções trigonométricas, sólidos geométricos, limites, etc...
4. por áreas da matemática: sistemas de numeração, medidas, geometria, álgebra, etc.;
5. por personagens: destacando os feitos de cada um dos matemáticos mais conhecidos;
6. por problemas: destacando problemas que motivaram a construção de conhecimentos matemáticos e como tais problemas foram atacados pelos diferentes povos;
7. mesclando as formas acima.

Qual a forma que você considera como mais adequada? Nós optamos por priorizar o de número 6. Seria a melhor?

Há ainda algumas questões que consideramos relevantes e talvez fosse oportuno discutir sobre elas:

1. Quando e como ocorreu a universalização do uso do Sistema de Numeração Decimal?
2. Quando e como ocorreu a universalização do Sistema Métrico Decimal?
3. Como ocorreu a universalização da simbologia matemática?
4. Como a História da Matemática poderia ser utilizada como recurso didático?

Para ilustrar a evolução histórica da linguagem matemática apresentamos, no quadro que segue, uma breve ilustração de etapas das notações algébricas:

Quadro I- Da linguagem retórica à linguagem simbólica

Antes de chegarmos ao estágio da álgebra simbólica, como é denominado o estágio em que nos encontramos hoje, a humanidade fez uso da linguagem retórica, passando ainda pela utilização da linguagem sincopada. Apresentamos abaixo algumas ilustrações sobre essas diferentes formas de representação.

Retórica: 7 minus 5 plus 4 aequalis 6

Sincopada: 7 $\overline{m}$ 5 $\bar{p}$ 4 aequalis 6

Simbólica: 7 - 5 +4=6

Em 1545 Cardano escreveu retoricamente: Cubus 6 rebus aequalis 20, cuja tradução para a álgebra simbólica é: $x^3 + 6x = 20$

Em 1591 Viète já fazia a sincopação: I QC - 15 QQ + 85C – 255 Q +274N aequatur 120. Tradução: $x^5 - x^4 + 85x^3 - 255x^2 + 274x = 120$

Em 1631, Harriot: aaa -3bba ===== +2ccc. Tradução: $x^3 - 3b^2x = 2c^3$

1ª. Parte: Problemas na História da Geometria Problemas geométricos do antigo Egito, Grécia e da Babilônia

1. Para calcular a área do círculo os egípcios usavam uma constante para subtrair do diâmetro antes de eleva-lo ao quadrado. Essa constante era 1/9. A área do círculo, portanto, era calculada fazendo $\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$. Para chegar a essa fórmula o escriba do Papiro Ahmes “formou um octógono [fig.1][1] a partir de um quadrado de lado nove unidades,

dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área $4\frac{1}{2}$ unidades” (BOYER,1996, p. 12).

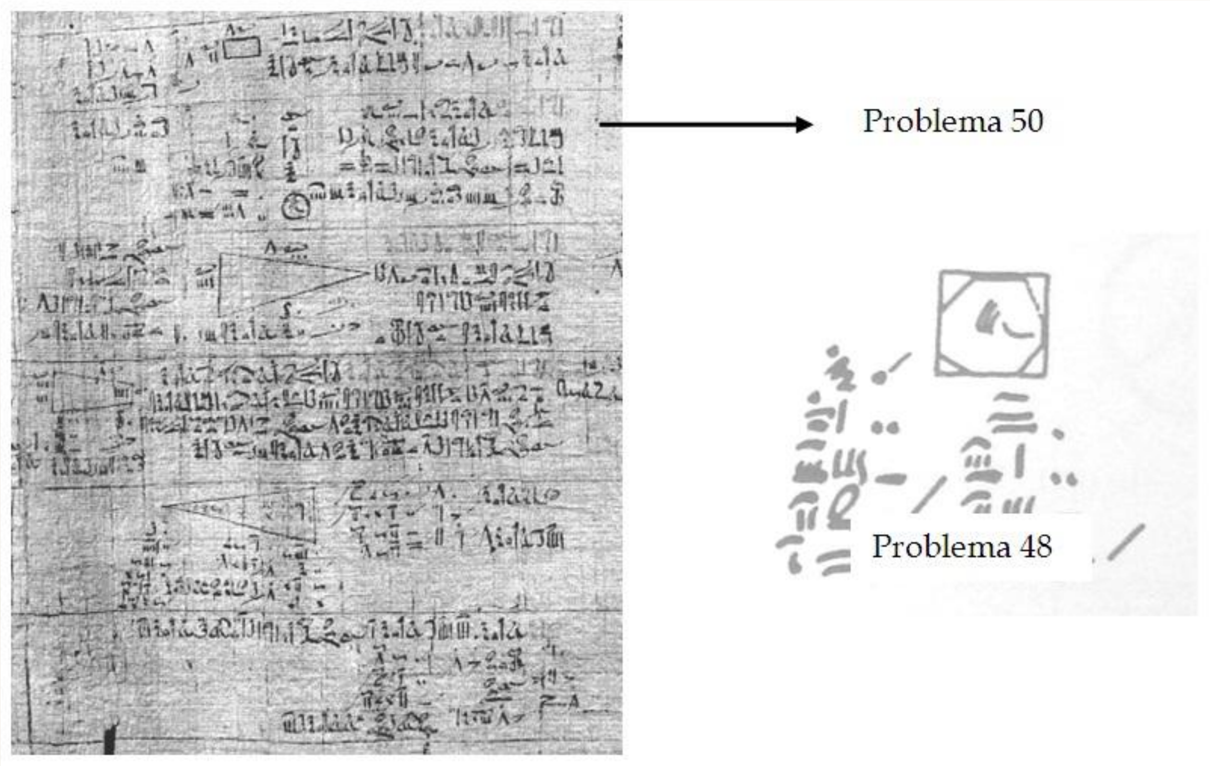


Figura 1. Solução apresentada pelo escriba Ahmes.
Fonte: Disponível no site: http://matematica100limite.blogspot.com.br/2011/09/area-do-circulo-pelos-egipcios.html

Vejamos o recorte de forma ampliada (figura 2). Observe que eles pensaram, segundo Boyer, que o lado do quadro media 9u e calcule a área do octógono (quadro II). Deduza a fórmula egípcia para o cálculo da área do círculo. Identifique qual era, nessa fórmula dos egípcios, o valor da constante que hoje é conhecida por π. Os egípcios teriam percebido que essa constante existia?

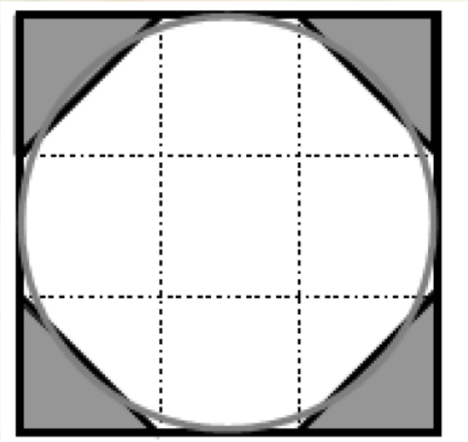


Figura 2 - Octógono inscrito no quadrado.
Fonte: GASPAR e MAURO, 2004, p.10

Quadro II- Área do círculo, segundo os egípcios

A área do octógono inscrito no quadrado de lado d fornece uma boa aproximação da área do círculo de diâmetro d. O octógono é obtido pela retirada dos quatro triângulos isósceles dos "cantos" do quadrado.

Para calcular a área do octógono de lado 9, por exemplo, basta retirar da área do quadrado (81) as áreas dos quatro triângulos, ou seja, $\mathbf{81 - 4x\frac{3x3}{2} = 81 - 18 = 63 \approx 64}$. Esse valor (64), além de ser um quadrado perfeito, fornece uma aproximação que os egípcios avaliaram ainda como sendo ainda mais próxima da área do círculo.

Em seguida eles utilizam propriedade de proporcionalidade entre as áreas do quadrado e a do octógono (área aproximada do círculo cujo diâmetro era o lado do quadrado), para encontrar fórmula para a área de um círculo qualquer de diâmetro d.

Área do quadrado	*Área do Círculo*
81	64
d^2	X

Logo, a área X, do círculo inscrito no quadrado de lado d é: $\boldsymbol{X = \frac{64d^2}{81} = \left(\frac{8d}{9}\right)^2}$

(OCHOVIET, 2011, com adaptações)

2. Um problema sobre área e volume que, segundo Roque (2012, p. 83), foi encontrado no papiro de Ahmes é o seguinte: "Fazer um celeiro redondo de 9 por 10". Trata-se de construir um celeiro cilíndrico de diâmetro igual a 9 e altura igual a 10.

Qual seria o volume de um "celeiro redondo" de 12 por 5 ? Se usarmos a fórmula que utilizamos hoje, o resultado obtido estaria próximo do egípcio?

3. Ainda com relação à área do círculo, o historiador Eves (1997, p. 61) escreveu o seguinte sobre a geometria mesopotâmica: "Considerava-se uma circunferência como o triplo do seu diâmetro e a área do círculo como o duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva". Qual o valor que os egípcios atribuíam a π?

4. Estou vendendo um terreno circular de diâmetro igual a 28m, por R$20,00 o m^2. Você, como possível comprador, prefere que o cálculo da área seja feito usando a técnica atual ou pela técnica egípcia? Por quê? Seria vantagem usar a técnica egípcia?

5. Veja (quadro III) como os egípcios calculavam área de quadriláteros e triângulos. Discuta a validade desse procedimento.

Quadro III- Áreas de triângulos e quadriláteros segundo os egípcios

Num material achado no papiro de Edfu (Egito), cerca de 1500 anos depois do papiro Ahmes, aparecem exemplos de áreas de triângulos, retângulos, trapezoides com a seguinte informação: “para calcular a área de um quadrilátero qualquer de lados a, b, c, d (nessa ordem) os egípcios dão a fórmula $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$,,

a) Essa fórmula pode ser usada sem restrição?

b) Explique a sua resposta. Experimente-a no cálculo da área do retângulo.

c) Calcule a área do losango de lado 5 e uma diagonal medindo 6, usando essa fórmula e usando a fórmula que usamos hoje. Há diferença?

d) Essa fórmula sempre fornece uma boa aproximação para calcular a área de um quadrilátero qualquer?

e) Os egípcios deduziam como corolário da fórmula para o cálculo da área de um quadrilátero $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$ que a área de um triângulo é a metade da soma de dois lados multiplicada pela metade do terceiro lado. Explique como poderiam ter deduzido esse corolário (OCHOVIET, 2001).

Problemas Geométricos da Grécia Antiga

1. Apresentamos a seguir alguns teoremas sobre relações entre áreas (triângulos e paralelogramos), extraídos da obra “Os elementos” de Euclides (300 a.C), composta de 13 volumes, contendo 465 proposições também conhecidas como teoremas.

Cada proposição é

> demonstrada a partir de afirmações vindas antes dela. O estilo de apresentação é formal e seco. Depois do enunciado de cada proposição, há uma figura à qual ela se refere, seguida por uma demonstração cuidadosa. As demonstrações terminam com um re-enunciado da proposição ´que devia ser demonstrada´. A tradução latina da frase “quod erat demonstrandum” é a fonte para a abreviação Q.E.D que que ainda parece frequentemente no final das abreviações formais (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p 160).

Antes de prosseguir vejamos os postulados e axiomas propostos por Euclides e que darão suporte à resolução das atividades seguintes:

Postulados:

1. É possível traçar um alinha reta de um ponto a outro ponto qualquer.
2. É possível prolongar arbitrariamente um segmento de reta.
3. É possível traçar um círculo com qualquer centro e raio.
4. Dois ângulos retos quaisquer são iguais entre si.
5. Se uma reta, interceptando duas outras retas, forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores que dois retos.

Axiomas:

1. Grandezas iguais a uma mesma grandeza são iguais entre si.
2. Se as grandezas iguais forem adicionadas grandezas iguais, as somas serão iguais.
3. Se as grandezas iguais forem subtraídas de grandezas iguais, os resultados serão iguais.
4. Grandezas que coincidem entre si são iguais.
5. O todo é maior do que suas partes.

Teorema 1 (I,35) : Paralelogramos com a mesma base, e situados entre duas retas paralelas dadas, são iguais (em área) (Figura 3).

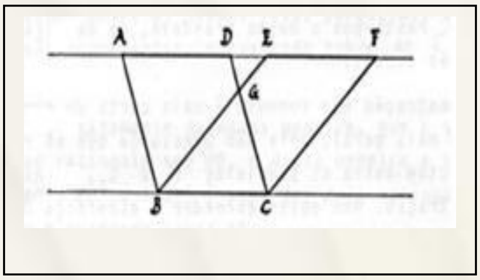


Figura 3- Referente ao teorema 1.
Fonte: AABOE, 1984, p. 71.

Para uma discussão com os alunos sugerimos que:

1. Identifique os segmentos paralelos.
2. Verifique que os triângulos ABE e DCF são congruentes
3. Busque aplicar os axiomas 2 e 3.

Teorema 2 (I,37): Triângulos que têm a mesma base e estão entre retas paralelas são iguais (Figura 4).

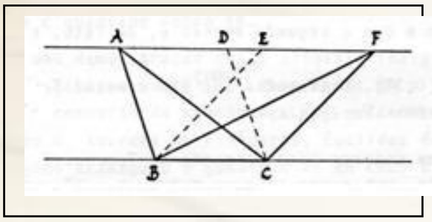


Figura 4 - Referente ao teorema 2. (AABOE, 1984, p. 71).

Sugestão: use o resultado do teorema anterior.

Teorema 3 (I,41): Se um paralelogramo e um triângulo têm a mesma base e estão situados entre duas paralelas dadas, então o paralelogramo tem duas vezes a área do triângulo (fig. 5).

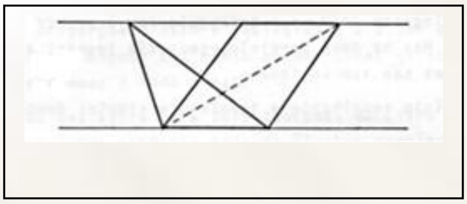


Figura 5 - Referente ao teorema 3. (AABOE, 1984, p. 71)

Sugestão: recorrer aos resultados dos teoremas anteriores.

Teorema 4 (I, 43): Em qualquer paralelogramo, os complementos dos paralelogramos construções sobre a diagonal do paralelogramo dado são iguais (em área) (fig.6).

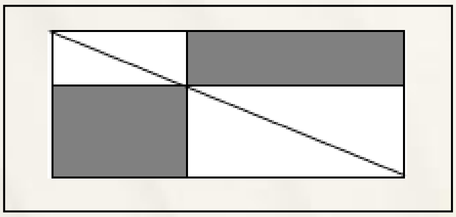


Figura 6 - Referente ao teorema 4.

Sugestão: mostre que há triângulos congruentes na figura e aplique os axiomas dois e três. Se a figura acima fosse um paralelogramo não retângulo o teorema ainda se aplicaria? Justifique.

Apresentamos em seguida o enunciado do Teorema de Pitágoras contido nos elementos de Euclides e em seguida uma figura que contém a ideia principal que ele utilizou para demonstrá-lo. Explique o raciocínio utilizado por Euclides para provar esse teorema. Por que esse teorema é considerado como um dos mais importantes?

Sugestões de pesquisa: o Teorema de Pitágoras na Matemática, o Teorema de Pitágoras na Física, e também no dia a dia.

Teorema 5 (I,47, teorema de Pitágoras). Em triângulos retângulos, o quadrado construído sobre o lado que subtende o ângulo reto (isto é, a hipotenusa) é igual à (soma) dos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto (figs.7 e 8).

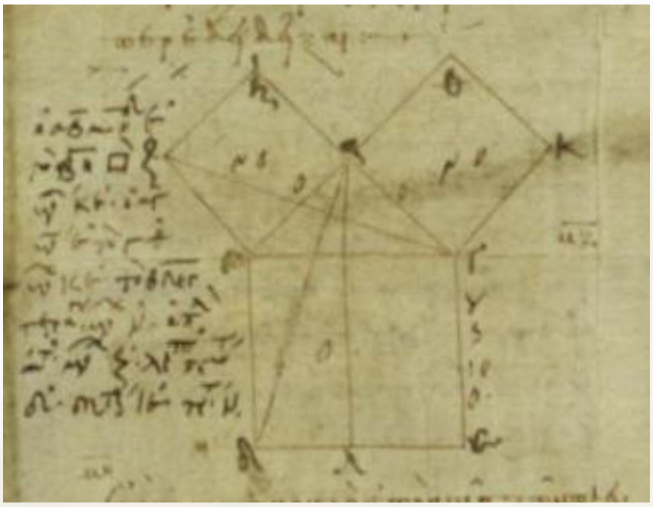


Figura 7 - Demonstração do teorema 5.
Fonte: https://www.ibiblio.org/expo/vatican.exhibit/exhibit/d-mathematics/images/math01.jpg

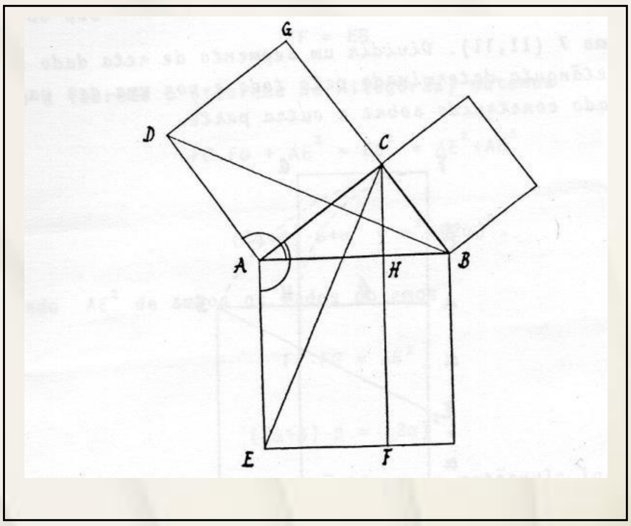


Figura 8 - Referente ao teorema 5. (AABOE, 1984, p. 74)

Sugestão de discussão com os alunos:

i. C é um ângulo reto.

ii. O segmento CF é perpendicular AB

iii. Rotacionando o triângulo CAE sobre o ponto A ele coincide com DAB.

iv. Verifique que o retângulo AEFH tem a mesma área que o quadrado ACGD.

v. Repita o procedimento com relação ao retângulo de vértices HFB.

2. Para provar o teorema de Pitágoras os hindus utilizavam as duas figuras abaixo acompanhadas da frase "contemple-a". Como poderíamos explicar essa prova? (fig.9).

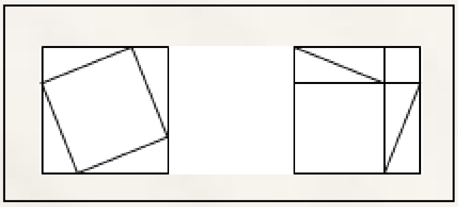


Figura 9 - Demonstração hindu do teorema e Pitágoras.

Sugestão:

i. Os quadrados que foram subdivididos têm a mesma área.

ii. Os quatro triângulos retângulos são os mesmos nas duas figuras.

3. Dentre os três problemas clássicos da antiguidade grega, figura o da quadratura do círculo. Em que consistia esse problema?

a. Como os gregos quadravam um retângulo usando régua e compasso, ou seja, dado um retângulo não quadrado de lados **a** e **b** determine o lado do quadrado de área **ab**?

b. Como quadravam paralelogramos e triângulos?

c. Na figura abaixo sabe-se que AF é paralela a BE e que os pontos D, E e F estão alinhados.

O pentágono ABCDE e o quadrilátero FBCD da figura abaixo têm a mesma área? (fig.10).

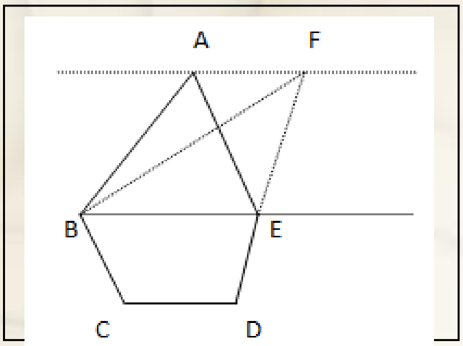


Figura 10 – - Construída pelos autores

Essa ideia pode ser usada para quadrar polígonos convexos quaisquer?

Sugestões de pesquisa sobre outros temas da geometria:

1. Qual a abordagem feita nos Elementos de Euclides sobre os cinco tipos de poliedros regulares? É possível utilizá-la para explorar essa propriedade com alunos do ensino médio?
2. Em que consiste o princípio de Cavalieri? Em que contexto histórico ele surgiu? Para que tipo de problemas ele é útil?
3. Sobre os sólidos de Platão observe o que disse Euclides (300 a.C.)

> Digo, então, que exceto as cinco ditas figuras não será construída outra figura contida por equiláteras e também equiângula iguais entre si. Pois, um ângulo sólido não será construído, certamente, por dois tri6angulos, ou em geral, planos. Mas por três triângulos, o da pirâmide, e por quatro, o do octaedro, e por cinco, o do icosaedro; mas por seis triângulos tanto equiláteros quanto equiâgulos, construídos junto a um ponto, não existirá um 6angulo sólido; pois, sendo o ângulo de um triângulo equilátero dois terços de um reto, os seis serão iguais a quatro retos; o que é impossível; pois todo ângulo sólido é contido por um menor do que quatro retos. Pelas mesmas coisas, então, nem um ângulo sólido é construído por mais do que seis ângulos planos. Mas o ângulo do cubo é contido por três quadrados; e por quatro, é impossível; pois, de novo, será quatro retos. Mas por pentágonos equiláteros e equiângulos, certamente por três, o do dodecaedro; e por quatro, é impossível; pois, sendo o ângulo do pentágono equilátero um reto e um quinto, os quatro ângulos, os quatro ângulos serão maiores do que quatro retos; o que é impossível. Nem, por certo, por outras figuras poligonais será contido um ângulo sólido, pelo mesmo absurdo. Portanto, exceto as cinco ditas figuras, uma outra figura sólida não será construída, contida por equiláteros e também por equiângulas; o que era preciso provas. (EUCLIDES, in BICUDO, 2009, p. 592)

2ª Parte: Desenvolvimento dos números e dos conjuntos numéricos

Os mesopotâmicos usavam uma escrita cuneiforme que gravavam em tabletes de argila com estiletes.

Eles usavam duas bases para a numeração. Base 10 de 1 até 59 e um misto de base 60 e base 10 para representar os demais números (fig.11)[3].

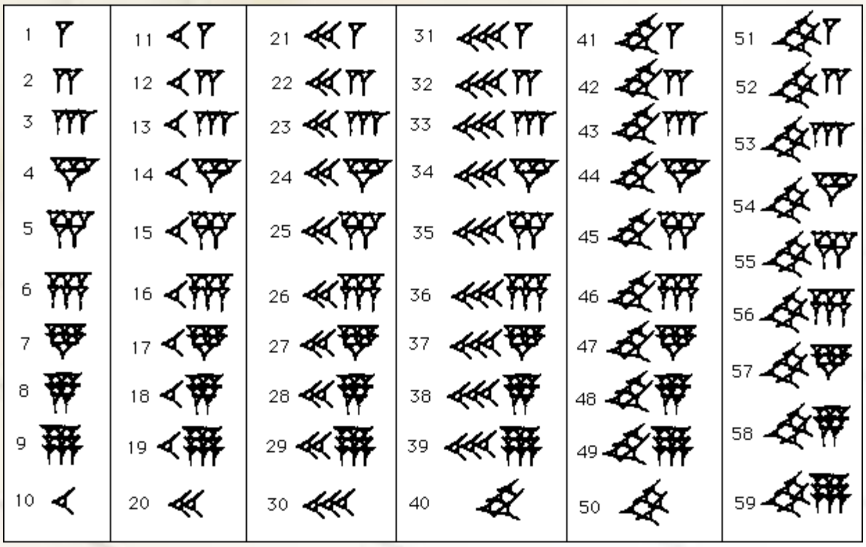


Figura 11 – Símbolos Cuneiformes. Fonte: http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=976&sid=9

Hoje sabemos que o sistema mesopotâmico era decimal até 59 e sexagesimal de 60 em diante, como pode ser observado no seguinte tablete (fig. 12), encontrado pelos pesquisadores. Analise-o e tente descobrir como ele pode nos ajudar a entender o sistema deles. Há alguma regularidade no tablete que segue?

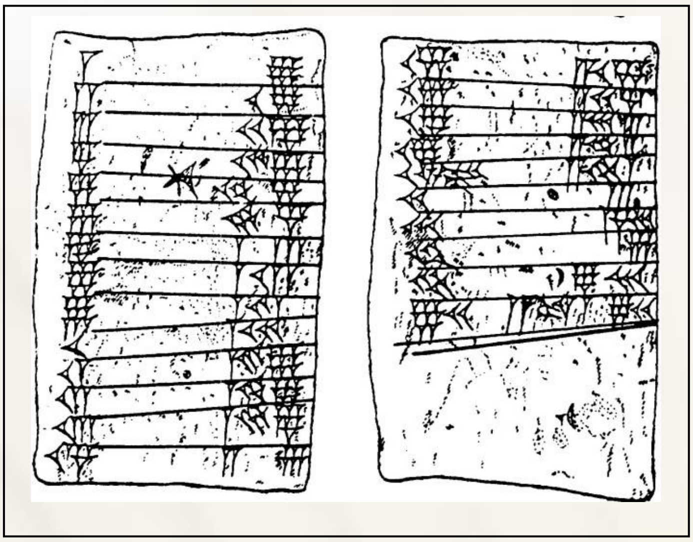


Figura 12 – Tablete Babilônico (AABOE, 1984, p. 11).

Se usarmos os símbolos atuais (indo-arábicos) e os princípios do sistema babilônico teremos:

a) 45= 10+10+10+10+5 ou 4×10+5

b) 74= 60+10+4= 1×60 +1×10+ 4 (denotaremos por 1,14)

c) 112,5= 1×60 +5×10+ 2 + 30/60 (denotaremos por 1,52;30)

Os números a seguir estão representados por símbolos indo-arábicos, escreva-os no sistema numeração cuneiforme dos mesopotâmicos:

a) 133 =

b) 451 =

c) 0;25 =

d) 3,21 =

Boyer (1996, p.19) afirma que os mesopotâmicos, também conhecidos como babilônicos, foram hábeis em desenvolver processos “algorítmicos”, pois tinham técnicas para resolver “raiz quadrada” e possuíam tabelas de “multiplicação, de recíprocos, de quadrados, de cubos e raízes quadradas, escritas, é claro, em sexagesimais “cuneiformes”.

Visando construir uma delas, vejamos antes um exemplo de recíprocos nas bases 10 e 20.

n	Recíproco na	Recíproco na base 20

	base 10	
2	5	10
4	2,5	5
5	2	4
8	1,25	$\mathbf{2\frac{1}{2}}$ ou 2;10 (onde 0;10 representa a metade na base 20 como 0,5 representa a metade na base 10). Em outras palavras: $\mathbf{20 = 2x8 + \frac{1}{2}x8}$
12	--	$\mathbf{1\frac{1}{3}}$ ou 1;15 (porque 15?)

Observe agora o registro encontrado em um tablete mesopotâmico (fig. 13) e tente verificar a regularidade envolvendo os números da Col. I e os da Col. 2:

Col. I	Col. II	Col. I	Col. II	Col. I	Col. II
2	30	16	3,45	45	1,20
3	20	18	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

Figura 13 - Tablete babilônico. Fonte. (AABOE, 1984, p. 15).

Entre os tabletes babilônicos foi encontrado um com os valores a seguir.

2	12	36	1,20	2,30	4,12

Você consegue descobrir a regra utilizada?

Esses dados da mesopotâmia datam de 2000-1600 a.C., segundo Roque (2012).

Com relação à raiz quadrada de um número diz-se que os mesopotâmicos usavam uma técnica própria.

Desejando-se saber $\sqrt{x}$ seguiam os seguintes passos:

1. Procuravam duas raízes próximas, uma menor (r) e outra maior (s) onde $s = \frac{x}{r}$.
2. Achavam a média aritmética (m) entre r e s . O valor m sempre é maior do que $\sqrt{x}$.
3. Obtinham m_1 fazendo $m_1 = \frac{m+r}{2}$ e faziam novamente a média entre m e m_1.

Determine $\sqrt{70}$ pelo método mesopotâmico.

Outro povo cuja matemática produzida por ele é muito bem conhecida é o povo egípcio. Desde 2000 a 1800 a. C. que eles desenvolveram técnicas e conceitos matemáticos que revelam alto nível de conhecimento para a época.

Eles usavam uma numeração diferente dos babilônicos e os símbolos também. Os símbolos usados eram esses (fig. 14)4:

Figura 14 - Numerais egípcios.
Fonte: http://www.prof2000.pt/users/hjco/numerweb/pg000120.htm

Questões:

1. Qual era a base do sistema de numeração dos egípcios?
2. Quais semelhanças e diferenças entre esse sistema e o nosso?
3. Como eles escreveriam dez milhões?

Os egípcios sabiam somar e multiplicar e Boyer (1996, p.10) afirma que "a operação fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de 'Ahmes' [um escriba egípcio que assinou por esse nome um rolo de papiro que ele copiou por volta de 1650 a.C.] por sucessivas 'duplações'. Nossa palavra 'multiplicação', na verdade, sugere o processo egípcio".

Questão:

Como os egípcios efetuariam as seguintes operações?

a) $23 \times 15 =$ b) $50 \times 34 =$ c) $272 \div 16 =$

Os gregos da antiguidade também fizeram progressos na matemática. Eles, talvez mais do que outros povos, fizeram importantes constatações. Os gregos fugiram das regras prontas, das tabelas de resultados, e procuraram observar regularidades tendo produzido o que chamamos de números figurados, por exemplo, os números obtidos pela adição dos números naturais eram chamados números triangulares. Eles também identificaram números quadrados, números pentagonais, enfim, números poligonais.

É importante propor aos alunos que pesquisem na internet sobre os números figurados e que tentem descobrir e explicar as regularidades presentes na constituição desses números.

Os gregos chamavam de **número perfeito** aquele cuja soma dos divisores próprios (não inclui o próprio número) resulta igual a ele mesmo. Ex. D(6) = {1,2,3,6}, como 1+2+3 = 6 então 6 é um número perfeito. Quando a soma dá maior que o número ele é chamado de **abundante** e quando é menor de **deficiente**. Tente encontrar números perfeitos, deficientes e abundantes, entre os 30 primeiros números naturais.

Eratóstenes (230 a. C.) criou um "critério" para descobrir número primos. Ele dispôs numa tabela a sequência dos naturais. Em seguida ele começava riscando o número 1 e, em seguida, todos os múltiplos de 2 maiores que 2, todos os múltiplos de 3 maiores que 3, todos os múltiplos de maiores que 5, e assim por diante. Os números que sobravam eram primos (Esse critério é conhecido por "**Crivo de Eratóstenes**"). Por que os números que sobravam eram primos? A construção dessa tabela (crivo) poderia ser explorada como recurso didático, para introdução dos primos?

Com relação aos números primos Godbach (1690-1764) conjecturou que "Todo número par maior do que 2 pode ser decomposto numa soma de dois números primos". Se tomarmos um número para menor que 50, por exemplo, podemos facilmente verificar a validade dessa conjectura para esse número. Discuta a possibilidade de uso didático dessa conjectura.

3ª Parte: Evolução histórica das equações algébricas

1. Os egípcios também resolviam problemas algébricos. Segundo Boyer (1996, p.10) eles denominavam a incógnita por “aha” e usavam o método da “falsa posição” para resolver equações. O autor afirma que no problema de nº 24 do papiro de Ahmes é pedido para determinar o valor de “aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19”.

2. “Um problema babilônico pede o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e o seu lado é o número (sexagesimal) 14,30. A resolução do problema é descrita com o segue: ‘Tome metade de 1, que é 0;30; multiplique por 0;30 o que dá é 0;15; some 0;15 a 14,30 obtendo 14,30;15. Este último é o quadrado 29;30. A seguir some 0;30 a 29;30; o resultado é 30, que é o lado do quadrado’” (EVES, 1997, p. 78).

Questões para você responder:

1. Por que 0;30×0;30 = 0;15 ?

2. Vamos pensar como ficaria o problema se eles usassem a base decimal. Ficaria assim: determine o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e o seu lado é o número (decimal) 870. Tome a metade de 1, ...(continue)

De Refatti e Bisognin (2005, p.82) extraímos o seguinte excerto:

> De acordo com Boyer (1974), os babilônios foram os primeiros a resolver equações quadráticas, por volta de 4000 anos a.C.. No entanto, eles não apenas algumas fórmulas de fatoração e desenvolveram uma aproximação algorítmica para resolver problemas envolvendo equações quadráticas. Essa aproximação algorítmica é citada por muitos historiadores uma raiz positiva, pelo fato de representar um comprimento. Os babilônios tinham um método todo especial, sem símbolos e fórmulas, para achar dois números cuja soma e o produto são dados. Eles usavam a forma dissertativa para descrever o algoritmo, que envolvia apenas manipulações de dados. Allaire e Bradley (2001, p. 311) descreveram esse algoritmo.

O algoritmo é representado no quadro a seguir (fig.15).

1. Divida a soma S pela metade. $\frac{S}{2}$
2. O quadrado da resposta da parte 1. $\left(\frac{S}{2}\right)^2$
3. Subtraia o produto A do resultado da parte 2. $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$
4. A raiz quadrada do resultado da parte 3. $\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$
5. Acrescente a resposta do resultado da parte 4 à resposta da parte 1. $\frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$
6. Subtraia a resposta da parte 4 da resposta da parte 1, para determinar o outro valor. $\frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$

Figura 15 - Processo babilônico de resolução da equação quadrática.

> Pitombeira (2004) revela que, em pesquisas recentes, sobre a Matemática desse povo, alguns historiadores sugerem que os escribas babilônios chegaram a esse resultado, usando raciocínio geométrico. Pesquisas arqueológicas destacam um material achado por volta de 1700 a.C., na época de Hamurabi, o qual mostra que os babilônios resolviam uma grande variedade de problemas como, por exemplo: “Se a soma de dois é 20 e o produto é 96 quais são esses números” (idem, p.83)

Aproveite para resolver o seguinte problema pelo algoritmo mesopotâmico: A soma de dois números é 30 e o produto é 221, quais são esses números?

Essa “receita” vale para equações do tipo $x^2+bx+c=0$.

Segundo Fragoso (2000) os gregos resolviam equações do segundo grau por meio de construções geométricas. Os diferentes tipos de equações eram resolvidos de formas distintas. Não havia uma fórmula geral e os antigos não apresentavam a solução negativa (quadro IV).

Por exemplo, a equação $x^2-ax+b^2=0$ era resolvida pelo seguinte procedimento:

> Traçamos o segmento AB=a (fig.15), por P ponto médio de AB, levantamos o segmento perpendicular PE=b (raiz quadrada de b^2) e, com centro em E e raio PB, traçamos um arco que intercepte AB no ponto Q. A raiz desejada será dada pelo valor do segmento AQ (FRAGOSO, 2000, p.58).

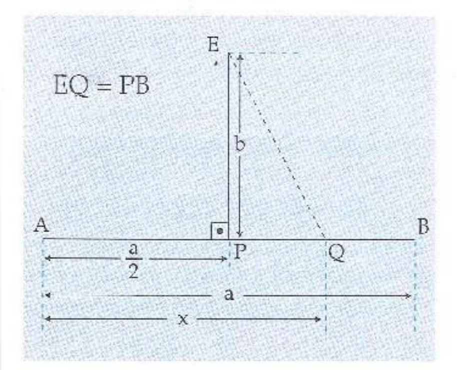


Figura 16 - Resolução geométrica.
Fonte: (FRAGOSO, 2000, p.58).

Para verificação resolva as equações a seguir pelo método usado hoje e pelo método geométrico. Compare os resultados (desprezando as imperfeições dos instrumentos).

a) x^2-13x+36=0

b) x^2-20x+36=0

c) x^2-20x+64=0

Quadro IV- Síntese histórica sobre os números negativos

O número negativo veio se tornar objeto de preocupação muito tempo depois. Os escribas do Egito e Mesopotâmia resolviam equações mas nunca consideravam a possibilidade de soluções negativas. O mesmo se pode dizer dos gregos. Os chineses "parecem ter sido capazes de tratar números negativos nos passos intermediários na resolução de equações", mas a nossa matemática tem as suas raízes nos estudiosos gregos. Na Europa os números negativos não eram bem aceitos pelos matemáticos até o final do século XVIII (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 97).

Nessa linha de raciocínio os chineses apresentam o seguinte problema: "no meio de um pequeno lago circular de 10 pés de diâmetro está plantado um junco vertical que se projeta para fora da água. Inclinando-o lateralmente, sem encurvá-lo, a sua extremidade atinge exatamente a borda do lago. Qual a profundidade da água?" (Idem)

Sabendo que eles consideravam a área do círculo como sendo o diâmetro" (BOYER, 1996, p. 134) resolva o problema proposto.

A seguir apresentamos uma atividade extraída do livro de Ochoviet et al (2011). No livro chinês do início do século XII, *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática, encontra-se o problema do bambu quebrado* (EVES, 1997, p. 249), cujo enunciado é o seguinte:

"Um bambu de 10 chih de altura é quebrado num ponto e toca o solo a uma distância de 3 chih da base do tronco", conforme mostra a figura abaixo.

A que altura ocorreu a quebra? (fig.17).

Figura 17 - Bambu quadrado.
Fonte: (OCHOVIET *et al*., 2011, p. 68).

A solução que acompanha esse problema chinês é a seguinte:

Tomar o quadrado da distância da base do bambu até o ponto em que sua parte superior toca o solo e dividir pelo comprimento do bambu. Retirar esse resultado do comprimento do bambu e dividir por 2 essa diferença obtida. Isso no dá a altura da quebra.

a) Você conseguiria interpretar a solução dada pelos chineses?
b) A solução dada pelos chineses coincide com a que você encontrou?

Um nome que merece ser considerado neste contexto de equações algébricas é al-Khwarizmi, matemático árabe (c.780-850 e.C.), natural de Khwarizm, hoje, Khiva, no Uzbequistão.

Trabalhou na Casa da Sabedoria em Bagdá sob a proteção do califa al-Mamun. O califa al- Rashid e seus filhos al-Mamun e al-Mutasin, que o sucederam foram protetores das artes e das ciências.

Entre os trabalhos de al-Khwarizmi constam um tratado sobre os numerais hindus e um livro sobre álgebra (Al-jabr wa'l muqabala) onde propõe a solução geométrica para as equações $x^2+10x = 39$ e $x^2 + 21 = 10x$ pelo método geométrico (BANDEIRA, 2013).

Pesquisadores registram duas formas de resolver a primeira delas.

Boyer, por exemplo, orienta dividir o número de raízes (10x) por 4 e construir a seguinte figura de área 39, isto é, $x^2 + 4 \times 2{,}5x = 39$ (fig.18).

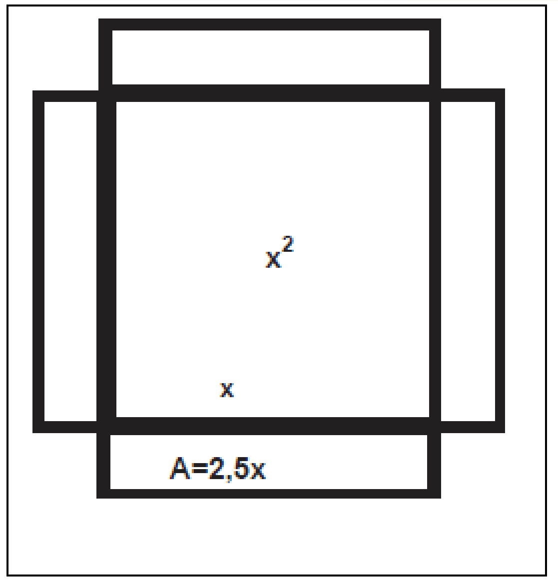


Figura 18 - Um quadrado de área x^2 e 4 retângulos de área 2,5x.

E depois o seguinte quadrado de área 64 (fig. 19). $39 + 4 \times (2{,}5)^2 = 64$

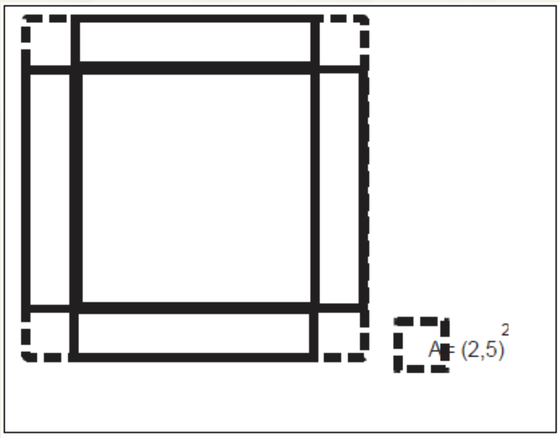


Figura 19 - Quadrado de área 39+25=64

Como o quadrado maior tem área 64 o seu lado mede 8 unidades. Essas 8 unidades são resultantes de $x + 2 \times 2{,}5 = x + 5$.

Se $x+5=8$ então $x=3$.

Pitombeira propõe outra solução:

> A solução é: tome a metade do número de raízes, o que neste exemplo é igual a cinco. Isso você multiplica por ele próprio; o produto é vinte e cinco. Adicione isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito e subtraia dela a metade do número de raízes, que é *cinco*. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava; o quadrado é nove (PITOMBEIRA, s.d., grifo nosso)

Como ficaria essa figura? A resposta seria a mesma?

Proposta de pesquisa: encontre uma figura para $x^2 + 21 = 10x$.

Um outro tipo de abordagem das equações algébricas é o que foi realizado pelos gregos. Devido às dificuldades em compreender os números, particularmente os irracionais, eles optaram por trazer tanto os problemas numéricos quanto os algébricos para o campo da geometria, em particular para a construções com régua e compasso. Em que consistia a “álgebra geométrica” utilizada pelos gregos?

Como os gregos faziam operações com medidas, com regua e compasso?

Vamos apresentar a seguir, de maneira sucinta, ilustrações de procedimentos utilizados pelos gregos para realizar algumas operações com números utilizando regua e compasso.

Se $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ dois números reais construtíveis então $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \beta$ e $\boldsymbol{\alpha} / \boldsymbol{\beta}$ também são construtíveis?

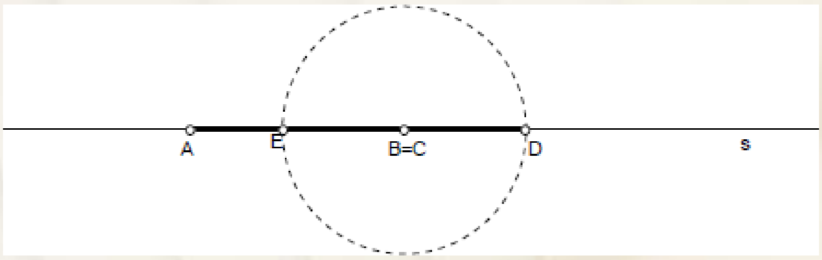


Figura 20

A figura 19 é ilustrativa da adição e subtração de números com régua e compasso. Nesse caso o segmento AB mede α e o raio BE mede β . Logo AD mede $\alpha + \beta$ e AE mede $\alpha - \beta$.

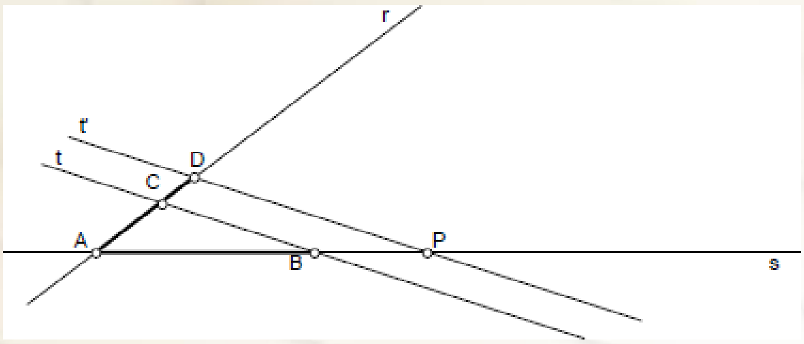


Figura 21

Na fig. 21, ao substituir as medidas dos segmentos *AB* , *AC* e *CD* por convenientemente por **α**, **β** e a unidade, utilizando-se o teorema da proporcionalidade de Tales pode-se obter os números **α** . **β** e **α** / **β**.

Sendo dados dois segmentos de comprimentos 1 e α, como os gregros construiam um segmento de comprimento √α ?

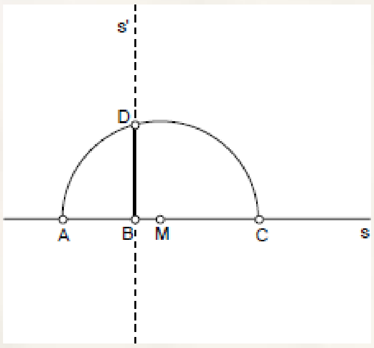


Figura 22

Na fig. 21, o segmento *AB* mede uma unidade de comprimento e *AC* mede α .

Por meio desses procedimentos os gregos conseguiam resolver equações do primeiro e segundo graus utilizando apenas régua e compasso.

Referências

AABOE. Asger. ***Episódios da História Antiga da Matemática***, Rio de Janeiro: SBM, 1984.
BANDEIRA, Francisco de Assis. Histórias da Matemática. *In*: ***Revista História da Matemática para Professores.*** Ano 1, no zero, mar 2013 (SBHMat).

BEKKEN, Otto B. ***Equações de Ahames até Abel***. Rio de Janeiro: GEPEM, 1994.

BERLINGOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando. ***A Matemática Através dos Tempos****:* um guia fácil e prático para professor e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BOYER, Carl B. ***História da Matemática***. 2.ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1996. BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais:*** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

EUCLIDES. ***Os elementos/Euclides***; tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. ***Introdução à História da Matemática***. 2.2d. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.

GASPAR, Maria Terzinha; MAURO, Suzeli. Explorando a Geometria Através da História da Matemática e da Etnomatemática. Minicurso ministrado no ***VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.***

Educação Matemática um Compromisso Social. Recife, 15 a 18 de julho de 2004.UFPE.

OCHOVIET, Cristina et al. ***Integrando la matemática com su historia em los processos de enseñanza***. Montevideo, Uruguai: Editora Psicolibros Ltda, 2011.

PITOMBEIRA, João Bosco. ***Revisitando uma velha conhecida***. Disponível em: <*http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf*> Acesso em: 19/11/2013.

REFATTI, Liliane Rose; BISOGNIN, Eleni. ***Aspectos históricos e geométricos da equação quadrática.*** Disc. Scientia. Série Ciências Naturais e Tecnológicas. S. Maria, v.6, n.1, p.79-95, 2005. Disponível em:< http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2005/Aspectos.pdf > Acesso em 17/11/2013

ROQUE, Tatiana. ***História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas***. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira de Carvalho. T***ópicos de História da Matemática.*** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

TAVARES, Agamenon Henrique de Carvalho. ***Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos***: sistemas lineares, determinantes e matrizes. Natal: UFRN/CCET/ Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2013 (Dissertação de Mestrado).

Padrões matemáticos no Ensino Médio: contextualizando a Matemática dentro da própria Matemática

Marcio Antonio da Silva[1]

Objetivos:

- Apresentar propostas de ensino de temas que normalmente não possuem ligações explícitas nos "tradicionais" programas do ensino médio, mas que, a partir do enfoque de organização curricular que será proposto, podem ser tratados de forma conjunta.
- Discutir a contextualização de conteúdos, por intermédio de uma abordagem pouco usual: o próprio contexto matemático.
- Propor uma forma diferenciada de ensino que não privilegia a memorização por parte dos estudantes, mas o estabelecimento de relações e a investigação de padrões, valorizando os conteúdos procedimentais e atitudinais.
- Elaborar, a partir dos assuntos estudados na oficina, um rol de atividades investigativas que poderão ser trabalhadas na prática profissional dos professores participantes.

Público Alvo: Professores de Matemática do Ensino Médio.

Participaram das discussões para a composição deste texto: Anderson Martins Corrêa; Camila de Oliveira da Silva; Cristiano da Silva dos Anjos; Deise Maria Xavier de Barros Souza; Genghis Carlos Bernal Netto; Jackeline Riquielme de Oliveira; José Wilson dos Santos; Júlio César Gomes de Oliveira; Marcio Antonio da Silva; Shirlei Paschoalin Furoni; Vanessa Franco Neto.

[1] INMA. UFMS. marcio.ufms@gmail.com

Por que investigar padrões matemáticos?

Antes de iniciar a apresentação de propostas de ensino que privilegiam a investigação de padrões matemáticos, faz-se necessária a compreensão do que fundamenta este pequeno projeto.

Esta fundamentação está ligada a discussões sobre *currículos*. Portanto, é muito importante refletirmos sobre o significado desta palavra, pois ela muitas vezes é utilizada indevidamente ou com vários sentidos.

Relacionar *currículos* com listas de conteúdos ou com um rol de competência e habilidades é algo muito comum. Porém, a meu ver, está longe de representar o que são *currículos*. No entanto, é importante esclarecer que as discussões sobre quais conteúdos devem ser ensinados em determinada etapa da escolaridade é um debate que **também faz parte** das discussões curriculares.

Para dar uma pequena ideia sobre a grande amplitude das questões levantadas quando se realizadas nessa área. Trata-se de um pesquisador espanhol chamado José Gimeno Sacristán. Ele possui vários livros traduzidos para o português. Em um deles, escrito em coautoria com Pérez Gómez, ele relaciona 16 tópicos investigativos da área curricular, sendo que boa parte deles trataremos nesta oficina:

Os problemas básicos que o tratamento do currículo agrupa dependem da orientação de que seja objeto, mas poderíamos resumi-los em torno das seguintes grandes questões:

Que objetivo, no nível de que se trate, o ensino deseja perseguir?

O que ensinar, ou que valores, atitudes e conhecimentos estão implicados nos objetivos?

Quem está autorizado a participar nas decisões do conteúdo da escolaridade? Por que ensinar o que se ensina, deixando de lado muitas outras coisas? Trata- se da justificativa do conteúdo.

Todos esses objetivos devem ser para todos os alunos(as) ou somente para alguns deles?

Quem tem melhor acesso às formas legítimas de conhecimento? Esses conhecimentos servem a quais interesses?

Que processos incidem e transformam as decisões tomadas até que se tornem prática real?

Como se transmite a cultura escolar nas aulas e como deveria se fazer? (Já que a forma de ensinar não é neutra quanto ao conteúdo a ser ensinado.)

Como inter-relacionar os conteúdos selecionados oferecendo um conjunto coerente para os alunos(as)?

Com que recursos metodológicos, ou com que materiais ensinar?

Que organização de grupos, professores(as), temos e espaços convém adotar? Quem deve definir e controlar o que é êxito e fracasso no ensino?

Como saber se houve sucesso ou não no ensino e que consequências tem sobre o mesmo as formas de avaliação dominantes?

Como podem se mudar as práticas escolares relacionadas com estes temas? (SACRISTÁN; PÉREZ GÓMEZ, 1998, p. 124-125).

A quarta questão proposta por Gimeno Sacristán diz respeito a um debate que, embora importantíssimo, ainda é pouco presente quanto falamos de conteúdos matemáticos para o ensino médio: quais conteúdos devem ser ensinados e quais devem ser deixados de lado?

Para tentar responder esta questão, um autor estadunidense chamado William Doll Jr. escreve um livro na década de 1990 que também foi traduzido para a língua portuguesa (1997). Nesta obra, Doll Jr. propõe quatro critérios para escolha e organização de conteúdos, não só de Matemática, e que deveriam orientar o debate em busca de responder questões como a proposta por Sacristán. Estes critérios são: riqueza, recursão, relações e rigor.

Nesta oficina, citarei apenas o primeiro critério construído por Doll Jr. (riqueza), por entender que este possui relações estreitas com a busca de padrões matemáticos, embora o autor cite poucos exemplos sobre como seria a escolha de conteúdos matemáticos usando este critério.

Doll Jr. (1997) se refere ao seucritério “riqueza” manifestando a profundidade e,ao mesmotempo, aberturaque uma proposta curricular deve ter e as negociações feitasentreprofessores e alunos:

Este termo [riqueza] se refere à profundidade do currículo, a suas camadas de significado, a suas múltiplas possibilidades ou interpretações. Para que os alunos e professores transformem e sejam transformados, um currículo precisat er a “quantidade certa” de indeterminância, anomalia, ineficiência, caos, desequilíbrio, dissipação, experiência vivida (p. 192).

Exemplificando como o critério “riqueza” poderia emergir nas diversas disciplinas, Doll Jr. (Ibid.) refere-se à Matemática abordando somente a questão da exploração e busca por padrões, utilizando os computadores como possibilidade para atingir esse objetivo:

A Matemática – um assunto em que a aritmética computacional desempenha apenas um pequeno papel – adquire sua forma de riqueza ao “brincar com padrões”. Obviamente, isso pode ser feito *par excellence* com os computadores

– instrumentos que qualquer currículo matematicamente rico deveria possuir – mas os computadores não são uma condição *sinequa non*. Podemos ver padrões, desenvolvê-los e brincar com eles em simples combinações numéricas (como nas séries de Fibonacci) ou na geometria euclidiana ou fractal. Separar um quadrado em triângulos retos é um exemplo do primeiro; o triângulo de Sierpinski é um exemplo do último. Em todos os níveis, do jardim de infância à Universidade, a Matemática pode ser tratada significativamente como “brincar com padrões” (p. 193).

Essa conexão entre Matemática e padrões não é uma novidade. Alguns anos antes de Doll Jr. publicar seu livro (o original, em inglês, foi publicado em 1993), o matemático estadunidense Lynn Arthur Steen publicou um artigo na Revista Science que provocaria grandes repercussões na Educação Matemática. No seu texto, Steen descreve a ciência matemática do século XX, ressaltando seus progressos e as linhas científicas que mais se destacavam. Na conclusão, o pesquisador define a Matemática como “a ciência dos padrões”:

A matemática é a ciência dos padrões. O matemático procura padrões em números, no espaço, na ciência, nos computadores, e na imaginação. [...] Aplicações da Matemática usam esses padrões para "explicar" e prever fenômenos naturais que se encaixam nos padrões. Padrões podem implicar outros padrões, muitas vezes gerando padrões de padrões. Desta forma, a matemática segue sua própria lógica [...] (STEEN, 1988, p. 240, tradução nossa).

Talvez esse ensaio, publicado por Steen, tenha tido maior repercussão pelo fato de, na época, ele ocupar a presidência da *Conference Board of the Mathematical Sciences*, uma organização que abrange dezessete sociedades científicas, entre elas a *American Mathematical Society* (AMS), a *Association of Mathematics Teacher Educators* (AMTE), o *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM) e o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Essa última sociedade foi responsável pela publicação de duas diretrizes curriculares que orientaram os assuntos e a forma de abordar os conteúdos nas escolas dos Estados Unidos nas últimas décadas: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989) e *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Os *Standards*, como ficaram conhecidos internacionalmente, trazem o estudo de padrões como uma ação recorrente nos documentos publicados.

O mais recente (NCTM, 2000) divide os conteúdos a serem trabalhados, durante os doze anos da educação básica estadunidense, em cinco blocos: (i) números e operações; (ii) álgebra; (iii) geometria; (iv) medidas; (v) análise de dados e probabilidade. Em todos esses blocos encontramos referência ao estudo de padrões. No entanto, parece-nos que a ênfase está no bloco algébrico, pois encontramos, dentre os próprios objetivos para o ensino deste assunto: compreender padrões, relações e funções.

Na etapa equivalente ao ensino médio brasileiro (*Grade 9-12*), os autores dos *Standards* propõem a generalização de padrões, abordando assuntos como funções e enfatizando o caráter recursivo de algumas delas (Idem, Ibidem, p. 296).

Os pesquisadores salientam que a Geometria também é um bloco no qual o estudo de padrões pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Para tanto, os estudantes devem descobrir padrões e formular conjecturas sobre os mesmos. O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica serviria como catalisador nesse processo (p. 309-310). O documento ainda enfatiza a importância de utilizar os padrões para produção de provas, bem como a necessidade de explorar diferentes representações para a análise de modelos, sejam eles numéricos, figurais, gráficos ou algébricos.

Antes mesmo da publicação da versão mais recente dos *Standards*, alguns pesquisadores também difundiram a importância dos padrões matemáticos em obras que se tornaram clássicas, como Devlin (1994) e Resnik (1997). Aliás, o filósofo da Matemática Michael Resnik, professor da *University of North Carolina at Chapel Hill*, talvez tenha sido o grande inspirador da ideia de descrever a Matemática como a ciência dos padrões, pois em seu artigo, publicado em 1981, encontramos fortes indícios dessa relação, a começar pelo próprio título: *"Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference"*.

O objetivo de Resnik (1981) não era provocar discussões curriculares sobre os conteúdos matemáticos a serem abordados na educação básica, mas sim defender seu ponto de vista filosófico realista, no qual busca olhar para a Matemática com seu caráter ontológico. Embora o pesquisador enfatize sua crença em uma corrente filosófica que entrou em crise já no século XV, sendo confrontada com o idealismo cartesiano (MENEGHETTI, 2003, p. 137), ele ressalta que sua proposta é "uma forma de realismo matemático" (RESNIK, 1997, p. 10, tradução nossa). Neste artigo, não entraremos em discussões filosóficas, bem como não assumiremos a postura realista de conceber a Matemática como uma ciência formada por objetos que existem independente dos sujeitos e da consciência (CHAUI, 2000, p. 306).

Orton (1999) menciona vários outros pesquisadores que também citam a importância de estudar a Matemática por intermédio das generalizações oferecidas pelos padrões:

Matemáticos e educadores há muito se entusiasmam com a importância do padrão em matemática. Sawyer (1955, p. 12)[4] afirma que "a matemática é a classificação e estudo de todos os padrões possíveis". Williams e Shuard (1982, p. 330)[5] sugeriram que "a busca de [...] ordem e padrão é uma das forças motrizes de todo o trabalho matemático com as crianças". Biggs e Shaw (1985, p. 1)[6] escreveram: "[...] A matemática pode ser pensada como uma busca por padrões e relações". Mottershead (1985, p. vii)[74] descreveu a matemática simplesmente como "o estudo dos padrões" (p. vii-viii).

Alguns grupos também foram constituídos para investigar essa estreita relação entre os padrões e a possibilidade de explorar situações que tornem a Matemática mais atrativa aos alunos da educação básica.

Na Inglaterra, ogrupo de pesquisa "padrão em Matemática" foi criado na Faculdade de Educação da Universidade de Leeds, no início de 1992, com o objetivo de"fornecer estrutura e suporte aos estudos de desenvolvimento da percepção das crianças, concepção e utilização de padrões na aprendizagem da matemática" (ORTON, 1993, p. 39, tradução nossa).

No Brasil, realizando uma busca simples, no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[8],por dissertações e teses que possuíssem as palavras "padrões", "educação" e "Matemática" no seu título ou resumo, encontramos sete trabalhos[9]. Quatro destas pesquisas foram orientadas pela professora doutora Silvia Dias Alcântara Machado do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Essa pequena investigação revela a concentração de estudos sobre o tema em um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e em poucos pesquisadores brasileiros. Também revela

[4] SAWYER, W. W. *Prelude to Mathematics*. Harmondsworth: Penguin, 1955.
[5] WILLIAMS, E.; SHUARD, H. *Primary Mathematics Today*. Harlow: Longman Group Limited, 1982.
[6] BIGGS, E.; SHAW, K. *Maths Alive!* London: Cassell, 1985.
[7] MOTTERSHEAD, L. *Investigations in Mathematics*. Oxford: Basil Blackwell, 1985.
[8] http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/Teses.do
[9] Modanez (2003), Nakamura (2003), Andrezza (2005), Almeida (2006), Perez (2006), Archilia (2008) e Santos (2008).

que as investigações envolvem, predominantemente, os padrões como forma de tratar aspectos algébricos abordados na educação básica.

Em Portugal, a professora Isabel Vale coordena, desde 2006, o projeto "Matemática e padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores" que tem por objetivo "estudar o alcance de uma abordagem curricular centrada no estudo de padrões, no desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes da escolaridade básica (JI-9)[10] e na formação de professores" (VALE *et al.*, 2008, p. 1).

Isabel Vale e seus colegas reiteram a observação de outros autores quanto à inexistência de uma definição para padrão que o caracterize como um conceito matemático. No entanto, alguns termos nos dão indícios de que determinada atividade, sequência didática, problema ou investigação pode tratar-se de uma proposta que prevê a análise e construção de padrões por parte dos estudantes: "regularidade, sequência, sucessão, repetição, lei de formação, regra, ordem, generalização, fórmula, variável, invariante, configuração, disposição, ritmo, motivo, friso, pavimentação" (Idem, Ibidem, p. 3).

Isto nos leva a refletir sobre qual ênfase deve ser dada na escolha de conteúdos: os próprios conteúdos *per se* ou atividades que explorem a riqueza da Matemática, utililizando-se dos conteúdos? Parece-nos razoável chamarmos de "conteúdos matemáticos" apenas e tão somente os objetos matemáticos passíveis de definição, ou seja, conceitos matemáticos. Padrão não é um conceito matemático, mas pode ser uma característica estrutural de vários conceitos.

Usando essa nova "lente", podemos justificar conteúdos tradicionalmente trabalhados no ensino médio, não pela importância intrínseca do tema, mas pela forma como é trabalhado. Por esta perspectiva, a metodologia e a organização dos assuntos têm um papel fundamental na justificativa da inserção ou exclusão de um tópico do rol de matérias abordadas nesta etapa da educação básica.

Em nossa tese de doutoramento (SILVA, 2008) é possível encontrar discussões mais detalhadas e aprofundadas sobre a escolha e organização de conteúdos matemáticos para o ensino médio.

Refletindo sobre as questões que abordamos anteriormente, sugerimos uma série de atividades que podem explorar padrões matemáticos no ensino médio ou até mesmo nos anos finais do ensino fundamental.

---

[10] Etapa escolar portuguesa equivalente ao Ensino Fundamental brasileiro.

Estas atividades foram elaboradas não para determinar prescrições (o que deve ser feito), mas para permitir que os professores possam, a partir delas, buscar novas conexões entre conteúdos que aparentemente não possuem ligações. Desta forma, os estudantes compreenderão as ligações dos próprios campos da Matemática, conhecendo-a como ciência contextualizada por si só, independente de suas aplicações no cotidiano ou em outras ciências.

Referências

SACRISTÁN, J. G.; PÉREZ GÓMEZ, A. I. *Compreender e transformar o ensino*. Tradução de: Ernani F. da Fonseca Rosa. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ALMEIDA, M. M. M. *Estratégias de generalização de padrões de alunos do ensino fundamental do ponto de vista de seus professores*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ANDREZZO, K. L. *Um estudo do uso de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra por alunos sem acuidade visual*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ARCHILIA, S. *Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões*. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

CHAUI, M. *Convite à Filosofia*. São Paulo: EditoraÁtica, 2000.

DEVLIN, K. *Mathematics: The Science of Patterns*. New York, NY: W. H. Freeman, 1994.

DOLL JR., W. E. *Currículo: uma perspectiva pós-moderna*. Tradução de: Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1997.

IMENES, L. M. *Problemas Curiosos*. São Paulo: Scipione, 1999.

MENEGUETTI, R. C. G. O conhecimento matemático no realismo e no idealismo: compreensão e reflexão. *Episteme*, Porto Alegre, n. 16, p. 137-149, jan./jun. 2003.

MODANEZ, L. *Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

NAKAMURA, O. Y. A. *Generalização de padrões geométricos: caminho para construção de expressões algébricas no ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author, 2000.

ORTON, A. Pattern in mathematics. In: WAIN, G. (Ed.). *British Congress on Mathematical Education 1993 Research Papers*. Leeds: The University of Leeds, 1993.

PEREZ, E. P. Z. *Alunos do ensino médio e a generalização de padrão*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

STEEN. L. A. The Science of Patterns. *Science*, v. 240, p. 611-616, 29 abr. 1988.

RESNIK, M. D. Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. *Noûs*, v. 15, n. 4 (Número especial sobre Filosofia da Matemática), p. 529-550. Oxford: Blackwell Publishing, 1981.

RESNIK, M. D. *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Clarendon, 1997.

SILVA, M. A. *Currículos de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos*. 248p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

ATIVIDADES

1. Quais os próximos termos das sequências apresentadas a seguir? Quais padrões podem ser explorados nesta atividade?

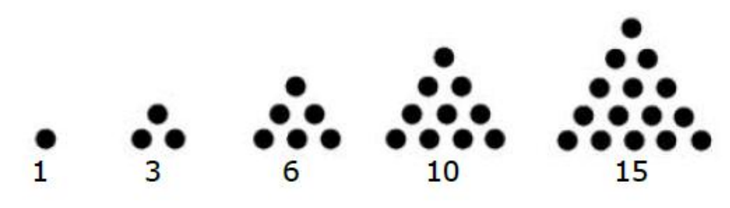
a) ANA, BETO, CARLA,__, _____
b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, , , .
c) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, , , .

*No item **a**, os estudantes podem sugerir diferentes respostas, respeitando alguma justificativa plausível. Algumas delas: a ordem alfabética da letra inicial (A, B, C,...), a quantidade de letras de cada nome (3, 4, 5, ...), o gênero (feminino, masculino, feminino,...), a quantidade de consoantes (1, 2, 3,...), entre outras.*

*No item **b**, a sequência apresentada é a da Fibonacci. É uma boa oportunidade para o professor trabalhar aspectos da História da Matemática, além de curiosidades, como o seguinte fato: "a soma dos 10 primeiros termos de qualquer sequência, como a de Fibonacci (os elementos, a partir do terceiro, são obtidos por intermédio da soma dos dois termos que o antecedem), pode ser obtida multiplicando o 7º termo por 11". Para provar que esta técnica é sempre válida, basta usar um pouco de álgebra:*

1º Termo		x
2º Termo		y
3º Termo	$x + y =$	$x + y$
4º Termo	$y + x + y =$	$x + 2y$
5º Termo	$x + y + x + 2y =$	$2x+3y$
6º Termo	$x + 2y + 2x + 3y =$	$3x+5y$
7º Termo	$2x+3y+3x+5y =$	$5x+8y$
8º Termo	$3x+5y+5x+8y =$	$8x+13y$
9º Termo	$5x+8y+8x+13y =$	$13x+21y$
10º Termo	$8x+13y+13x+21y =$	$21x+34y$
SOMA DOS TERMOS		**$55x + 88y$**
		$11(5x + 8y)$
		11 · 7º Termo

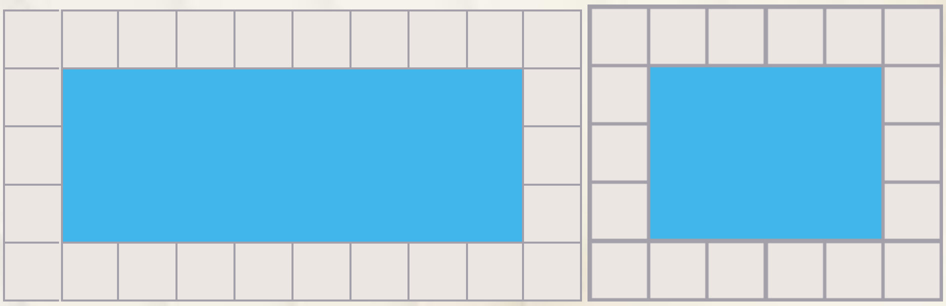
*No item **c**, o professor pode propor que os estudantes realizem algum tipo de disposição geométrica para obterem tal sequência. Isso porque a sequência envolvida é a dos números triangulares, que podem ser dispostos como a figura a seguir:*



Um interessante exercício é propor aos estudantes que encontrem a fórmula do termo geral da sequência. Um possível encaminhamento da solução é sugerir que o número de pontos de cada figura seja dobrado, formando retângulos de lados iguais a ***n*** *e* ***(n+1)****. Portanto, o número de pontos de cada triângulo é numericamente igual a metade do número de pontos de cada retângulo, ou seja, n.(n+1)/2, que é a fórmula do termo geral do número de pontos da sequência apresentada:*

$$p_{n}=\frac{n(n+1)}{2}$$

2. (NCTM, 2000, p. 282) Uma piscina retangular deve ser cercada por uma borda de azulejos quadrados de cerâmica, como mostram as figuras a seguir. Explicar em palavras, números ou tabelas, visualmente, e com símbolos, o número de ladrilhos que serão necessários para contornar piscinas de vários comprimentos e larguras.



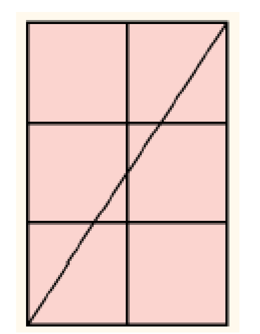
A sugestão, apresentada no enunciado, de promover a participação dos estudantes por intermédio de palavras, números, tabelas, visualmente ou com símbolos, é para valorizar outro tipo de participação dos alunos que não seja somente a forma escrita e "matematicamente" aceita, como dedução de fórmulas. Recomenda-se que o professor valorize, por exemplo, respostas orais como: "a soma do número de azulejos da borda maior, mais o número de azulejos da borda menor, mais duas unidades. Multiplicar por dois o resultado da soma". Isso equivale a resposta: ***(m+n+2).2****, sendo* ***m*** *o número de azulejos do comprimento da piscina e* ***n*** *o número de azulejos da largura da piscina. Outra resposta possível: elaborar uma tabela coma a apresentada a seguir:*

Azulejos no comprimento da piscina	***Azulejos na largura da piscina***	***Número total de azulejos para contornar toda a piscina***
2	*2*	*12*
4	*3*	*18*
8	*3*	*26*
M	***N***	***2M+2N+4***

3. (NCTM, 2000, p.349) Uma corda está esticada de um canto a outro em um piso pavimentado com ladrilhos quadrados. Se o piso é de 28 ladrilhos de largura e 35 ladrilhos de comprimento, sobre quantos ladrilhos a corda irá passar?

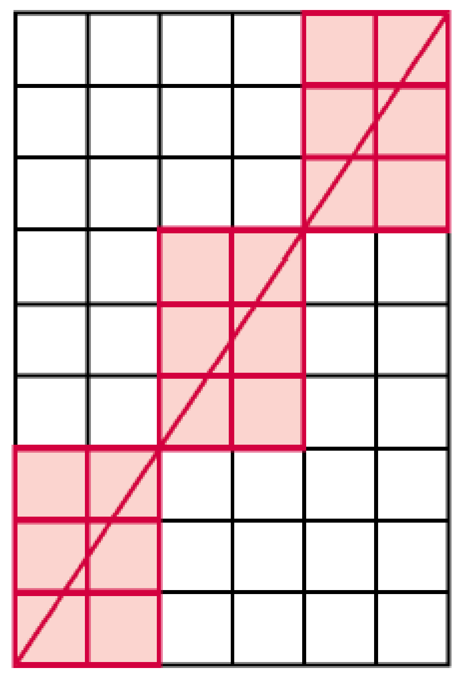
É possível pensar nas possibilidades de resolução de problemas com números menores para, após a compreensão do padrão envolvido, elaborar estratégias para a resolução do problema proposto.

Por exemplo, se o piso tivesse 2 ladrilhos de largura por 3 ladrilhos de comprimento, sobre quantos ladrilhos a corda passaria?



Portanto, a corda passaria por 4 ladrilhos, ou (2 + 3 – 1).

Se o piso tivesse 6 ladrilhos de largura e 9 ladrilhos de comprimento, sobre quantos ladrilhos a corda passaria?



Sobre 12 ladrilhos.

3 padrões 3x2.
Ou seja, 3.(2 + 3 – 1)=6+9–mdc(6, 9)

Finalmente, se uma corda está esticada de um canto a outro em um piso pavimentado com ladrilhos quadrados. Se o piso é de m ladrilhos de largura e n ladrilhos de comprimento, sobre quantos ladrilhos a corda irá passar?

m + n – mdc (m,n)

E, para o problema proposto: "uma corda está esticada de um canto a outro em um piso pavimentado com ladrilhos quadrados. Se o piso é de 28 ladrilhos de largura e 35 ladrilhos de comprimento, sobre quantos ladrilhos a corda irá passar?", teremos a solução apresentada a seguir:

28 + 35 – mdc (28,35) = 28 + 35 – 7 = 56 ladrilhos.

4. (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2005) Procure descobrir relações entre os números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19

Registre as conclusões que for obtendo.

Essa atividade foi proposta por João Pedro da Ponte e seus colegas, em escolas portuguesas, e ilustra uma metodologia de ensino intitulada "investigações matemáticas". A ideia central é propor situações abertas e, a partir delas, estimular a participação dos estudantes, formulando conjecturas, estabelecendo relações, dialogando entre eles e com o professor, o qual tem um papel fundamental: incentivar e promover as discussões e, sempre que possível, validar ou não as conjecturas levantadas pelos alunos, buscando uma sistematização do tema.

Só a título de ilustração, reproduzimos algumas tentativas de alunos portugueses, ao serem convidados a realizar a atividades proposta:

Algumas tentativas iniciais dos estudantes foram estabelecendo relações entre os números apresentados com potências e raízes quadradas.

Em seguida, relacionaram a soma de dois elementos de uma mesma linha que pertençam à terceira e quarta colunas encontrando-a na segunda coluna. Ex.: 2+3=5 ; 6+7=13.

A professora interveio: Por que é que não veem nas outras colunas?

Alunos: "A primeira com a terceira dá o resultado na terceira". "A segunda com a quarta aparece na primeira".

Resultado, após a sistematização da professora: A soma de dois números pares é um número par.A soma de dois números ímpares é um número par.A soma de um par com um ímpar é um ímpar.

Outra observação dos alunos: somando os números de uma mesma linha o resultado está sempre na terceira coluna.

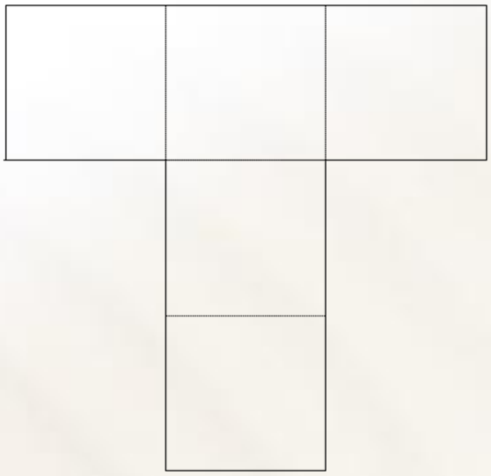
Esse fato foi demonstrado pelos próprios alunos, por intermédio do uso da álgebra:

$$4n + (4n + 1) + (4n + 2) + (4n + 3) = 4 \times 4n + 4 + 2 = 4 \times (4n + 1) + 2$$

É importante destacar que esses estudantes portugueses eram do ensino fundamental. Como é possível realizar um trabalho como esse? Uma das possíveis respostas é a necessidade de estimular a autonomia dos estudantes desde cedo, deixando com que eles elaborem suas próprias conjecturas, fornecendo espaço e tempo nas aulas de matemática, para que eles se sintam estimulados e participarem das mesmas e a comunicarem-se matematicamente com os colegas e com o próprio professor.

5. Descubra os padrões existentes nas estratégias de resolução das duas situações-problema descritas a seguir:

a) (IMENES, 1999) Esta figura em forma de T foi construída com 5 quadrados congruentes. Divida- a em 4 figuras congruentes.

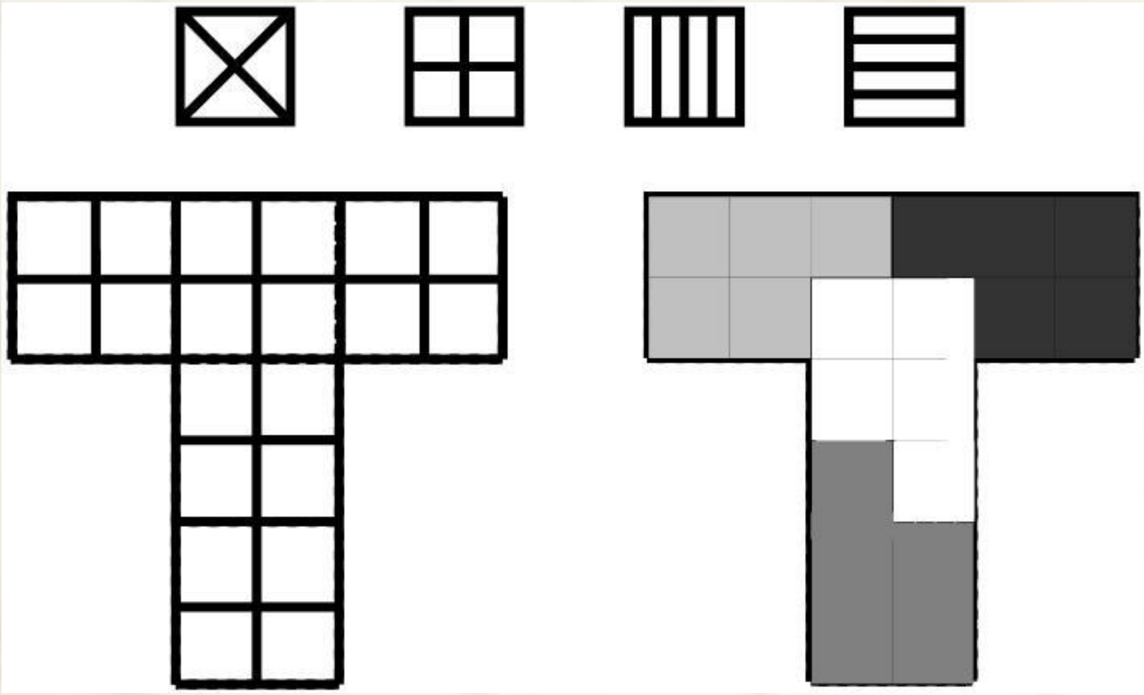


Uma das possibilidades de condução da solução do problema é propor que se divida cada quadrado na metade, obtenho dez peças. No entanto, dez não é divisível por quatro. Logo, deve-se pensar em outras formas de divisão de cada quadrado.

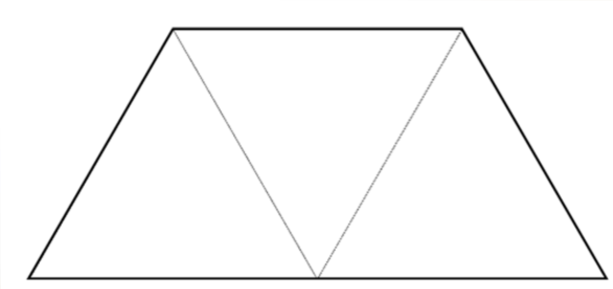
Dividindo cada quadrado em três peças iguais, obtenho quinze peças (não é divisível por quatro). Dividindo cada quadrado em quatro peças iguais, obtenho vinte peças (é divisível por quatro!).

Quais as maneiras de realizar a divisão dos quadrados?

Dê quadro maneiras, mas não é difícil perceber que a segunda maneira é a única na qual a disposição das peças será possível no quebra-cabeça proposto:

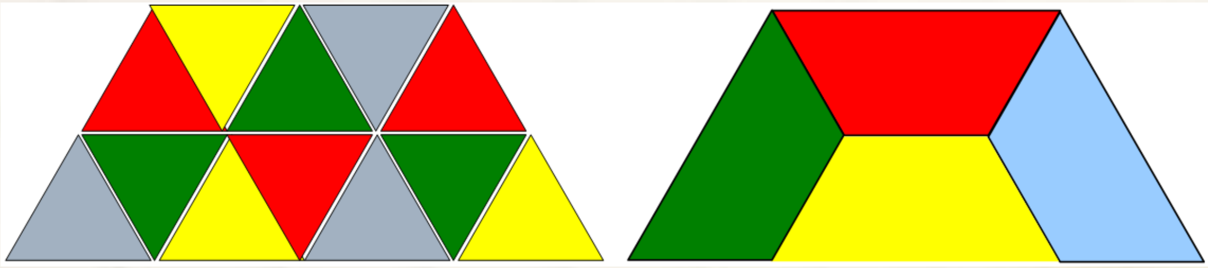


b) (IMENES, 1999) Este trapézio é formado por 3 triângulos equiláteros congruentes. Divida-o em 4 figuras congruentes.



Pensando analogamente ao problema anterior, se tenho três triângulos congruentes e quero obter quatro figuras congruentes devo encontrar o menor múltiplo de três que seja divisível por quatro, ou seja, doze. Ou então, em outra notação: m.m.c (3,4)=12.

A solução pode ser encaminhada por intermédio das figuras a seguir:



É recomendável que o professor valorize a busca e o encontro de uma estratégia geral. O grande objetivo do item **b** *dessa atividade é justamente esse: fazer com que os estudantes valorizem a busca por uma forma geral de solução de problemas desse tipo.*

Seria muito interessante deixar os alunos formularem os seus próprios problemas, a partir dessa experiência, elaborando figuras mais "sofisticadas" e encontrando as soluções possíveis, a partir da solução geral encontrada por eles.

Linguagens, Significados e Educação Matemática

A reta é a curva que não sonha
Manoel de Barros

Thiago Pedro Pinto[11]
João Ricardo Viola dos Santos[12]

Convidamos você, caro leitor e professor de matemática, a recriar algumas situações de sala de aula para problematizá-las e discuti-las ao longo desse caderno. Nosso intuito não é o de oferecer ***um*** modo de como trabalhá-las com seus alunos, mas sim apresentar alguns princípios, atitudes e considerações para que você possa constituir ***seus*** modos de trabalho em sua sala de aula.

Em muitas discussões a respeito da prática pedagógica de professores de matemática, há uma direção de ditar e apontar **a maneira** como deve-se proceder em sala de aula: *faça isso... faça aquilo... Você deve tomar essa atitude...* Outra fala comum, é a de apontar o que vocês, supostamente, fazem de errado e as coisas que não sabem em relação a conteúdos e metodologias: *O professor ainda insiste em trabalhar apenas com aulas expositivas... Os professores do Ensino Médio têm muitas dificuldades com Geometria Espacial...* O que pretendemos é o contrário: problematizar linguagens e significados mobilizados em algumas salas de aula de Matemática do Ensino Médio e, a partir disso, apresentar alguns ***princípios*** para que os professores organizem suas salas de aulas e constituam seus modos de lidar com os conteúdos, e com seus alunos. Esses princípios dão suporte e possibilitam que vocês possam construir suas práticas pedagógicas levando em consideração as especificidades de cada escola e de cada sala de aula em que trabalham. O modo como resolvemos escrever esse texto também se diferencia: é uma conversa com você, professor de Matemática do Ensino Médio do Estado do Mato Grosso do Sul.

Na sala de aula de Matemática, muitos e diferentes são os significados **produzidos** por professores e alunos e muitas vezes, essa diversidade de modos de pensamento é passada despercebida pelos professores. Vocês devem ter diversas experiências de dizerem "*x*" e seus alunos responderem "*y*". Como lidar com essa problemática? Como fazer com que os alunos e vocês sejam compreendidos? Como ler a atividade matemática dos alunos e, a partir dela,

[11] INMA. UFMS. thiago.pinto@ufms.br
[12] INMA. UFMS. jrviolasantos@gmail.com

possibilitar que eles aprendam outras ideias, conceitos ou procedimentos? Nossa intenção é tentar explicitar aspectos dessa problemática e responder, em partes, a essas perguntas, que nos servem como motivadoras nessa conversa.

Como pano de fundo, apresentaremos discussões de alguns casos de Geometria Analítica. Entretanto, essa temática nos serve apenas como uma exemplificação do nosso objetivo: conversar com vocês sobre alguns princípios e atitudes que possam auxiliar nos modos de lidarem com demandas das suas salas de aula. Em cada cena há um diálogo entre professores. Por fim, teceremos algumas considerações para colocar uma “vírgula” em nossa conversa e não um ponto final.

Conversas entre professores

Cena 01- Uma conversa dos professores José e Helena sobre a equação da reta.

Em mais um intervalo de mais um dia de aula daquela escola, enquanto engoliam o café...

<Helena> Pois é, José, hoje mais uma vez eu tentei trabalhar com meus alunos o modo de encontrar a equação de uma reta utilizando o determinante de uma matriz. Mais uma vez, constatei que eles não lembram nada desse conteúdo. A gente bate, bate, bate... Resolve vários exercícios e depois passa um tempo, pronto! Os alunos esquecem tudo. Quando perguntamos a eles o que lembram de matrizes e determinantes, as respostas são pontuais: *“ah, professora, matrizes é aquele jeito de escrever os números em tabelas: determinante é uma conta que a senhora fez aí e dá um número”.*

<José >Eu também compartilho com você essas angústias, Helena, eu também passo por isso. Mas escuta só, você tem um tempinho agora depois do intervalo?

<Helena> Tenho sim, José, hoje não ministro mais aulas. Por quê?

<José> Então, gostaria que você me mostrasse, como você trabalha o coeficiente angular da reta falando de determinantes de uma matriz.

<Helena> Claro, José, vamos esperar o pessoal entrar... (enquanto isso “batia o sinal”).

Então, eu começo falando para os alunos que a gente pode representar uma reta por meio de sua equação. Antes eu já discuti com eles que reta é um ente primitivo e que nós não definimos. Porém, falo e deixo isso claro, que podemos representar a reta por meio de sua equação. Eu digo aos alunos: *"Temos que ter quantos pontos para determinar a equação da reta?"*, eles respondem: *"Ah, professora dois pontos!"* Vamos então encontrar a equação da reta que passa por esses dois pontos: P (2,7) e Q (-1, -5). Vamos utilizar o determinante de uma matriz para encontrar essa equação. Então, nós vamos construir uma matriz que na primeira linha colocaremos x, y, na segunda linha colocaremos ponto P e na terceira linha colocaremos o ponto Q. Fica assim:

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fazendo os cálculos, José (e nesse ponto que os alunos mais se perdem), temos a equação da reta:

$$y = 4x - 1$$

Eu enfatizo com eles que o número que multiplica o x é o coeficiente angular, que indica a inclinação da reta em relação ao eixo x. Muitas vezes eu até faço gestos, por exemplo, inclinando o braço para mostrar que esse é o papel do coeficiente angular. E falo que o número "sem o x" (e falo assim para eles entenderem) é o coeficiente linear, aquele que "corta" o eixo y. Uso gestos também, para dizer que esse coeficiente é o que transita no eixo y. Levanto e abaixo o braço para mostrar o papel do coeficiente linear.

Eu penso que esse modo de encontrar a equação da reta é rápido e ágil. Porém, eles não lembram como calcular o determinante, isso é um problema.

<José > Helena, o modo como eu aprendi e trabalho com meus alunos é mais trabalhoso, porém eu acho que eles têm menos dificuldades. Vou pegar esses mesmos dois pontos que você tomou para te mostrar: P (2,7) e Q (-1, -5). Digo a eles que a primeira coisa é encontrar o coeficiente angular, por meio da fórmula: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Substituindo as coordenadas dos dois pontos, temos:

$$7 + 5 = m(2 + 1)$$

$$12 = 3m$$

$$m = 4$$

Com isso, eles têm o coeficiente angular. Depois peço para eles voltarem a essa fórmula e substituir um ponto e o coeficiente angular e com isso, encontrar a equação da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 7 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8 + 7$$

$$y = 4x - 1$$

<Helena> Sim.

<José> Helena, do meu jeito os alunos realizam dois procedimentos para encontrar a equação, pois primeiro eles precisam encontrar o coeficiente angular e depois encontrar a equação. Do seu jeito, penso que é mais direto.

<Helena> Concordo com você, José. Parece mesmo que o seu jeito é mais fácil, porém acho que dá mais trabalho. Entretanto, do meu jeito é mais direto, mas eles erram mais.

<José> Muito obrigado, Helena, pela conversa e ajuda. Vou tentar trabalhar desses dois modos na minha próxima aula e vamos ver o que dá.

Cena 02 – José insistente: a conversa com o professor Paulo

O professor José auxilia na coordenação da escola na parte da noite. Quando sobra um tempo (fato que nem sempre acontece) ele bate-papo com o professor Paulo, um velho amigo dos tempos da faculdade. José estava intrigado com algumas questões da sua conversa com Helena. Seguem alguns trechos da conversa que tiveram. Outros professores também participam deste bate papo matemático.

<José> Olá, professor Paulo, tudo bem? Chegou cedo!

<Paulo> Olá, Zé, tudo bem? Pois é, cheguei, vim substituir um colega que precisou faltar e aí já fiquei aqui na escola, tenho só a terceira agora.

<José> Paulo, queria aproveitar que você também é professor de matemática... hoje cedo estava conversando com a Helena, lembra dela?

<Paulo> Ah, sim, claro! Ela dá aula no 3° A.

<José> Então, estava perguntando pra ela hoje, como ela trabalhava com retas, coeficientes, essas coisas, sabe? Vi que cada um fazia de um jeito, como você faz?

<Paulo> Hum... deixa eu ver... bom, trabalhei com isso ainda ontem... Dei um exercício que pedia para achar a expressão linear da reta, no formato "y=mx+n", sabe? Passei na lousa, perguntei, os guris ficaram quietos, tive que ir explicando pra ver se saía alguma coisa.

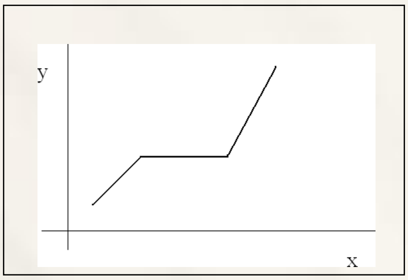


Figura 23

Fiz o desenho na lousa [e nesse momento faz um rascunho na folha], delimitei os espaços para a gente estudar um por um, em três partes. Os alunos ficaram olhando, meio sem saber o que fazer, perguntei para eles "o que ele quer que faça aí?"

<José> Já sei, ninguém falou nada!

<Paulo> [risos], isso mesmo! Aí fui lá, coloquei mais alguns valores no gráfico, falei pra eles: "Determine uma função do tipo 'y' igual a 'mx' mais 'n' igual a 'mx' mais 'n' e 'x' a área do intervalo".

<José> De primeiro grau...

<Paulo> Isso, então...

"Nós estamos querendo determinar a equação da reta exatamente nesse intervalo aqui (apontando para o intervalo no eixo "x" demarcado de 300 a 3800, o primeiro segmento de reta) não é isso? Ou seja, exatamente essa, a equação para esta reta aqui. Para 'x' maior ou igual a trezentos e menor que três e oitocentos".

<José> e aí eles fizeram?

<Paulo> nada, tive que ir fazendo... achei o "m", achei o "n" e pedi para eles montarem...

Falei para eles que cada vez que eu variava uma unidade, ou no caso uma centena, que no caso está colocado, ele vai sofrer uma variação no eixo “y”. Então, pra gente calcular o coeficiente angular, a gente vai fazer a variação em “y” pela variação em “x”, não é?

<José> Entendi, então você trabalha o coeficiente como variação?

<Paulo> Sim, o coeficiente angular é quanto o “y” cresce quando eu vario uma unidade no “x”.

<José> Interessante, mas e o coeficiente linear?

<Paulo> Bom, esse eu comento que é onde começa o “y”, ou seja, quando eu tenho o “x-0”

<José> Muito interessante, Professor Paulo, e uma forma diferente da que eu e a Helena trabalhamos.

Cena 03 – Célia entra em cena

Nesse momento, adentra a sala a Professora Célia.

<Célia> Olá, pessoal, tudo bem? O que há de tão interessante nessa matemática dos meus colegas, heim?

<José> Oi Célia, tudo bom? O Paulo está aqui me contando como trabalha com retas, coeficientes angular e linear, é bem interessante mesmo! Você, como faz?

<Paulo> Bom, pessoal, tocou o sino, preciso ir, depois vocês me contam a que veredito chegaram, até mais...

<José> Tchau Paulo, obrigado, boa aula.

Então Célia, como você faz?

<Célia> Ah, eu não me seguro muito em livro não, você sabé né? Esse meu jeitão eu quero mesmo é que o aluno entenda, **eu tento falar de um jeito que ele entenda**, não ficar naquele lengo, lengo que ninguém entende...

Poxa **a matemática está em tudo**, então tem que usar esse “tudo” para aprender matemática!

<José> Entendo, e como você fala?

<Célia> Ah, eu comento que **no canto da sala tem um ângulo reto**, noventa graus! Ali na beirinha da lousa passa uma reta e que ela vai embora lá pro infinito!

Falo do coqueiro, **que é como um segmento de reta** – um segmento gordinho, é verdade, mas um segmento **– ele começa e termina ali**, não é como **a reta que segue pro infinito**.
Outro dia eu falei isso e um aluno deu risada, falou:
"mas professora, o segmento pode ser gordinho? A senhora não tinha falado que a reta era uma dimensão só?"
Aí tive que explicar que o coqueiro é só um exemplo que podemos comparar com o **objeto matemático.** Que na verdade ele não tem espessura, ele só tem comprimento, por isso falamos que **ele tem só uma dimensão**: o comprimento!

<José> E eles perguntaram do ponto?

<Célia> Ah, sim, quando eu falo que o ponto não tem dimensão eles ficam doidos comigo [risos]: "mas eu estou vendo, professora, olha ali na lousa! Se ele não tem dimensão nenhuma como é que dá para ver ele?"
Foi engraçado, outro dia um aluno falou que um só não dava, mas se juntássemos um monte deles, formando uma reta aí já dava pra ver como se fossem as células, as moléculas!

<José> Moléculas? Interessante, e como você saiu dessa?

<Célia> Aí temos que vir e explicar toda aquela **ideia de representação**, que o que vemos na verdade é a "representação" do ponto. **O ponto de verdade é só uma ideia**, usamos a "marcação" para localizá-lo, para sabermos onde ele está.
Outro dia falei: "veja só esse 'ponto' que eu fiz na lousa com um giz, ele é muito maior que o ponto que você fez no seu caderno com o lápis, mas nenhum dos dois é **o verdadeiro ponto da matemática**, pois esses pontos dão para medir, se pegarmos uma lupa e formos ver no seu caderno, ele é muito grande, mas nos ajuda a 'pensar' no ponto da matemática, que é muito menor, infinitamente menor! Menor que qualquer molécula!".

<José> E a parte do coeficiente angular?

<Célia> ah, essa parte eles sempre enroscam também viu. Outro dia me perguntaram **se era o que subia e descia a reta.** Comentei que num certo sentido sim, no que se refere à inclinação, pois se estiver falando em manter a mesma inclinação e subir ou descer a reta em relação ao eixo "x", aí estamos falando do coeficiente linear.
Aí ele ficou achando que era o ângulo da reta. Tive que voltar, falar que na verdade é a **tangente do ângulo** formado pela reta e o eixo "x", tomado no sentido anti-horário.

<José> E eles lembravam o que era tangente?

<Célia> Não, tive que voltar para o triângulo retângulo, estabelecer as relações trigonométricas de novo, para que fizesse algum sentido. Um aluno comentou algo interessante, acho que você vai gostar.

<José> Ah, é?

<Célia> Ele falou que **o coeficiente angular é quanto você sobe quando anda pra lá** (para a direita).

Fui perguntando e ele falou de ladeiras:

"Ah, professora, que nem quando a gente vai subir uma ladeira, as mais íngremes você sobe um montão, rapidinho, agora quando ela é bem levinha, você anda um montão e não sobe muito, não é assim?"

Fiquei encucada com a fala dele, fizemos um desenho na lousa e fui tentando relacionar o que ele estava falando.

Tentamos relacionar assim, falamos em altura e um certo "afastamento" na horizontal em relação ao ponto inicial.

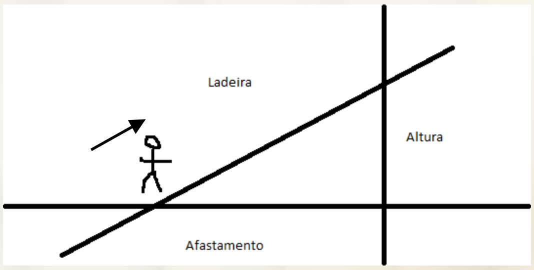


Figura 24

A tangente vai relacionar para a gente , neste caso, a altura com o afastamento, se tivermos mais altura com o mesmo afastamento temos uma ladeira mais íngreme, de maior inclinação, visto que a tangente é a relação entre o cateto oposto e o cateto adjacente, neste caso, a altura pelo afastamento. **Essa divisão que é o valor do coeficiente angular.**

<José> Nossa Célia, realmente muito interessante, e muito diferente também! Não sei se eu conseguiria relacionar assim.

Neste momento bate o sino para o intervalo.

<José> Bom Célia, vou lá olhar os meninos, senão já viu né! À noite eu fico na coordenação, preciso estar presente. Muito obrigado, adorei nossa conversa, vamos ver se fazemos mais isso... é muito bacana como dá para falar da mesma coisa de formas diferentes.

<Célia> Claro, quando quiser...

Cena 04 – Reencontro com Helena

Passados alguns dias, José continuou pensando sobre a conversa que teve com Helena a respeito de como determinar a equação da reta. A conversa que teve com Paulo e Célia foi muito interessante, porém nenhum dos dois tocou no ponto que intrigou: obter a equação por meio do determinante de uma matriz. Segue mais um diálogo entre José e Helena, dessa vez em um horário vago que os dois tinham em comum.

<José> Oi Helena, tudo bem? Como estão seus alunos?

<Helena> José, eu tô na batalha, tentando mostrar para eles que vale a pena estudar e que na matemática têm muitas coisas interessantes. Sempre tentando...

<José> Pois é, Helena, isso eu admiro em você, sempre preocupada, sempre tentando. Mas Helena, eu gostaria de voltar àquela conversa que tivemos sobre equação da reta. Na verdade, eu fiquei com algumas dúvidas em relação àquele jeito que você me mostrou, utilizando o determinante igualando a zero.

<Helena> Qual sua dúvida José, pode falar?

<José> Então, Helena, na verdade são muitas [risos]. Vou falar: Eu gostaria de saber de onde vem essa ideia de utilizar o determinante e uma matriz que você constrói utilizando três pontos da reta (sendo um genérico) e por que você iguala isso a zero. Não consigo entender isso!

<Helena> Espera aí, José, deixa eu ver se entendi sua pergunta, você quer saber o porquê de utilizarmos o determinante e o igualarmos a zero? É isso?

<José> Sim. Essa é uma das minhas dúvidas.

<Helena> Olha, José, eu acho que eu também não vou saber te responder isso, não. Eu sei que tem alguma coisa em relação ao fato de que os pontos de uma reta estão alinhados e que um modo prático e operacional para saber se os pontos estão alinhados é você construir uma matriz com os pontos, colocar o número “1” em cada uma de suas linhas (na última coluna) para deixá-la quadrada, calcular o determinante e igualar isso a zero. Agora, o porquê fazemos isso, eu não saberia te explicar. Essa explicação que eu tô falando eu encontro em alguns livros didáticos e eles apresentam dessa maneira.

<José> Então, Helena, essa é a minha dúvida.

Cena 05 – Pedro traz uma luz

Nesse momento o professor Pedro entra na sala.

<Pedro> Olá José, Helena, tudo bem? O que vocês estão discutindo aí?

<Helena> Oi Pedro, tudo bem. Eu tô conversando com o José aqui sobre algumas dúvidas em relação a um modo de determinar a equação de uma reta e que agora também é uma dúvida minha [risos].

<José> Então, Pedro, minha dúvida é a seguinte: De onde vem essa ideia de utilizar o determinante de uma matriz que você constrói utilizando três pontos da reta (sendo um genérico)? Por que você iguala isso a zero? Não consigo entender isso! Essa é uma das minhas dúvidas que eu estava contando pra Helena.

*<Pedro> Helena, José, eu conheço um jeito de mostrar **uma justificativa**, na verdade, uma sequência de procedimentos matemáticos para determinar a equação de uma reta por meio de determinantes. Não sei se eu vou ajudar vocês, mas deixe-me tentar. Eu digo para os alunos que um modo de justificar essas questões é voltar a um exercício muito comum, no qual temos as coordenadas dos pontos de um triângulo e precisamos encontrar sua área. Geralmente eu começo essa explicação determinando a equação da reta por meio do determinante igual a zero mesmo, de maneira direta, sem dar muitos detalhes e depois faço uma relação desse procedimento com esse exercício da área do triângulo.*

<Helena> Pedro, então você começa da equação e depois vai para área do triângulo?

<Pedro> Isso!

<José> Interessante, continue! É interessante ver como um professor organiza uma explicação, quais palavras que usa, como elabora sua sequência de argumentos para explicar para os alunos.

*<Pedro> Então, eu começo do modo como isso se apresenta nos livros didáticos do Ensino Médio mesmo, falando para os alunos o seguinte: Sabemos que em uma reta todos os pontos são colineares, ou seja, todos os pontos estão alinhados. Assim, dada uma reta, podemos determinar sua equação geral partindo do fato de **que quando os pontos de uma reta estão***

alinhados, o determinante de uma matriz formada com esses pontos é igual a zero*. Eu traço uma reta e destaco dois pontos, por exemplo, D(2,3) e E(4,6) e um ponto genérico P(x,y). Faço esse desenho:*

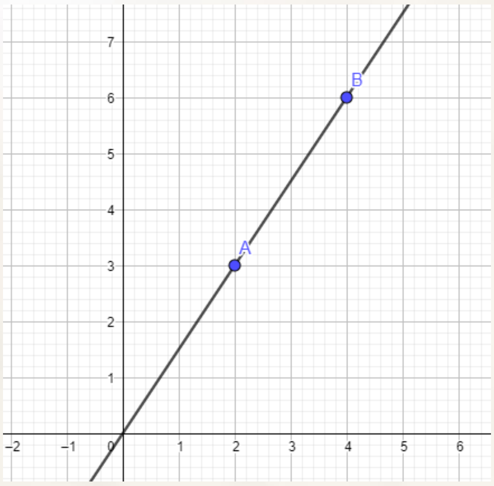


Figura 25 – Gerada com Geogebra

<Pedro> Enuncio a ***condição de alinhamento*** *e esboço a matriz com esses três pontos:*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<Helena> Uma coisa legal de se fazer para justificar o zero é partir do raciocínio contrário, às vezes faço assim...

<José> Como assim “do contrário?”

<Helena> Eu pego três pontos que sei que estão alinhados: na horizontal, na vertical, ou na diagonal principal e jogo numa matriz e peço para encontrarem o determinante: *pimba*! Sempre dá zero!

<Pedro> Isso! Aí eu completo essa matriz com o número 1 nas três linhas para que ela fique quadrada e assim eu possa resolver o determinante. Nesse caso, fazendo os cálculos chegaríamos a seguinte equação:

$$y = \frac{3}{2}x$$

<Helena> Eu também faço parecido como você fez, Pedro. Até aí tudo bem!

<Pedro> Feito isto, digo a eles que agora eu vou mostrar um jeito de explicar de onde vieram esses procedimentos, ou seja, eu mostro ***um modo*** *de justificar esse processo de*

encontrar a equação de uma reta por meio do determinante igual a zero. Acho até que está relacionado com o que você faz, mas acho que tem algo a mais.

<Helena> sim, pois só mostro que dá zero e ponto, passamos adiante!

<Pedro> Então, eu começo recordando um exercício em que o enunciado fornece as coordenadas dos pontos de um triângulo e pede para determinarmos sua área. Um exemplo desse problema seria mais ou menos assim:

Dada a figura a seguir, determine a área do triângulo.

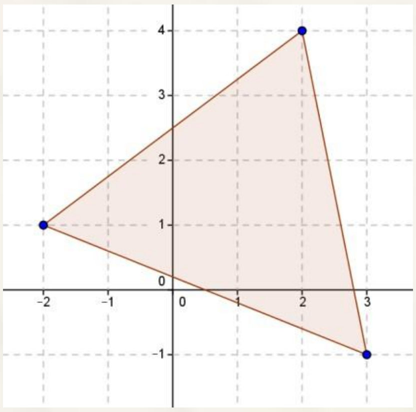


Figura 26

<Pedro> Temos uma fórmula que nos permite determinar a área, $A = \frac{1}{2}|D|$*, sendo que os elementos dessa matriz são as coordenadas dos pontos do triângulo. O determinante está em módulo, pois como estamos trabalhando no plano e nossos pontos têm duas coordenadas,* ***precisamos completar esses pontos com uma terceira coordenada para termos uma matriz quadrada*** *e tornar possível o cálculo do determinante. Desse modo, completamos a matriz com o número "1" para que ela fique quadrada. Com isso, podemos encontrar a área do triângulo (de um modo semelhante que fizemos em relação à reta).*

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

<José> Olha, Pedro, você já sanou uma das minhas dúvidas. Então, na verdade, "completamos" (não sei se posso falar assim) a matriz com o número "1" pelo simples fato de que precisamos completar a matriz para que possamos calcular o determinante, é isso? Mas, Pedro, por que utilizamos o número "1"? Não pode ser outro?

<Pedro> Calma lá José, já chego nesse ponto. Então, em relação a completar as coordenadas dos três pontos com o número "1" eu falo que quando acrescentamos essa terceira coordenada a cada um dos pontos do triângulo, estamos trabalhando no espaço em R^3. Isso é um recurso matemático, um modo de proceder para utilizar uma ferramenta útil (nesse caso, o determinante) e encontrar o que desejamos: a equação da reta. É interessante mostrar geometricamente. Geralmente eu faço da seguinte forma:

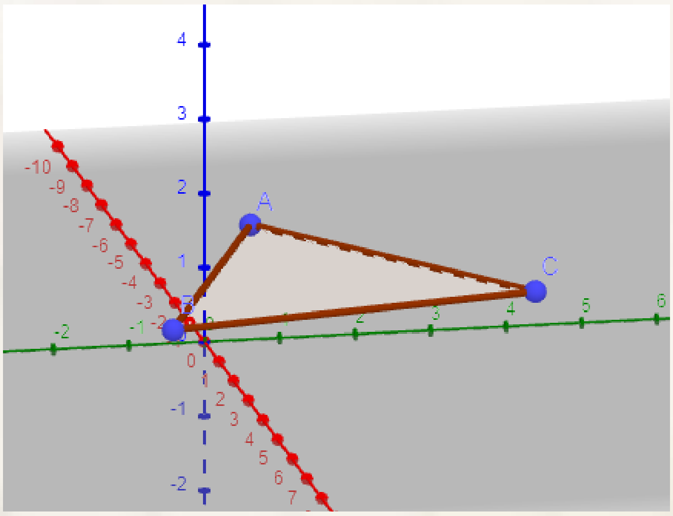


Figura 27

<Helena> Olha, isso é muito legal! Eu nunca tinha pensado nisso...

<Pedro> Outra coisa muito importante é deixar claro que estamos operando no espaço e não no plano, pois muitas vezes os alunos olham para esse número "1" apenas como um acessório, como um número que cumpre a exigência de a matriz ser quadrada para realizarmos seu determinante.

<José> eu costumava dizer que era o elemento neutro da multiplicação.

<Helena> é... isso facilita as coisas!

<Pedro> Quando colocamos o número "1" como a terceira coordenada, que é referente ao eixo "z" da terna "x", "y" e "z", nos três pontos, é o mesmo como se estivéssemos trabalhando na mesma altura, ou seja, num plano situado a uma unidade acima do plano xXy.

<José> Eu dizia que era por conta da "heurística".

<Helena> Como assim, heurística?

<José> Heurística, na tentativa de resolver algum problema, se tenta várias coisas e, de repente, uma funciona e "pimba", achamos um modo, testamos esse modo, fazemos ele algebricamente para ver se funciona com qualquer valor e, se sim, pronto! Temos um modo de resolver, mesmo que não se justifique de outra forma, ou melhor, se justifica pelo seu funcionamento, são coisas análogas, miméticas!

<Helena> Miméticas?

<José> Sim, tem o mesmo comportamento, coisas que posso igualar, mas que vem de “locais diferentes”.

<Helena> hum, entendi, mas será que é isso mesmo, Pedro? Pois se colocássemos o 2 no lugar do um, apenas subiríamos a figura, e a área do triângulo não iria mudar, mas o determinante muda, não muda? Olha, continua a dar 11,5 a área.

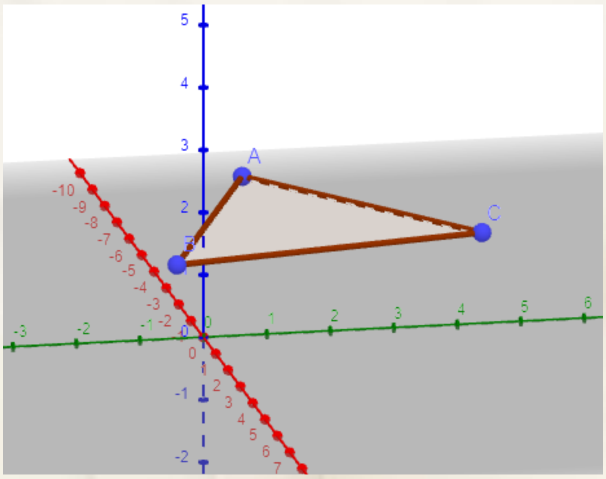


Figura 28

Será que não valeria dar uma olhada para a Geometria Analítica no espaço, no R^3 (RxRxR), será que por lá não temos alguma luz que nos ajude? Vou pesquisar...

<Pedro> É, Helena, agora você me pegou, acho que tem mais coisa aí...

[dias depois]

<Helena> Olá, pessoal, tudo bem? Fui olhar aquela questão que falamos, fiquei intrigada, vi algumas coisas com vetores...

<Pedro> Ah, é? O que encontrou, apareceu o 1?

<Helena> Quase isso! Vi que quando colocamos as coordenadas de três pontos em uma matriz e calculamos o determinante, estamos fazendo o que chamam de *produto misto*.

<José> Ah, sim, me recordo, é o produto vetorial com o produto escalar, isso?

<Helena> Isso mesmo! E no livro[13] falava assim: ao calcularmos o módulo do produto misto de três vetores [u, v, w], estamos calculando o volume do paralelepípedo cujas arestas são os vetores u, v e w, como na figura:

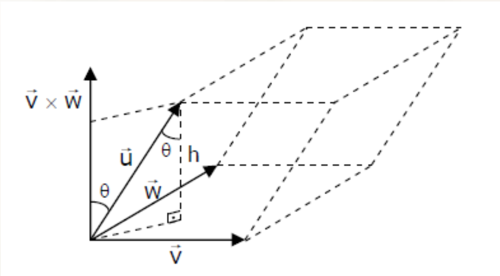


Figura 29

Onde a área da base é o produto vetorial de w e v e a altura é |u|·cos θ, já que tem que ser perpendicular a base.

<Pedro> E o triângulo que queremos é o formado pelas extremidades dos vetores, isso?

<Helena> Isso mesmo! No mesmo livro o autor também fala que podemos calcular o volume do tetraedro que aparece ali como sendo 1/6 do volume do paralelepípedo. Mais ou menos assim:

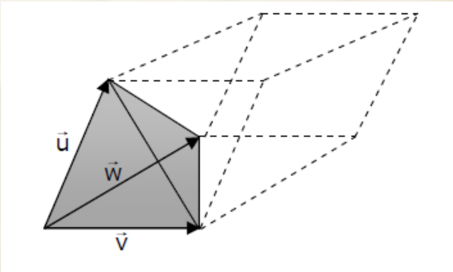


Figura 30

<José> Bom, essa é mais fácil de identificar, dá para cortar o paralelepípedo ao meio, formando um prisma de base triangular (esse triângulo é formado pelos vetores w e v e o seguimento que une suas extremidades), aí podemos pensar que o volume desse tetraedro é um 1/3 do volume desse prisma, ou seja, 1/3 da metade, o que nos dá aquele 1/6 que você falou! Mas, e agora? E o triângulo, até agora só falou em volume!

<Helena> Vamos lá, temos que o volume desse tetraedro é 1/6 do volume do paralelepípedo, que pode ser encontrado pelo determinante da matriz, mas como surge a área do triângulo?

[13] CÁLCULO VETORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA de Luiz Francisco da Cruz – Departamento de Matemática – Unesp/Bauru. Disponível em <http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/Material_Didatico.htm>

Agora é fácil, podemos pensar que esse tetraedro que estamos trabalhando tem como base justamente o triângulo de nosso interesse:

$$V_{tetraedro} = \frac{V_{paralelepípedo}}{6}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{Ab.h}{3}\ (volume\ de\ pirâmides\ em\ geral)$$

$$\frac{Ab.h}{3} = \frac{V_{paralelepípedo}}{6}$$

daqui temos que: $Ab.h = \frac{V_{paralelepípedo}}{2}$

<Pedro> hum, como o volume do paralelepípedo é dado pelo determinante, já começa a se parecer com a fórmula.

<Helena> Sim, mas temos aqui ainda a altura!

<José> Verdade, qual seria a altura nesse caso? O “1”, não é?

<Helena> Bom, se os três pontos estão no mesmo plano, que é z=1, como disse o Pedro outro dia, e o vértice que me dá a altura está na origem, então a altura é 1.

Aí temos que: $Ab.1 = \frac{V_{paralelepípedo}}{2}$

ou, simplesmente: $Ab = \frac{V_{paralelepípedo}}{2} = Ab = \frac{|D|}{2}$ que é o queríamos!

<José> Bom, mas então quer dizer que eu poderia colocar qualquer valor, fora o zero é claro, lá na minha matriz? Como o dois que você tinha sugerido?

<Helena> Exatamente, o que acontece é que o valor que você coloca lá é a altura do seu tetraedro, depois, para achar a área da base teria que dividir por ele, já que:

$$Ab.h = \frac{|D|}{2},\ Ab.2 = \frac{|D|}{2} \rightarrow ab = \frac{|D|}{4}$$

A conta fica fácil porque colocamos o mesmo valor de z para os três pontos, assim a altura é o próprio z escolhido, o triângulo fica paralelo ao plano xXy.

<Pedro> Verdade, bom, poderíamos dizer então que:

$Ab.h = \frac{|D|}{2}$ *, onde a matriz é* $\begin{vmatrix} x_A & y_A & h \\ x_B & y_B & h \\ x_C & y_C & h \end{vmatrix}$

<Helena> Isso mesmo!

<José> Muito bem, pessoal, essa eu não tinha visto em livro nenhum!

<Pedro> Muito legal!

<Helena> José, você havia comentado que tem um outro modo de justificar essa fórmula que usa o determinante, acho que usando geometria plana, que é mais acessível aos alunos, como era?

<José> Sim, usando trapézios, é aquilo que eu falei do **mimético**, dá para mostrar que é igual e que funciona para quaisquer valores.

<Pedro> Sim, esse aparece em alguns livros, acho que dá para fazermos juntos!

<José> Sim, vamos pegar um exemplo qualquer, os pontos (1,2) (2,4) e (4,3):

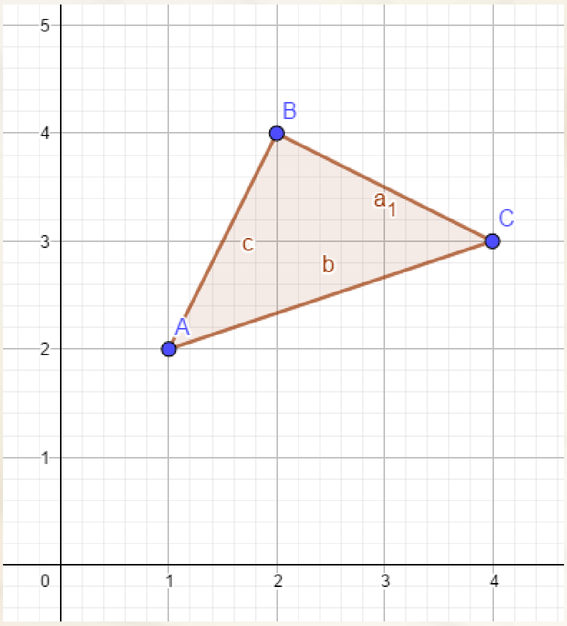


Figura 31

<Pedro> Vamos destacar 3 trapézios aqui, isso mesmo?

<José> isso!

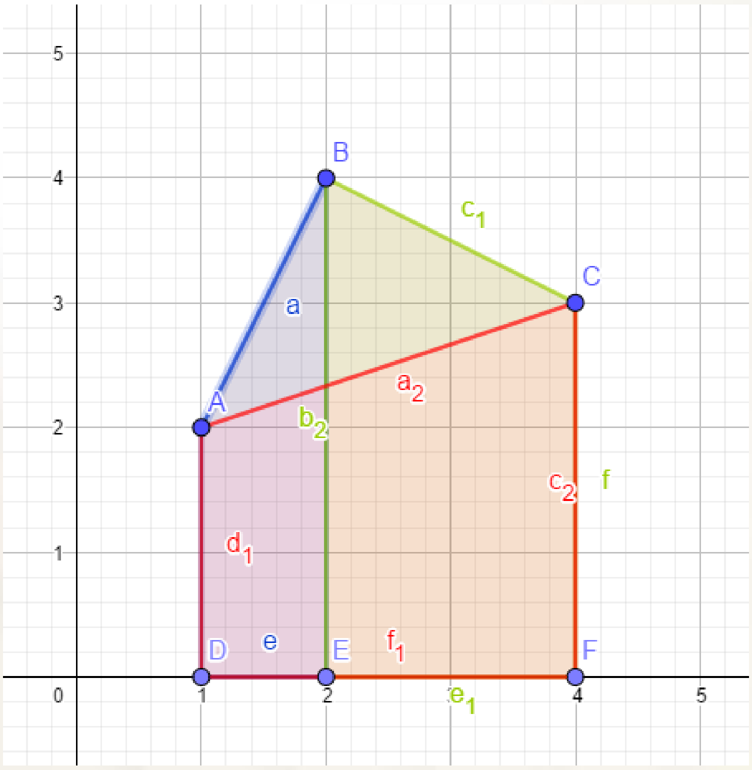


Figura 32

<Helena> Sim Pedro, conseguimos ver sem problemas (um trapézio azulado DABE, um esverdeado EBCF e outro avermelhado DACF).

<Pedro> Vamos, então, fazer a seguinte operação com as áreas desses trapézios. Se eu adicionar a área do trapézio 1 (A1) azulado, com a área do trapézio 2 (A2) esverdeado e subtrair a área do trapézio 3 (A3) avermelhado, eu chego na área do triângulo (A) – ABC do início do nosso problema. Meu intuito é depois relacionar todos esses pontos com os lados dos trapézios, dos quais temos as medidas que são dadas em relação às coordenadas dos eixos x e y.

<José> Pedro, será que não fica bem bacana mostrar para os alunos essas relações em um software de geometria dinâmica, por exemplo, o Geogebra? Eles podem construir essas operações com as áreas dos trapézios.

<Pedro> Eu nunca tentei isso Paulo, mas concordo com você que para os alunos isso deve ser muito bacana. Podemos tentar qualquer dia. Algebricamente, seria assim:

$$A = (A1 + A2) - A3$$

Logo, teremos a seguinte fórmula para as áreas dos trapézios:

$$A = \left(\frac{(B+b).h}{2} + \frac{(B+b).h}{2}\right) - \left(\frac{(B+b).h}{2}\right)$$

Substituindo em relação aos pontos que temos:

$$A = \left(\frac{(AD+EB).DE}{2} + \frac{(EB+FC).EF}{2} - \right) - \left(\frac{(AD+FC).(DF)}{2}\right)$$

Substituindo, novamente, agora com as coordenadas de cada ponto de cada lado dos trapézios, temos:

$$A = \left(\frac{(y_a+y_b).(x_b-x_a)}{2} + \frac{(y_b+y_c).(x_c-x_b)}{2} - \right) - \left(\frac{(y_a+y_c).(x_c-x_a)}{2}\right)$$

<Helena> Interessante que isso não é tão sofisticado, difícil de entender. É apenas trabalhoso.

<José> sim, acho que os alunos dão conta de fazer!

<Pedro> É um pouco trabalhoso mesmo, Helena...Continuando, eu posso colocar o número $\frac{1}{2}$ *em evidência:*

$$A = \frac{1}{2}\left[\left((y_a+y_b).(x_b-x_a) + (y_b+y_c).(x_c-x_b)\right) - \left((y_a+y_c).(x_c-x_a)\right)\right]$$

<José> hum, aqui já aparece o $\frac{1}{2}$!!

<Pedro> Isso, aqui já aparece o $\frac{1}{2}$*, aparece da fórmula. Os alunos já exclamam "Ahhhhhhhh" quando percebem isso, parece que eles estão descobrindo, inventado a fórmula.*

<José> E eles adoram essas partes, pois muitas vezes a matemática parece mágica [risos].

<Pedro> É verdade, José. Agora vem o que eu acho mais intrigante. A gente pode escrever essas operações de várias maneiras. Assim, vamos escrever de uma forma que fique a mesma quando fazemos o determinante de uma matriz 3x3, na qual seus elementos são esses pontos. Essa é a sacada e o que muitas vezes ninguém nos diz.

$$A = \left(\frac{(y_a+y_b).(x_b-x_a)}{2} + \frac{(y_b+y_c).(x_c-x_b)}{2} - \right) - \left(\frac{(y_a+y_c).(x_c-x_a)}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_b & 1 \end{vmatrix}$$

<José> Tá aí Helena, chegamos ao determinante.

<Pedro> Deixa eu só terminar José...

<José> Continue, continue...[risos]

<Pedro> Calculando o determinante, temos:

$$A = \frac{1}{2}(x_a y_b + x_b y_c + x_x y_a - x_c y_b - x_b y_a - x_a y_c)$$

<Helena> Então, né Pedro, mas aí que está a minha pergunta, parece que não há uma justificativa, não é? **É usada a matriz porque funciona**! É como uma ferramenta, não? Quase uma coincidência...

*<Pedro> Em certo sentido sim, é interessante e muito importante frisar essa ideia de que utilizar uma matriz e calcular seu determinante para escrever essas operações **é um recurso para facilitar nossos cálculos**. O que acontece é que muitas vezes não é dito é o fato de que é apenas um recurso facilitador, memorialístico para realizarmos esses cálculos. **Há uma equivalência em relação a calcular todos esses produtos notáveis e calcular o determinante de uma matriz**. E a gente se aproveita disso [risos].*

Os livros chamam isso de "recurso mnemônico", que significa um conjunto de técnicas para facilitar e auxiliar o processo de memorização. Nesse caso, é bem aplicado, pois é muito mais fácil utilizar o determinante de uma matriz do que realizar todos esses cálculos em relação a esses produtos notáveis toda vez que vai fazer.

<Helena> Nossa, Pedro, eu não sabia que tinha um nome para isso. Essa explicação também que, de certa forma, é uma coincidência e que utilizamos o determinante para facilitar nosso modo de operar eu também desconhecia. Eu mostrava que dava certo e pronto...

<José> É aquela coisa Helena, com esse monte de aula que nós damos, entramos no modo automático e nem nos questionamos mais sobre muitas coisas que fazemos. Por isso é muito bom conversar com outros professores, para trocarmos ideias, ajudar uns aos outros... isso também nos dá um repertório de "falas" sobre essas coisas, às vezes é importante conhecermos modos diferentes de explicar o conteúdo.

<Pedro> Helena, também confesso que depois de um bom tempo que eu aprendi essas coisas. Dei muitas aulas falando de uma maneira mecânica sem muitas explicações. Mas vamos voltar ao nosso foco, que é apresentar uma justificativa matemática para encontrar a equação de uma reta por meio do determinante de uma matriz, relacionando com um exercício no qual temos que encontrar a área de um triângulo quando temos seus três pontos.

<Helena> Verdade, Pedro, esse foi apenas um desvio que já rendeu muito [risos].

<Pedro> Podemos construir o seguinte triângulo:

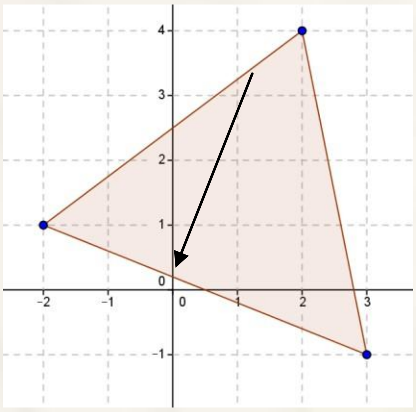


Figura 33

*'pegamos' o ponto C (2,4) e 'puxamos' para o lado AB do triângulo, meio que **fazendo com que sua área fosse igual a zero**, teríamos uma reta na qual os pontos A, B e agora o C fazem parte dessa reta, o que equivale a dizer que eles estão alinhados.*

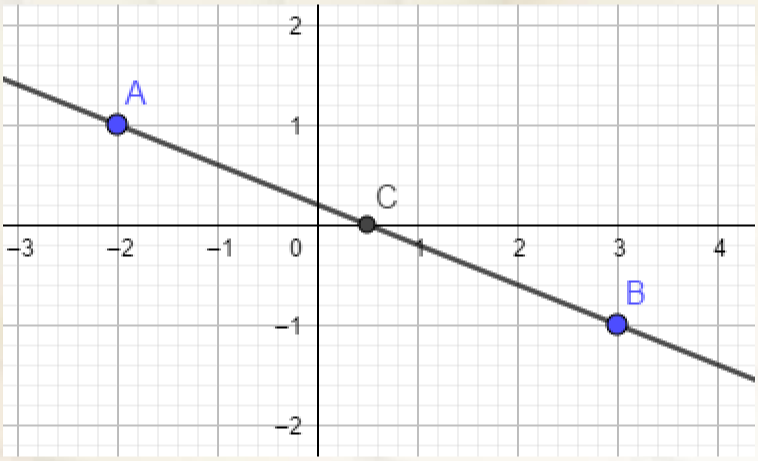


Figura 34

<José> Ah, tá aí, Pedro. Entendi o porquê é igual a zero. Matei a xarada.

<Pedro> Dessa forma, eu mostro uma justificativa para esse procedimento que determina a equação de uma reta por meio do determinante de uma matriz com pontos da reta, igual a zero. Para encontrar a área de um triângulo por meio de suas coordenadas, fazíamos:

$$A = \frac{1}{2}\,|Det|$$

$$A = \frac{1}{2} Det \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, para determinar a equação de uma reta, temos a área igual a zero, pois é uma reta e não tem triângulo:

$$Equação\ da\ reta: \frac{1}{2}\,|Det| = 0 \rightarrow Equação\ da\ reta: |Det| = 0$$

Pois, dividindo ambos os lados por $\frac{1}{2}$*, temos que o determinante da matriz é igual a zero, ou seja,* |Det|=0. *Um detalhe é que neste caso, eu utilizo dois pontos dados e um ponto genérico, pois eu quero determinar a equação da reta. Coloco a terceira coordenada para que a minha matriz fique quadrada e assim possa fazer o determinante. Aqui eu uso as mesmas justificativas em relação a trabalhar "no espaço" que apresentei no começo para você.*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Outro detalhe é que neste caso eu ***posso colocar qualquer número no lugar do 1****, pois chegarei sempre a mesma equação. Uma justificativa é dizer que é uma propriedade do determinante, a qual diz que se multiplicar ou dividirmos uma linha ou coluna inteira por um número, o determinante será também multiplicado ou dividido por esse número. Como no nosso caso o resultado do determinante é zero, não altera em nada. Por exemplo, se eu colocasse o número 10.*

$$\begin{vmatrix} x & y & 10 \\ -2 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 10.1 \\ -2 & 1 & 10.1 \\ 4 & -1 & 10.1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<Helena> Bacana mostrar esse exemplo, Pedro.

<Pedro> Então, Helena, eu sempre gosto de mostrar exemplos para os alunos. Outro modo de justificar isso é dizer que quando opero para realizar o determinante, chegará um

momento que poderei simplificar os coeficientes dos membros e como eles sempre serão múltiplos (pois sempre coloco o mesmo número, seja ele positivo ou negativo, na terceira coordenada) sempre consigo simplificá-los. Digo a eles também que por facilidade utilizo o número "1" e não por uma obrigação.

<José> Pedro, muito bacana suas explicações. Há várias passagens matemáticas que quase nunca são mostradas nos livros didáticos, pelo menos nos que eu já vi em minha história de vida. Aprendi muito nessa conversa com você e com Helena. Outro ponto interessante é que essas discussões matemáticas que você mostrou são feitas junto com os alunos e não de uma maneira distante e muitas vezes direta e sem detalhes, como fazemos várias vezes em nosso curso de Licenciatura em matemática. Muito bacana conversar com você.

Cena 06 – Uma conversa de conversas de professores

Vamos agora dialogar com vocês, caros professores de matemática, na direção de pontuar algumas questões que julgamos importantes em meio a essas cenas do dia a dia de professores de matemática. Apresentamos também uma discussão a respeito da *matemática do professor de matemática* (LINS, 2006).

Em uma fala do professor Paulo, destacamos alguns pontos dos quais ele, apontando para os segmentos de reta enuncia: "a equação das retas...", ou seja, chamando estes "segmentos de reta" simplesmente por "reta". Ressaltamos, caro professor, que não estamos aqui em busca de erros, mas sim de possibilidades de interpretação destas ações que, gentilmente, o professor Paulo permitiu presenciar. Certamente este professor conhece as diferenças conceituais entre reta e segmento de reta, no entanto, algo o faz, nessa aula, adotar certas falas. O que queremos é justamente pensar possibilidades, legitimidades para isso. Podemos pensar que o professor está usando um termo "matemático" de formas diferentes das usuais "para matemática". Mas que formas seriam estas, onde estes usos são legitimados?

Observamos o professor chamar de "reta" um "segmento de reta". Porém, não se trata de uma incorreção conceitual, mas talvez, de uma simplificação no uso da linguagem. O adjetivo "reto", que caracteriza graficamente uma função linear é estendido, independentemente do domínio em que tal função linear está definida. "Reta" e "segmento (pedaço) de reta", tornam-se sinônimos a partir dessa aproximação possibilitada pela característica de "ser reto". Naquele momento, por nenhum aluno questionar tal nomenclatura, e nem mesmo o professor Paulo retificar o que havia dito, podemos pensar que sua fala foi "validada" tanto pelos alunos quanto por ele. Esta validação pode ocorrer de várias formas: seja pela autoridade do professor (disparada de forma autoritária ou não), seja por alunos e professores "aceitarem", em suas falas, chamar de "reta" um "segmento de reta". Nem tudo, num processo de interação/comunicação é explicitamente dito ou minuciosamente esclarecido, pois as entrelinhas expressam compreensões – ou acordos – que, aparentemente, são suficientes em várias situações.

Em nossas aulas de Matemática temos presenciado esses "ajustes" ou "abusos" na linguagem? Temos deixado algumas coisas "subentendidas"? Certamente que sim! Num processo cotidiano de comunicação, talvez, a maior parte do entendimento em uma conversa se dava ao que ficou "subentendido".

Esse fato é observado em muitas salas de aula de matemática visto que sempre falamos mais do que escrevemos na lousa. Muitas vezes quando escrevemos algo que não nos interessa naquele momento, apagamos rapidinho com as mãos e isso, naquele momento da explicação faz sentido para os alunos, porém mais tarde pode ficar obscuro. Tendo isso claro em nossas práticas é sempre importante colocar os alunos para falarem e tentar escrever, o máximo que puder na lousa, explicando nossas ideias, exemplos, analogias, metáforas...

Outro ponto nessa direção é que falamos não apenas por meio de palavras, mas também por meio de gestos. Podemos exemplificar essa afirmação em uma fala da Professora Helena, quando fiz que muitas vezes faz gestos com os braços para exemplificar os coeficientes angular e linear de uma reta.

Um questionamento que fazemos é no sentido de como avaliamos os gestos de nossos alunos? Se, por um acaso, em uma prova você perguntar o que é ou que significa os coeficientes linear e angular e um aluno responder oralmente, movimentando os braços, como avaliar esse aluno?

Claro que não estamos aqui advogando que os professores devem dar notas pelos gestos dos alunos. Nossa intenção com esse questionamento é problematizar as praticas de professores de matemática, para que possamos ter repertórios e condições de lidar com as maneiras como os alunos lidam com problemas e exercícios matemáticos.

Diante de todos esses diálogos com esses professores de matemática, fica claro que não adianta apenas saber bem o conteúdo e ter certo domínio da oratória para oferecer condições para que os alunos aprendam matemática. É claro que é imprescindível conhecer em detalhes os conteúdos, apresentar justificativas matemáticas para ideias e procedimentos, ter diferentes maneiras de falar sobre eles e diversificadas metodologias para elaborar planos de aula. Porém, há algo de particular na prática profissional do professor de matemática que é a capacidade de ler, interagir e intervir nos processos de produção de significados dos seus alunos (LINS, 1999, 2006).

Ler no sentido de compreender o que o aluno fala e tentar encontrar alguma justificativa para sua fala em uma determinada situação. Essa atitude é muito diferente de dizer para o aluno que ele está errado, que ele interpretou equivocadamente o enunciado de um problema, mas que tenha, também que apresentar os 'porquês' dessa sua resolução. E intervir no sentido de fazer algum questionamento que possa mudar a compreensão do aluno naquilo que ele está lidando e com isso fazer com que ele fale de ideias e conceitos novos, diferentes dos que falava anteriormente. Quais podem ser as perguntas para fazer com que os alunos aprendam um determinado conceito ou procedimento matemático? Que tipos de questionamento os professores podem elaborar para fazer com que "caia a ficha" dos alunos?

Diante dessas considerações, acreditamos que há uma matemática do professor de matemática e que é preciso discuti-la e problematizá-la em cursos de formação inicial e continuada. Existe uma matemática que os engenheiros mobilizam em suas práticas profissionais, com determinados objetivos e propósitos. Existe outra matemática que matemáticos mobilizam em seus trabalhos profissionais que também tem outros objetivos e propósitos. A matemática do professor de matemática é caracterizada por admitir significados matemáticos e não matemáticos (LINS, 2006). Quando um aluno produz significado para uma situação na sala de aula de matemática ele fala de objetivos matemáticos e não matemáticos. O professor precisa ser capaz de ler esse processo, até mesmo porque quando ele fala de matemática para seus alunos, também produz significados matemáticos e não matemáticos. Alguns exemplos disso são a utilização de metáforas como pizza para discutir frações, temperatura e saldo bancário para discutir números inteiros etc. Lins afirma que

> /.../ um fato que é crucial da atividade profissional de um professor, provavelmente seu aspecto mais importante, é tomar decisões e realizar ações relacionadas à educação matemática de seus alunos, com base no que eles queiram alcançar e também, com base no que está acontecendo na sala de aula (LINS, 2006, p.4, tradução nossa)

Acreditamos que esses diálogos, em meio a essas cenas do dia a dia da vida profissional de um professor de matemática, possam servir como repertório para professores tomarem decisões em sua sala de aula. Não se trata de dizer como o professor deve agir, pois cada sala de aula tem sua particularidade e por mais que tentemos antecipar as coisas que acontecem, sempre somos surpreendidos. Trata-se de mostrar alguns modos de falar sobre as temáticas matemáticas (em particular neste capítulo, a equação da reta), possíveis significados, possíveis linguagens. Trata-se de compartilhar certas vivências, aprendizados e propostas para as aulas de matemática.

Um ponto de extrema importância, fato que nos levou a organizar o capítulo de forma de cenas e conversas, é o papel do diálogo entre professores. É imperativa a necessidade de professores conversarem a respeito de suas práticas, realizações, entraves e potencialidades. Sempre teremos algo a aprender e não existe uma formação completa e acabada do professor de matemática. Por isso, como elucidamos no início desse capítulo, treinaremos essa cena de conversa de professores com uma vírgula e não com um ponto final, no sentido de propor que outras cenas, conversas e diálogos sejam construídos entre professores.

Cena 07 – O professor volta à sala de aula.

[...]

Referências

LINS, R. C. Por que discutir Teoria do Conhecimento é relevante para a Educa-ção Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemáti-ca: Concepções e Perspectivas. Rio Cla-ro: Editora Unesp, 1999. p. 75 – 94.

LINS, R. C. Characterising the mathematics of the mathematics teacher from the point of view of meaning production. In: 10th international Congress on Mathematical Education, 2006, Copenhagen. Plenary and Regular Lectures, 2006. v. único. p. 1-16.

PINTO, T. P.; VIOLA DOS SANTOS, J. R. De Causos de Sala de Aula de Matemática. Educação Matemática em Revista, [s. l.], n. 33, p. 13–20, 2011. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/267>

Possibilidades de uso do software *Geogebra* no Ensino de Conteúdos Matemáticos

Adriana Barbosa de Oliveira[14]

Danielly Kaspary[15]

Franciele Rodrigues de Moraes[16]

Katiane Rocha[17]

Marilena Bittar[18]

Maysa Ferreira da Silva[19]

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato[20]

INTRODUÇÃO

Prezada professora, prezado professor, nosso objetivo com as discussões do eixo Tecnologias na Educação Matemática é apresentar propostas de ensino que utilizam tecnologia e que permitam discutir potencialidades do seu uso em aulas de Matemática. É importante esclarecer, o quanto antes, que não somos favoráveis à renúncia das outras formas de ensino e não acreditamos que o uso da tecnologia por si só tenha o poder de transformar positivamente nosso cenário educacional. Acreditamos, sim, que há situações no ensino e na Matemática que são enriquecidas pelo uso da tecnologia e que ao se unirem às ferramentas convencionalmente presentes em sala de aula podem contribuir com a construção do conhecimento pelo aluno. É nessa perspectiva que apresentamos nesse texto algumas ideias de atividades. Esperamos que elas possam inspirar você, professora e professor, a elaborar outras tantas.

Nesse material optamos por trabalhar com alguns conceitos relativos ao estudo de Funções e de Estatística, ambos conteúdos presentes no referencial curricular para o Ensino Médio do Estado de Mato Grosso do Sul. A escolha por esses temas deve-se à importância que os mesmos possuem no ensino de Matemática. O estudo de Funções pode ser visto como um dos temas centrais do primeiro ano do Ensino Médio, tendo em vista que ele ocupa parte

[14] INMA. UFMS. drideoliveira7@gmail.com
[15] INSPE. UGA. kaspary.d@gmail.com
[16] SED/MS. francielerm@gmail.com
[17] UFMS. mr.katiane@gmail.com
[18] UFMS. marilenabittar@gmail.com
[19] SED/MS. mayfsil@hotmail.com
[20] INMA.UFMS. soniaburigato@gmail.com

significativa desse período. Somado a isso, considerando as aplicações desse conteúdo em outras disciplinas, como a Física e a Química, acreditamos que as propostas aqui apresentadas podem contribuir também para um melhor aproveitamento dos estudantes nessas disciplinas. Em relação ao tema Estatística, discutimos como o uso de medidas de centralidade e variabilidade auxiliam a leitura e o tratamento da informação. Ressaltamos, ainda, como esses conceitos podem auxiliar no desenvolvimento da criticidade dos estudantes em relação às informações disponibilizadas nas diferentes mídias.

Para um uso significativo da tecnologia em sala de aula partimos do pressuposto de que não basta que o professor insira o computador em seus planejamentos. É preciso que este esteja integrado à sua prática docente, ou seja, o uso do laboratório de informática deve fazer parte da aula do professor e não ser apenas um complemento para o conteúdo desenvolvido em sala de aula (BITTAR, 2010). Nesse sentido, ao longo da apresentação de nossas atividades traremos a discussão do diferencial do uso da tecnologia no desenvolvimento dessas atividades, enfatizando os ganhos obtidos com o uso de softwares educacionais. Nas atividades presentes nesse material, o uso da tecnologia se faz necessário tendo em vista os diversos cálculos realizados e a plotagem e movimentação de diferentes gráficos. Acreditamos que o desenvolvimento dessas mesmas atividades não seria viável no ambiente papel e lápis, por exemplo, uma vez que seria dedicado maior tempo para a construção (ou cálculo) do que para análise dos resultados, que é o foco da nossa proposta.

As atividades aqui apresentadas são desenvolvidas no *Geogebra*, um *software* gratuito, disponível na internet para download e compatível com os principais sistemas operacionais, como *Windows* e *Linux*. Cabe salientar que, para o uso desse *software* nas atividades que propomos, não é necessário conhecer todas as suas ferramentas e, além disso, apresentamos anexo um tutorial para auxiliar o uso do mesmo.

ESTUDO DE FUNÇÕES COM O *SOFTWARE GEOGEBRA*

O conteúdo de funções é um dos temas matemáticos que permeia os três anos do ensino médio. Seu estudo possibilita ao aluno estabelecer relações entre duas grandezas e realizar ligações da Matemática com situações da realidade, tais como: juros simples e composto, preço do combustível, custo de empresas, entre outros. Além disso, é importante o aluno compreender o significado da representação gráfica das funções quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes. (BRASIL, p.72)

Assim sendo, além de compreender a noção de dependência entre duas grandezas, o estudante precisa familiarizar-se com as representações algébrica e geométrica desse conteúdo para que ele possa operar com esse objeto matemático. Visando favorecer essa discussão, elaboramos uma atividade em que o estudante analisa, paralelamente, as representações algébrica e geométrica das funções do primeiro e do segundo grau. Nosso objetivo, com a atividade proposta é levar o aluno a estabelecer relações entre os coeficientes da representação algébrica da função e o comportamento de seu gráfico.

Esse estudo pode ser realizado logo após a introdução do conceito de Função, por meio de exemplos e definições. O ideal é que a discussão sobre os coeficientes das funções do primeiro e do segundo grau ainda não tenha sido feita, pois a intenção é que tais conceitos sejam construídos nessa atividade. Entretanto, mesmo que já tenha sido realizado algum trabalho nesse sentido essa atividade pode ser adaptada para outra discussão. A seguir apresentamos e discutimos as atividades a serem realizadas.

FUNÇÕES POLINOMAIS DO 1º GRAU

Como dito anteriormente, a proposta dessa atividade é discutir o significado geométrico dos coeficientes angular e linear da função polinomial do primeiro grau. Sugerimos apresentar essa atividade explorando sua potencialidade de levar o aluno a elaborar conjecturas acerca desses coeficientes. Nessa proposta, somente após o aluno observar as regularidades as definições seriam trabalhadas. Entretanto, mesmo após esses conceitos serem definidos, a realização dessa atividade pode contribuir com a atribuição de significado ao que é definido. Cabe, portanto, ao professor escolher quando e como propor a atividade.

Suponha a expressão geral de uma função polinomial do primeiro grau, f(x) = *a*x + *b*, com *a* e *b* números reais, para as atividades a seguir:

Atividade 1

a) Atribua um valor para *a* e outro para *b*, ambos diferentes de zero e, em seguida, crie no *Geogebra* o gráfico da função assim definida.
b) Mantenha o valor escolhido para *a* e crie um novo gráfico na mesma tela atribuindo agora outro valor para *b*.
c) Repita o passo anterior por diversas vezes escolhendo diferentes valores para *b*.
d) Descreva as regularidades que você observou no processo acima.

Essa atividade pode ser realizada tanto individualmente quanto em dupla, no entanto, acreditamos que a segunda opção pode ser mais interessante por permitir que os alunos discutam as regularidades observadas. Para começar essa atividade você pode dar como exemplo a construção de um gráfico no software *Geogebra*, para ajudar os alunos com relação à linguagem do programa e, na sequência, os alunos poderão realizar o que se pede em cada alternativa.

Durante a plotagem dos gráficos é importante que o aluno fique atento à função que ele descreve e ao gráfico obtido. É por meio das observações feitas entre as representações algébrica e geométrica da mesma função que ele poderá construir conjecturas. Para tanto, é fundamental que a janela de álgebra e a janela de visualização do *Geogebra* estejam ativadas para que as relações possam ser estabelecidas. Outro recurso interessante é o uso de cores diferentes para cada gráfico criado, uma vez que desse modo a visualização é privilegiada e, também, consequentemente a associação entre os elementos que se deseja evidenciar. Por exemplo, na situação a seguir observa-se que variando o coeficiente linear e deixando fixo o coeficiente angular, os gráficos obtidos representam retas paralelas.

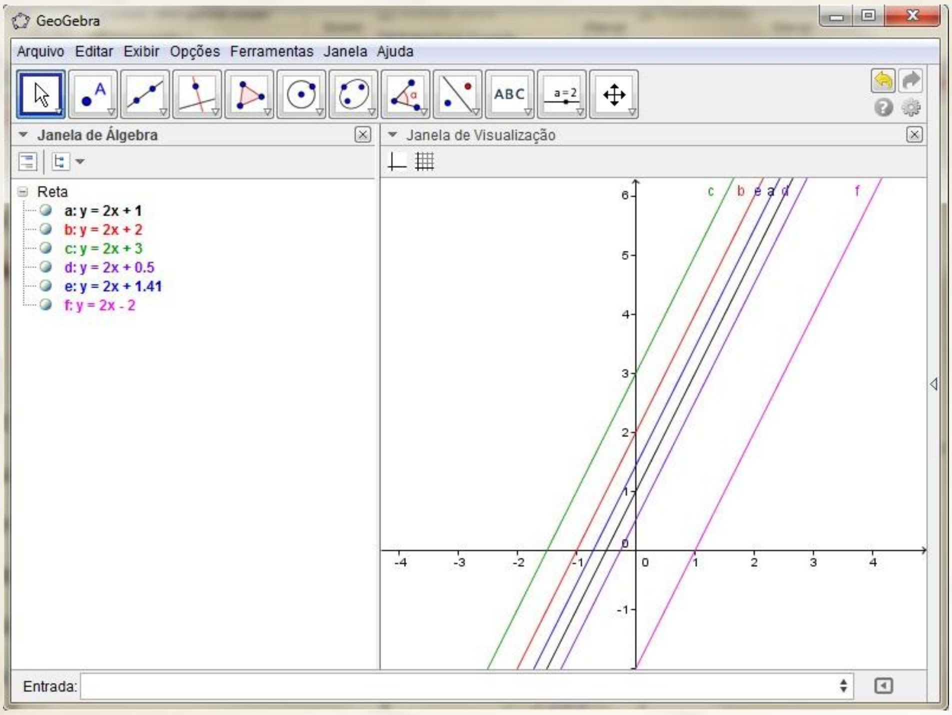


Figura 1 - variação do coeficiente linear.
Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

Ressaltamos o fato de que os estudantes devem ser provocados a atribuir valores não inteiros para os coeficientes *a* e *b*, como o exemplo apresentado. Tal prática auxilia na não elaboração de conjecturas errôneas, tal como a ideia de que essas regularidades ocorrem apenas com os números inteiros.

Não há limite para a quantidade de gráficos representados, mas salientamos que uma quantidade baixa de gráficos (2 ou 3) pode prejudicar a elaboração de conjecturas.

Sugerimos que seja pedido aos alunos o registro de suas conjecturas em seus cadernos para que, no momento de discussão da atividade, as mesmas possam ser lidas e analisadas pelo grupo. Espera-se que os estudantes observem que mantendo o mesmo valor para o coeficiente *a* e variando os valores de *b*, os gráficos das funções, ou seja, as retas definidas pelas funções são sempre paralelas. Além disso, é possível que surjam conjecturas em relação ao ponto em que a reta corta o eixo y, isto é, a associação de que a ordenada desse ponto corresponde exatamente ao valor do coeficiente *b*.

Atividade 2

a) Atribua um valor para *a* e outro para *b*, ambos diferentes de zero e, em seguida, crie no *Geogebra* o gráfico da função assim definida.
b) Mantenha o valor escolhido para *b* e crie um novo gráfico na mesma tela atribuindo outro valor para *a*.
c) Repita o passo anterior por diversas vezes escolhendo diferentes valores para *a*.
d) Descreva as regularidades observadas no processo acima.

O objetivo dessa atividade é a elaboração de conjecturas relacionadas ao à inclinação das retas. Eis um exemplo de resolução:

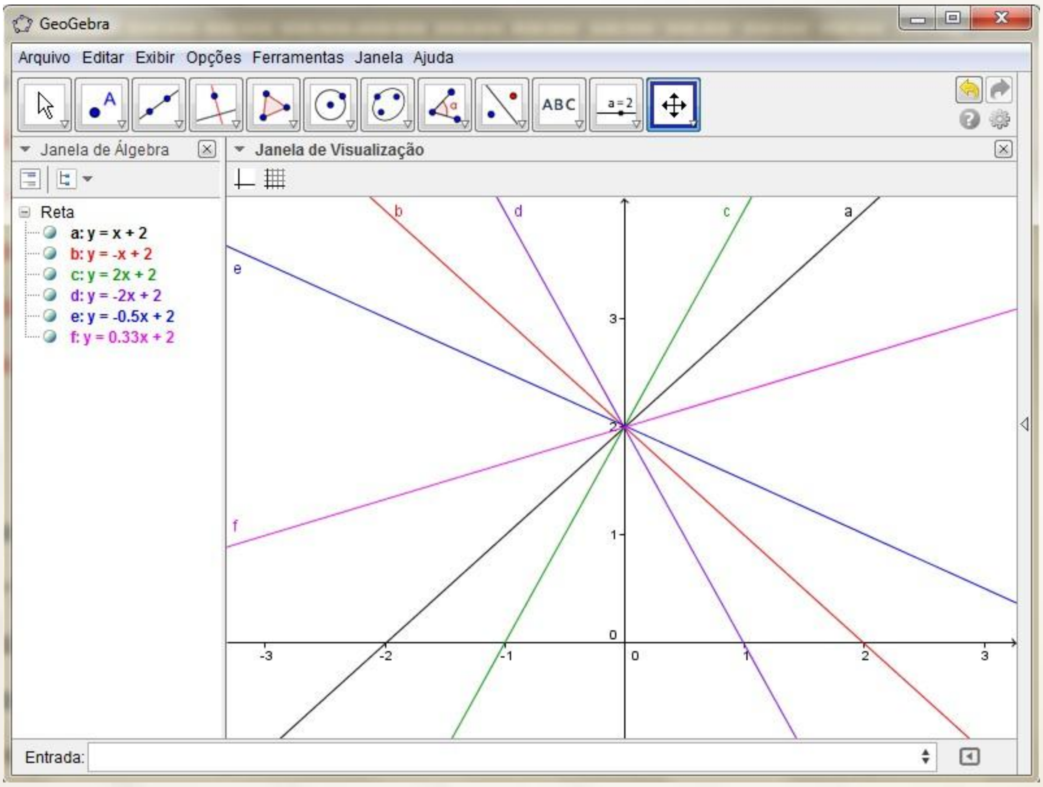


Figura 2 - variação do coeficiente angular.
Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

Sugerimos as mesmas observações da atividade anterior para esta atividade. Destacamos apenas as possíveis conjecturas que os alunos podem elaborar ao observar as regularidades aqui apresentadas: além de reforçar a conjectura de que o coeficiente b corresponde à ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y, os alunos podem supor que quando o coeficiente *a* da função corresponder a um valor positivo o gráfico terá uma determinada inclinação e quando esse coeficiente for negativo a inclinação do gráfico da função será diferente do caso anterior. Salientamos que cabe ao professor alimentar essa discussão para a institucionalização desses resultados.

Ao término das discussões acerca dessas duas atividades, propomos apresentar a definição dos coeficientes angular e linear, evidenciando o papel de cada um na análise gráfica. É importante enfatizar com os alunos que para que todas pessoas que vão ler ou falar sobre esse tema consigam se compreender, devemos utilizar uma linguagem compreensível por todos. Por esse motivo, o que eles conjecturaram, provavelmente usando a língua materna, precisa ser escrito em linguagem matemática.

Atividade 3

Na barra de comandos selecione o **seletor de intervalos** e defina os intervalos a = [-5,5] e b = [-5,5] e na janela de entrada a função f(x) = *a*x + *b*.

Movimente os seletores ***a*** e ***b*,** observe a janela algébrica e gráfica, e responda as questões a seguir:

a) O que acontece quando $a = 0$?
b) O que é possível observar no gráfico de $f(x) = ax + b$ quando $a < 0$ ou $a > 0$?
c) E fixando $b = 0$ e variando os valores de a?
d) E fixando um valor para b e variando os valores de a?
e) O zero de uma função é um ponto importante para a construção de seu gráfico, pois indica o ponto do plano cartesiano em que esse gráfico intercepta o eixo x[21]. Encontre a raiz da função no *Geogebra* digitando o comando raiz[f] na janela de entrada. Movimentando *a* o que se pode observar? E movimentando *b*?

Propusemos essa terceira atividade por permitir a discussão da definição da função do primeiro grau. Quando trabalhamos com a lei de formação geral, $f(x)=ax+b$, podemos discutir com os alunos a condição de existência dessa função, isto é, o coeficiente angular (a) ser um número diferente de zero ($a \neq 0$). Ao movimentar o seletor a, considerando o intervalor definido entre [-5, 5], por exemplo, quando a assumir o valor zero, aparecerá na tela uma reta paralela ao eixo x e nesse momento além de discutir a condição de existência é possível apresentar aos estudantes a noção de função constante, que não é uma função afim. Veja a situação no exemplo abaixo.

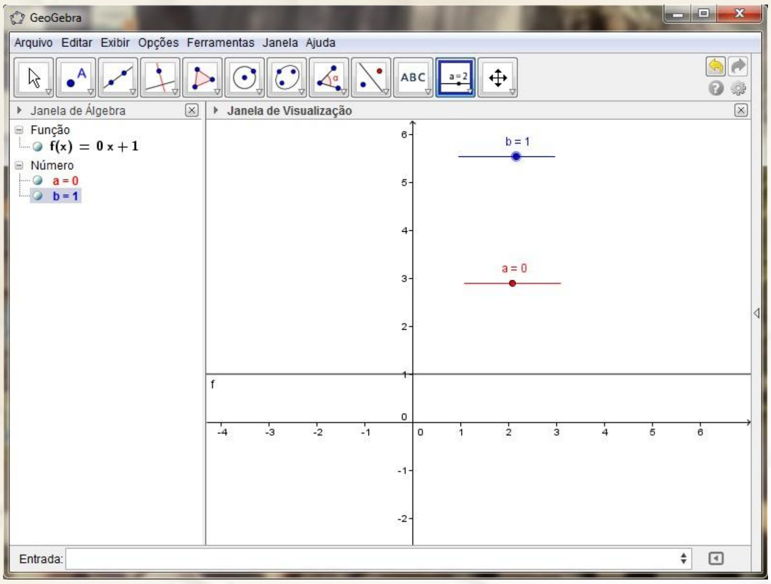


Figura 3 - estudo da função f(x) = ax + b.

[21] O zero de uma função polinomial é obtido por meio da raiz do polinômio associado, por esse motivo, em muitos livros didáticos diz-se , erroneamente, “encontrar a raiz da função”.

Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

Outra questão importante e que pode ser levantada nesse momento diz respeito ao zero da função do primeiro grau. Uma possível conjectura é que os alunos observem que o zero da função corresponde a um ponto do gráfico da função. Ressaltamos que essa discussão deve ser orientada com cautela para que não haja confusões. É preciso salientar que o zero de uma função do primeiro grau corresponde à abscissa do ponto do gráfico cuja ordenada é zero, ou seja, ao ponto (d, 0). Para melhor visualização nesse momento, é importante marcar o ponto que corresponde à interseção do gráfico com o eixo x, pois dessa forma as coordenadas desse ponto ficarão evidenciadas na janela de álgebra, como mostramos a seguir:

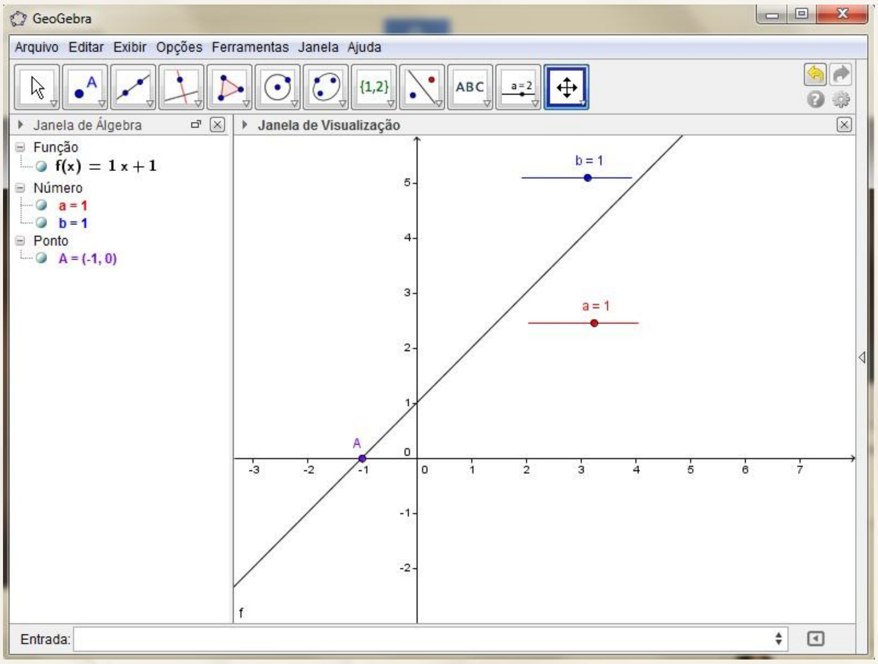


Figura 4 - zero da função.
Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

As atividades sobre função polinomial do segundo grau seguem a mesma perspectiva das funções polinomiais do primeiro grau. O trabalho volta-se também para a manipulação dos coeficientes da função visando a construção de regularidades. Desse modo, apresentamos, nesse momento, apenas o enunciado das atividades e possíveis conjecturas que podem surgir em sala de aula.

Considere a expressão que define uma função polinomial do segundo grau $f(x)=ax^2+bx+c$, com *a*, *b* e *c* números reais e *a* diferente de zero, para as atividades 1 e 2 a seguir:

Atividade 1

a) Atribua um valor para *a* positivo, para *b* e outro para *c*, ambos diferentes de zero e, em seguida, crie no *Geogebra* o gráfico da função assim definida.
b) Mantenha o valor escolhido para *c* e para *b* e crie um novo gráfico na mesma tela atribuindo agora um valor negativo para *a* .
c) Repita os passos anteriores quantos vezes quiser escolhendo diferentes valores para *a*, negativos e positivos.
d) Descreva as regularidades que você observou no processo acima.

Atividade 2

a) Atribua um valor para *a*, para *b* e outro para *c*, ambos diferentes de zero e, em seguida, crie no *Geogebra* o gráfico da função assim definida.
b) Mantenha o valor escolhido para *a* e para *b* e crie um novo gráfico na mesma tela atribuindo agora outro valor para *c*.
c) Repita o passo anterior quantos vezes quiser escolhendo diferentes valores para *c*.
d) Descreva as regularidades que você observou nesse processo.

Atividade 3

Na barra de comandos selecione o **seletor de intervalos** e defina os intervalos a=[-5,5], b=[-5,5] e c=[-5,5] e na janela de entrada a função $f(x)=ax^2+bx+c$.

Movimente os seletores **a, b** e **c** e responda as questões abaixo:

a) Movimente o seletor para a=0, o que acontece com o gráfico e com a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$?
b) E se movimentar também b = 0, o que acontece com o gráfico e com a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$?
c) Fixe o seletor c = 3, volte o b = 1 e movimente o seletor a para valores diferentes de zero. O que acontece com o gráfico? Agora mantendo o c = 3 e a = 1 movimente o b para valores diferentes de zero. O que acontece no gráfico agora?
d) Volte o seletores para a = 1 e b = 1 e faça c = 0, o que acontece?

e) Os zeros de uma função são pontos importantes do gráfico da parábola. Encontre os zeros da função no *Geogebra* com o comando: raiz[f]. Explique qual é a importância desses pontos no gráfico.

Na primeira atividade espera-se que o aluno observe que quando o valor de *a* é positivo a parábola terá a concavidade voltada para cima e quando for negativo a concavidade será para baixo. Enquanto na segunda atividade buscamos que o aluno observe que o valor do *c* é exatamente a ordenada do ponto que intercepta o eixo y. Já a terceira atividade tem como objetivo o estudo das características da função do segundo grau na sua forma genérica, bem como, a discussão dos zeros dessa função.

ESTUDO DE DADOS ESTATÍSTICOS COM O *SOFTWARE GEOGEBRA*

Para iniciarmos nossa discussão a respeito das atividades pensadas para o ensino de alguns conceitos da estatística, tomemos o seguinte recorte retirado das Orientações Curriculares para o Ensino Médio que afirmam que os estudantes *precisam adquirir entendimento sobre o propósito e a lógica das investigações estatísticas*, bem como sobre o processo de investigação. Deve-se possibilitar aos estudantes o entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos. Isso inclui entender a relação entre síntese estatística, representação gráfica e dados primitivos. Por exemplo, os estudantes precisam ser capazes de explicar como o ponto médio é influenciado por valores extremos num intervalo de dados, e o que acontece com o ponto médio e a mediana em relação a esses valores.

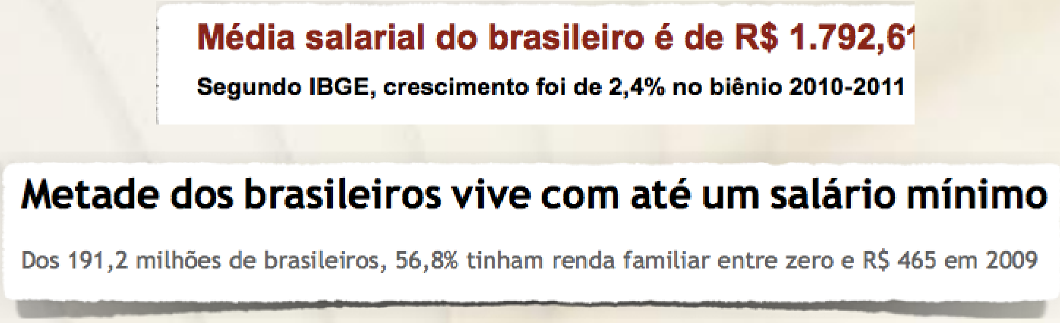
> Vale destacar a necessidade de se *intensificar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana) e* as *medidas de dispersão* (desvio médio, variância e desvio padrão), abordadas de forma mais intuitiva no ensino fundamental.
>
> Os alunos devem exercitar a crítica na discussão de resultados de investigações estatísticas ou na avaliação de argumentos probabilísticos que se dizem baseados em alguma informação. (BRASIL, p. 79, destaque nosso)

Os destaques que realizamos no excerto anterior constituem a base da nossa proposta. As atividades aqui apresentadas foram pensadas de modo que o aluno trabalhe com algumas situações problemas mobilizando noções estatísticas, exigindo dele a ação de argumentar, criticar e reconstruir as informações fornecidas. Para isso, primeiramente, buscamos colocar em debate algumas medidas de tendência central, visando a discussão das situações que tornam profícuas a escolha de uma medida ou outra, a depender dos resultados da análise estatística e daquilo que se quer como informação para caracterizar determinado grupo amostral. É por meio desse tipo de estudo que vislumbramos colocar o aluno em situação de desconforto cognitivo diante das informações que lhes são diariamente passadas e, que com isso, ele possa refletir e inferir sobre elas. Nesse cenário, propomos também, em uma das atividades, um trabalho sobre a medida de dispersão desvio padrão, visando um de seus significados e aplicabilidade.

Cabe comentar, antes de iniciarmos a apresentação das atividades, que essas foram elaboradas para serem aplicadas paralelamente à apresentação dos conceitos estatísticos, uma vez que exigem dos estudantes a interpretação das definições para serem desenvolvidas.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Tendo em vista a grande variedade de informações estatísticas disponíveis nas diferentes mídias, consideramos conveniente destacar algumas dessas para iniciar a discussão sobre o papel das medidas de tendência central na interpretação dessas informações. Buscamos, portanto, alguns dados em veículos de informação que abordassem uma mesma temática, mas de maneiras diferentes. Trazemos, a seguir, duas manchetes de jornais encontradas nessa busca:


Média salarial do brasileiro é de R$ 1.792,61
Segundo IBGE, crescimento foi de 2,4% no biênio 2010-2011

Metade dos brasileiros vive com até um salário mínimo
Dos 191,2 milhões de brasileiros, 56,8% tinham renda familiar entre zero e R$ 465 em 2009

Figura 5 - medidas de tendência central.
Fonte: UOL – disponível em < https://entretenimento.band.uol.com.br/bandfolia/noticias/100000600949/media-salarial-do-brasileiro-e-de-r-179261.html > , último acesso em 01 de março de 2021.

Observa-se que as duas manchetes retratam um mesmo assunto, mas a impressão que temos, ao lê-las, não é a mesma. Esse desconforto frente à essas informações é um fator essencial para que os alunos percebam a necessidade da compreensão matemática dessas informações. A seguir sugerimos algumas questões que podem ajudar a fomentar a discussão nesse momento.

Considerando que as épocas em que essas reportagens se referem são bastante próximas, como explicar a aparente diferença de informação que cada uma delas transmite?

Como interpretar os dados apresentados diariamente nos meios de comunicação?

Nesse primeiro momento alguns argumentos não matemáticos de justificativa podem emergir como apontar que alguma dessas informações é falsa. Nós, como professores, devemos alertar nossos alunos para o fato de que tais meios de comunicação devem postar apenas informações fidedignas, apesar de isso nem sempre ser verdade. A leitura estatística de determinados dados pode levar a conclusões distintas de acordo com a medida estatística que está sendo utilizada e, por isso, a compreensão desses dados pode nos levar a compreender a intenção do autor do texto. A primeira manchete parece querer levar o leitor a pensar que o brasileiro tem uma situação econômica boa, levando em consideração o salário mínimo na época (R$ 510,00 em 2010 e R$ 540,00 em 2011). Por outro lado, a segunda informação apresenta um quadro preocupante em relação ao poder aquisitivo dos brasileiros no ano de 2009, em que o salário mínimo era de R$ 465,00. As duas manchetes retratam a situação econômica de um mesmo grupo, no entanto, a maneira como cada uma delas foi analisada estatisticamente reflete informações, aparentemente, contraditórias, e que exigem do leitor a compreensão sobre o significado de média e de mediana.

Para que os alunos possam analisar criticamente as informações apresentadas usando a noção de média (média aritmética) e mediana (valor que separa as medidas em duas partes com mesma quantidade de dados) é importante que eles compreendam quais são as afirmações que se pode fazer diante de cada tipo de medida. Diante disso, propomos uma atividade que permite que o aluno compare essas duas medidas.

Atividade 1:

Construção de um grupo amostral para a compreensão da média e da mediana em uma mesma situação.

“Inspirado nas manchetes de jornais considere um grupo de 21 pessoas que vivenciem a seguinte situação: a média salarial dessas pessoas é de aproximadamente R$ 1.800,00 reais e a mediana do conjunto formado pelos seus salários é de R$ 465,00 reais.

Construa um exemplo no *Geogebra* que ilustre essa situação. Como essas duas medidas juntas podem nos ajudar a entender os dados?”

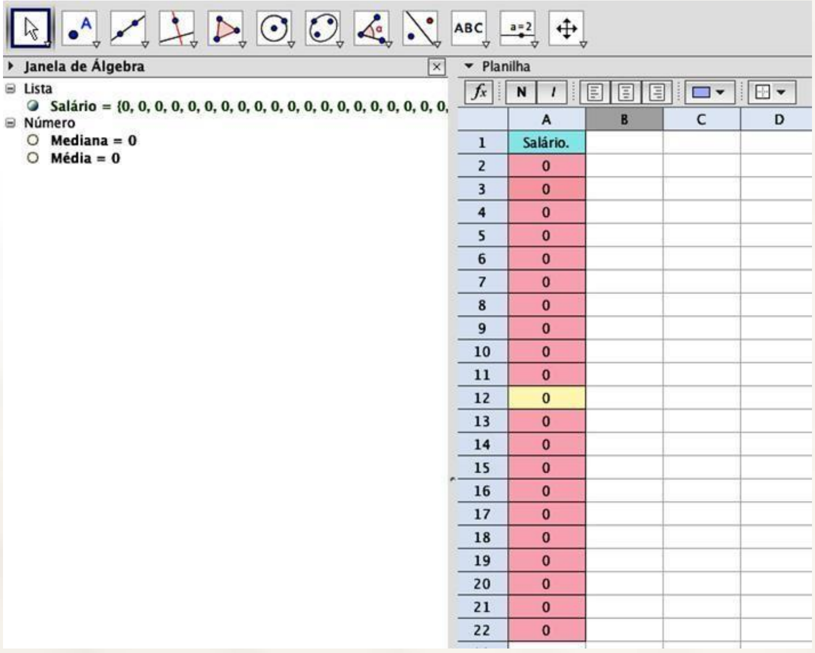


Figura 6 - construção da Média e da Mediana no *Geogebra*.
Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

Para essa atividade o *Geogebra* foi programado para calcular automaticamente a mediana e a média conforme os valores são plotados na tabela[22]. Deixamos o espaço da cédula 12 em evidência para dividirmos o conjunto ao meio, não havendo a necessidade de os alunos se preocuparem com a contagem de elementos que correspondam aos salários acima ou abaixo de R$ 465,00 reais. Todavia, devemos estar atentos à situação para o caso de o aluno construir os dados de maneira desordenada, de modo que o item da cédula 12 não corresponda à mediana, mas ainda assim seja uma amostra que obedeça às exigências do enunciado da atividade, o que torna sua solução também correta. Há ainda a situação em que o aluno, mesmo que coloque na cédula 12 o valor da mediana, pode vir a formar um conjunto no software em que o valor da mediana não é aquele previsto na cédula 12, necessitando de uma retomada da própria definição dessa medida, em especial para o critério de ordenação dos dados que deve ser obedecido nesses casos.

Sugerimos que antes de iniciar a atividade o professor explique, brevemente, o que é a mediana e a média de um conjunto de dados. Nesse momento, o professor pode apresentar a definição e discuti-la com seus alunos. Essa definição pode ser a do livro adotado em sala.

No enunciado da atividade são apresentadas as características que os dados analisados devem respeitar, entretanto, os dados não são fornecidos. Desse modo, o aluno terá que fornecer os valores dos salários que compõem o rol a ser analisado e, para tanto, deverá mobilizar os conceitos de média e de mediana no momento de preencher a tabela. Essa

[22] As instruções para a construção dessa atividade e das demais estão disponíveis no tutorial ao final do texto.

dinâmica favorece na compreensão dos conceitos matemáticos em jogo, pois para que os dados forneçam a média de R$ 1.800,00 reais não podemos considerar que cada pessoa recebe R$1.800,00 reais, pois mesmo que a média esteja correta a mediana não será R$ 465,00 reais. Percebemos, assim, que para montar esse conjunto de salário algumas pessoas ganham mais que outras, o que favorece a compreensão de que o fato de a média ser R$ 1.800,00 reais não significa que cada pessoa receba essa quantia. Dessa forma, ao construir o seu rol de salários o aluno deverá buscar estratégias para que a mediana dê o valor desejado; será necessário manter metade dos salários com os valores menores ou iguais a R$ 465,00 reais.

Uma vez que os alunos construírem o conjunto de salários, o professor pode questioná-los a respeito das estratégias usadas no momento da escolha dos dados, pedindo que eles justifiquem como procederam para obter a média e a mediana solicitadas. Partindo dessa discussão, volta-se à questão inicial: como essas duas medidas juntas podem nos ajudar a entender os dados? E mais, qual é a realidade salarial daquelas pessoas? Essa última questão tem como objetivo promover a discussão a respeito da desigualdade salarial existente no país, apesar de a média salarial ser alta. Podemos questionar, também, qual é a “primeira impressão” que a média e a mediana nos dão em relação ao salário. Nesse debate é importante destacar que ambas as medidas fornecem informações verdadeiras sobre os dados e que a depender do que queremos saber em relação a realidade salarial, uma se torna mais vantajosa que outra.

Outras medidas de tendência central usadas para comparar dados são a média aritmética ponderada e a moda. Essas duas medidas fornecem informações diferentes a respeito de um mesmo conjunto de dados. Assim, propomos uma atividade que tem como foco a análise dos dados fornecidos, para poder realizar inferências sobre a situação que os mesmos estão envolvidos.

Atividade 2:

Discussão sobre a média aritmética ponderada e a moda.

A média aritmética, por ser a medida de tendência central mais popular, está também presente nas demais atividades propostas. Nesse caso, propomos uma discussão da média aritmética ponderada[23] em conjunto com a medida moda[24]. Para tanto, sugerimos a seguinte atividade:

---

[23] A média aritmética ponderada de n números é a soma dos produtos de cada um multiplicados por seus respectivos pesos, dividida pela soma dos pesos.
[24] Moda é o valor de maior frequência.

"João, professor de História, aplicou um teste com 10 questões em uma de suas turmas de 20 alunos. Para realizar uma análise estatística do desempenho da turma, João utilizou as medidas de tendência central média e moda, no entanto teve dificuldades em interpretar os resultados obtidos. Diante dessa situação, procurou um professor de Matemática para auxiliá-lo. Considerando que você seja esse professor, auxilie João na interpretação dos resultados."

Exemplifique no *Geogebra* outras possibilidades de análise que possam acontecer ao se analisar outras turmas.

Os dados obtidos por João estão representados na tabela a seguir (figura 7). O item "Acertos" refere-se a quantidade de questões que foram acertadas em uma prova (0 –acertou zero questão; 1 – acertou apenas uma questão; 2 – acertou duas questões; e assim por diante). O item "Quantidades" aponta o total de alunos que pertencem ao grupo que acertaram 0, 1, 2 ..., até 10 questões. No caso do João, 10 alunos acertaram 1 questão; 1 aluno acertou 7; 2 acertaram 8; 3 acertaram 9 e, por fim, 4 alunos acertaram 10 questões.

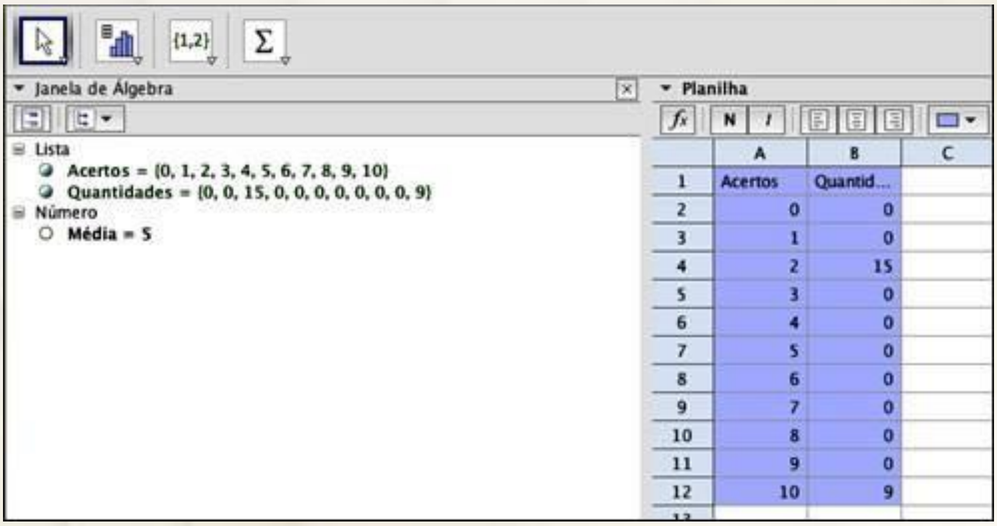


Figura 7 – representação dos dados da turma de João.
Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

O *software Geogebra* foi programado para calcular a média ponderada[25] para essa atividade; no caso da moda, por ser uma medida mais facilmente observável em uma amostra e por não haver a necessidade de se efetuar cálculos, deixamos para que o próprio aluno interprete a tabela e indique o seu valor para a discussão proposta.

Para esse momento cabe retomar/apresentar as definições dessas duas medidas, visto que é por meio da interpretação delas que o aluno irá criar argumentos para explicar ao

[25] As instruções para essa programação encontram-se no tutorial.

professor João o desempenho de sua turma e como os dados estatísticos se comportam dependendo da amostra analisada.

Esperamos que com a realização dessa atividade surjam questões como: “Quando a Média deixa de ser uma medida interessante?”, “O que a moda nos diz?”, “Quando a moda não me diz muito sobre aquilo que estou analisando?”. As respostas para esses questionamentos põe a prova essas medidas em determinadas circunstâncias. No caso do exemplo supracitado, a média não nos fornece um dado que reflete a situação preocupante que essa turma de alunos está enfrentando, justamente porque esse instrumento estatístico não se torna conveniente quando os dados são muito dispersos um do outro. No entanto, a moda, apesar de a princípio ser mais significativa nesse caso, torna-se, quando sozinha, um dado que permite caracterizar muito pouco a amostra, a não ser que esteja acompanhada do seu dado percentual em relação ao grupo total – ao dizermos que mais de 60%, ou cerca de dois terços acertaram apenas 1 de 10 questão de uma prova é dizer muito mais do que apenas constatar que a moda é 1, haja vista que com essa informação poderíamos pensar em turmas bastante diferentes da exposta por João.

Sugerimos também que nessa atividade os alunos simulem diferentes turmas de alunos com o intuito de apresentar outras circunstâncias em que uma medida represente mais adequadamente a amostra que outra, ou ainda, quando as duas juntas possam dar um retrato melhor do que estaria acontecendo, no caso, em uma determinada turma.

Na sequência apresentamos a última atividade referente à média aritmética e ao desvio padrão.

Atividade 3:

Discussão sobre a média aritmética e o desvio padrão.

O desvio padrão é comumente empregado para análise da dispersão dos dados de um determinado conjunto. Na atividade a seguir buscamos criar uma situação em que o aluno se depare com amostragens diferentes que tenham médias iguais e, com isso, perceba como o desvio padrão pode ajudar a interpretar os dados nessas circunstâncias.

Tomemos, hipoteticamente, 4 turmas com 5 alunos.

Construa as notas dessas turmas considerando que todas elas têm média igual a 6 e ainda:

a) Todos os alunos da primeira turma tiraram a mesma nota;

b) Nas demais turmas há alunos que não foram muito bem e outros que tiraram boas notas.

c) Na segunda turma as notas foram menos dispersas que a terceira, que por sua vez foram menos dispersas que a quarta turma.

Construa essa situação no *Geogebra* e observe o Desvio Padrão de cada uma das turmas:

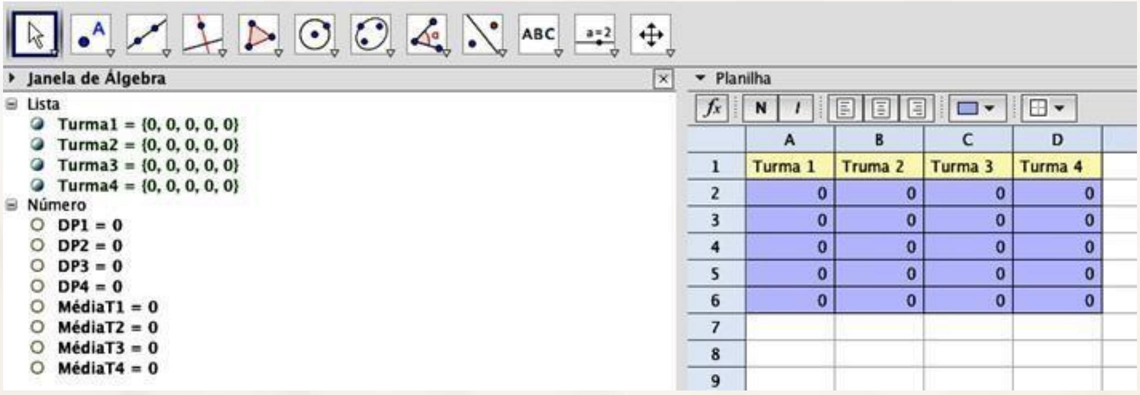


Figura 8 – um exemplo de situação.
Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

O que o desvio padrão nos indica ao ser analisado junto com a informação sobre a média?

Cabe esclarecer, primeiramente, que tomamos uma situação hipotética apenas para viabilizar o trabalho de manipulação dos dados. Nessa atividade, novamente pedimos para que os alunos criem suas amostras, pois acreditamos que é uma maneira de os conceitos estatísticos serem mobilizados, visto que, ao criar quatro turmas diferentes com a mesma média, várias estratégias podem ser utilizadas, mas todas devem respeitar que a soma de todas as notas dividido pelo total de alunos deve dar cinco, que é a média definida no enunciado do problema. Ademais, construir os próprios dados é um meio de obter uma gama de situações que possibilitem a discussão em grupo para a formalização da conjectura esperada[26].

A seguir apresentamos uma possível solução:

[26] Nota-se, na figura 9, à esquerda, que também programamos o software para realizar os desvios padrões e as médias de cada turma conforme plotamos os dados na tabela. Em anexo apresentamos os passos para realizar essa atividade.

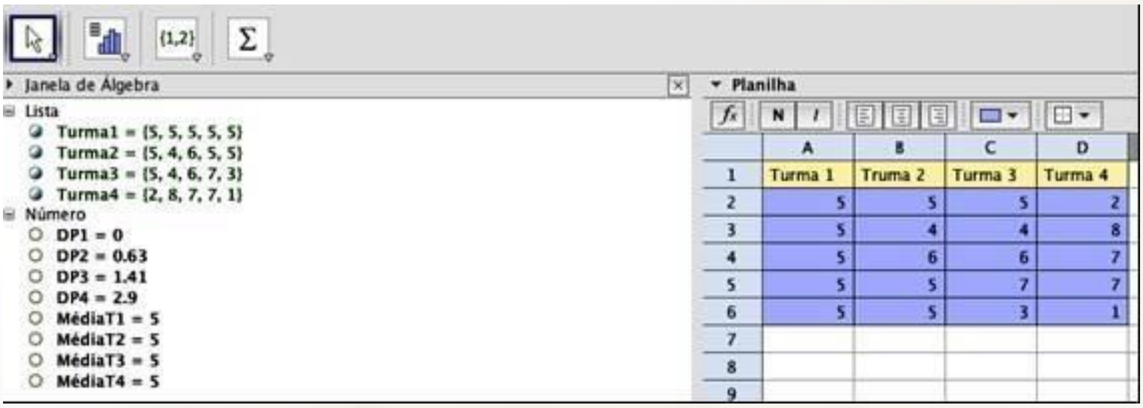


Figura 9 – uma possibilidade de solução.
Fonte: *Geogebra* – elaborado pelas autoras.

Note que todas as turmas possuem média 5, como indicado pelo cálculo realizado pelo próprio software, à esquerda, na tela e uma turma possui notas mais dispersas que a outra, conforme orientado pelo enunciado da atividade. Após construída essa situação por cada grupo de alunos, que já se configura em um momento de aprendizagem e investigação, podemos questioná-los sobre o papel da média aritmética em casos como esse, afim de que sintam a necessidade de outros dados para poder caracterizar melhor tais turmas. A média, nessa situação, não é uma informação suficiente para uma análise crítica, pois esconde aspectos em relação à homogeneidade ou heterogeneidade dos alunos de uma mesma turma – a média caracterizou de uma mesma forma turmas que possuem realidades bastante diferentes, e é dessa reflexão que surge a importância do cálculo do desvio padrão.

Notemos, também ao lado esquerdo da tela, o cálculo do desvio padrão de cada turma, apresentado por DP_1, DP_2, DP_3 e DP_4, considerando os índices e o indicativo para cada uma das turmas. A conjectura que esperamos que o aluno elabore por meio da observação desses dados pode ser descrita da seguinte maneira: Quanto maior for a dispersão dos valores de uma determinada amostra, maior será o valor do desvio padrão dessa amostra.

Socializada e discutida a conjectura em grupo, podemos então reinvestir na discussão inicialmente proposta sobre a utilização da média e o que o desvio padrão pode acrescentar de informações sobre certas situações com a intenção de fomentar uma análise estatística crítica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo de qualquer reflexão que busque novas possibilidades de abordagem para o ensino de conteúdos matemáticos é, para nós, contribuir para que o aluno de qualquer nível de escolaridade possa ter uma educação matemática de qualidade, que contribua com a sua formação como cidadão capaz de produzir conhecimentos e de interpretar a realidade que o cerca. Para isso é fundamental que nosso trabalho como educadores coloque sempre o aluno como agente central do processo de aprendizagem e, para tanto, é preciso propor atividades que lhe atribuam papel ativo nesse processo. É importante que o aluno assuma, ao menos em alguns momentos, a posição de investigador matemático, que ele faça Matemática – ao invés de apenas reproduzir mecanicamente técnicas – e a elaboração de conjecturas é parte essencial nesse fazer. Dessa forma, a proposta desse material foi apresentar possibilidades de uso da tecnologia, por meio de um *software* educacional, para o ensino de funções e estatística de modo a favorecer a elaboração de conhecimentos pelo aluno. Esperamos que essas atividades despertem o interesse do professor em investigar e desenvolver outras propostas, com diferentes conteúdos matemáticos, bem como, com a utilização de outros *softwares* que também podem enriquecer o trabalho na sala de tecnologia tendo sempre em vista que aluno queremos formar, ou, mais ainda, que cidadão queremos formar.

REFERÊNCIAS

BITTAR, M. **A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de Matemática**. Educar em Revista, Curitiba, v. 1/2011, p. 157-171, 2011.

BITTAR, M. . **A Escolha do *Software* Educacional e a Proposta Didática do Professor: estudo de alguns exemplos em Matemática**. In: Willian Beline; Nielce Meneguelo Lobo da Costa. (Org.). Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões. Campo Mourão -PR: Editora de Fecilcam, 2010, v. único, p. 215-243.

BITTAR, M. . **Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de *softwares* na aprendizagem da Matemática.** Um estudo de um caso: o *software* Aplusix. In: Anais do III SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia. Recife : SBEM, 2006. v. único. p. 1-12.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Orientações curriculares para o ensino médio**; v. 2 Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias /. Brasília : MEC/Semtec, 2006.

PAPERT, S. M. **A Máquina das Crianças:** Repensando a escola na era da informática (edição revisada). Nova tradução, prefácio e notas de Paulo Gileno Cysneiros. Porto Alegre, RS: Editora Artmed, 1994 (1a edição brasileira 1994; edição original EUA 1993).

VALENTE, J. A. (1997). **Informática na Educação**: instrucionismo x construcionismo. Disponível em:http://www.divertire.com.br/artigos/valente2.htm. Acesso em: 7 mar. 2012.

VALENTE, J. A. (2002). **O Uso Inteligente do Computador na Educação**. Disponível em:http://www.proinfo.gov.br/biblioteca/textos/txt/usoint.pdf. Acesso em: 7 mar. 2012.

TUTORIAL SOBRE O *SOFTWARE GEOGEBRA* E ORIENTAÇÕES PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS.

O *Geogebra* é um *software* de Matemática dinâmica que possibilita trabalhar com geometria, álgebra, gráficos, tabelas, estatística e cálculo. Podemos construir: pontos, figuras, retas, vetores, cônicas, gráficos de funções, etc.

Faremos uma breve apresentação do *software Geogebra* e de algumas de suas funcionalidades utilizadas nas atividades propostas nesse material. Para uma análise mais detalhada desta utilização você pode acessar o manual do *software* no site: http://*Geogebra*.org/help/docupt_BR.pdf

Ao abrir o programa você irá observar a tela conforme a figura 1:

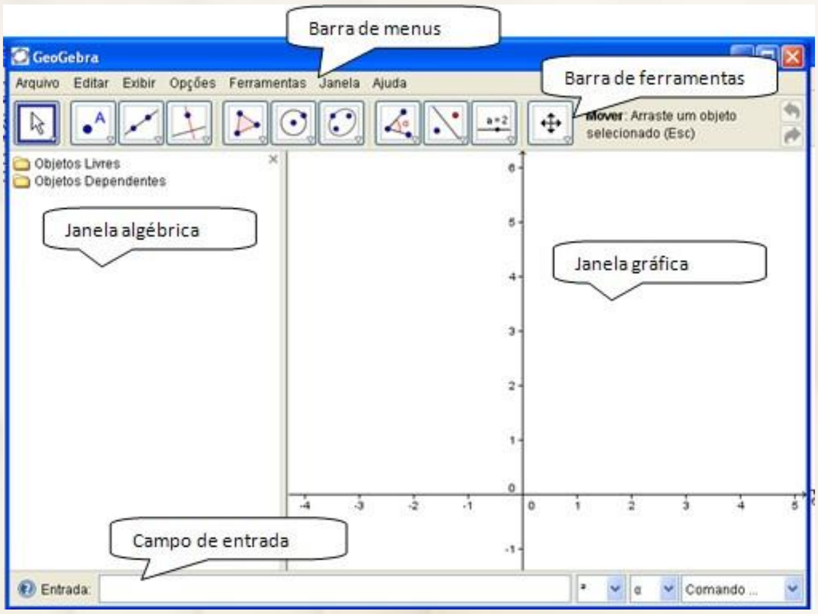


Figura 1 - Tela inicial do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Em seguida, apresentamos resumidamente as funcionalidades dos itens que iremos utilizar nas atividades sobre funções:

A **barra de ferramentas** contém os ícones: selecionar, construir (pontos, retas, vetores, etc.), calcular (a área, derivada, ângulo, etc.) e movimentar objetos.

O **campo de entrada** é destinado à entrada dos comandos e/ou condições que definem os objetos.

Na **janela algébrica** aparecem as indicações dos objetos: coordenadas de pontos, equações de retas, de circunferências, áreas, comprimentos, etc.

Na **janela Gráfica** aparecem as representações gráficas das construções realizadas pela barra de ferramentas ou pelo campo de entrada.

ORIENTAÇÕES PARA AS ATIVIDADES DE FUNÇÕES POLINOMAIS

Funções polinomiais do 1º grau

As atividades propostas, 1 e 2, utilizam os mesmos tipos de comandos, assim vamos exemplificar a atividade 1 e para a atividade 2 basta seguir os mesmos passos.

Na atividade 1 o aluno deve inserir a função f(x)=ax+b definindo valores para a e b diferentes de zero no **campo de entrada**, por exemplo, para *a*=2 e *b*=1 ele deve digitar a expressão f(x)=2x+1 e apertar a tecla ‘enter’. Na **janela gráfica** irá aparecer a representação da reta conforme a figura 2.

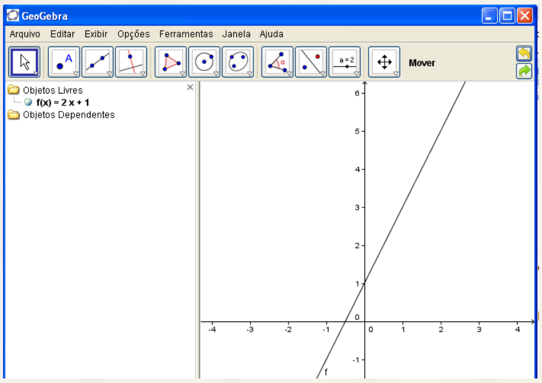


Figura 2 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Em seguida, o aluno deve manter o valor escolhido para a, no nosso exemplo a=2, e atribuir outros valores para b, mas tomando o cuidado de renomear a função com outras letras. Se ele usou f(x) deve ir escolhendo outras como g(x), h(x), etc.. Como na figura 3.

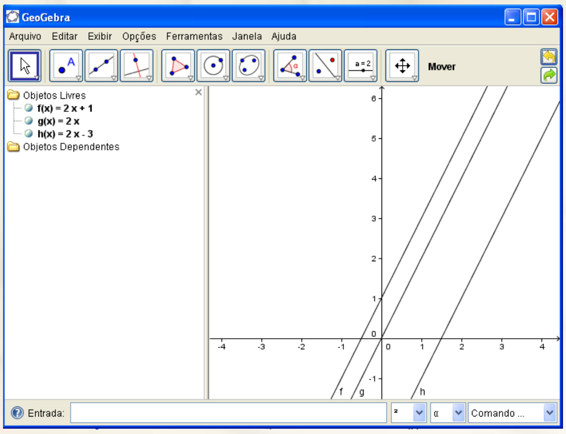


Figura 3 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

É possível também definir cores diferentes para cada reta, para isso basta clicar com o botão da direita do mouse em cima da reta escolhida selecionar **propriedades** e escolher uma cor (Figura 4).

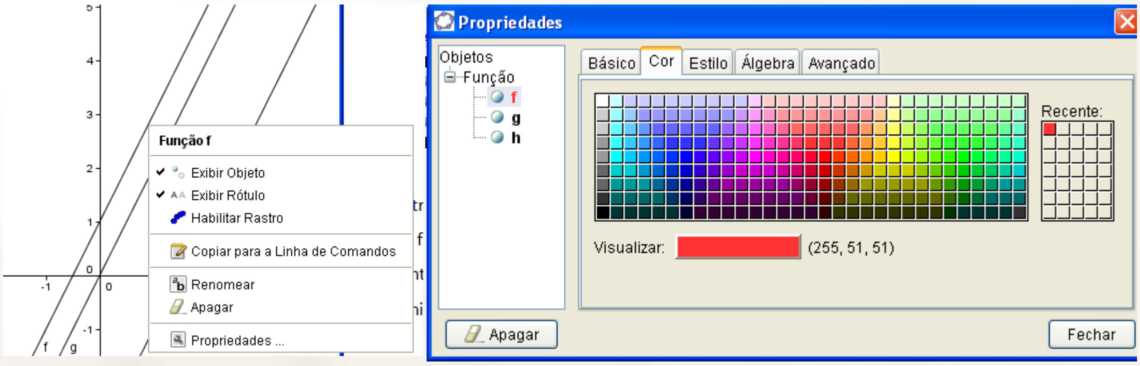


Figura 4 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Observe que a representação gráfica das retas como também as expressões algébricas ficarão coloridas.

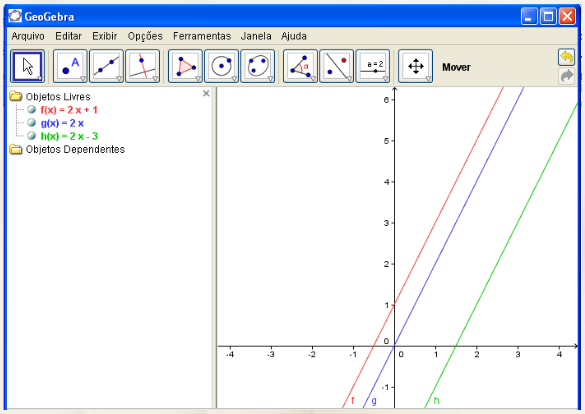


Figura 5 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Na atividade 3 o aluno deve primeiramente definir os intervalos pedidos para trabalhar com a expressão f(x)=ax+b. Para isso deve ir na barra de comandos e selecionar o **seletor de intervalos** conforme figura 6.

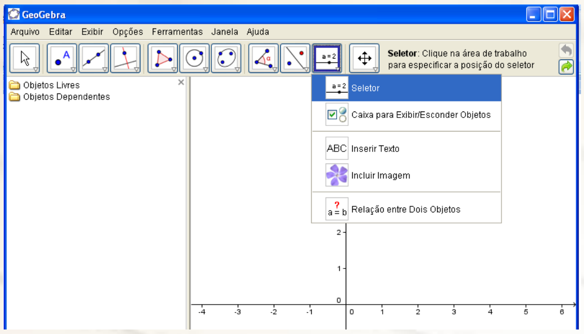


Figura 6 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Depois de selecionar o ícone, o aluno deve clicar na janela gráfica e irá aparecer o seletor com as opções de intervalos, em geral, já definido como [-5,5], conforme figura 7. Defina o intervalo a = [-5,5] e em seguida o intervalo b = [-5,5].

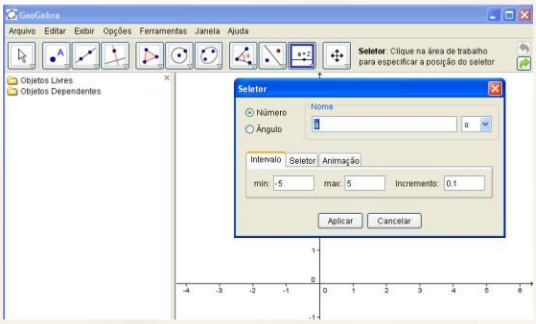


Figura 7 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Após definido os intervalos a e b eles irão aparecer na janela gráfica conforme figura 8. Em seguida, na **janela de entrada** deve digitar a função f(x)=ax+b, mas algumas versões do *Geogebra* não reconhecem essa expressão e é preciso inserir o asterisco entre o **a** e o **x** para que o software entenda que há uma multiplicação entre esses elementos, desse modo ficará f(x)=a*x+b (figura 8).

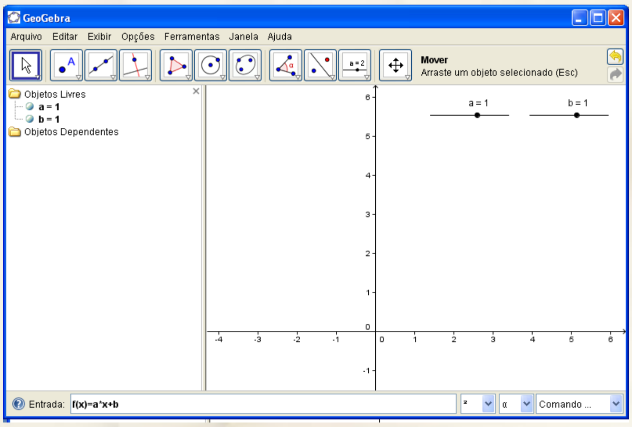


Figura 8 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Quando o aluno clicar no ‘enter’ irá aparecer a representação da reta na janela gráfica e a expressão algébrica f(x)=x+1, com *a*=1 e *b*=1 que são os valores que aparecem inicialmente nos intervalos a e b (figura 9).

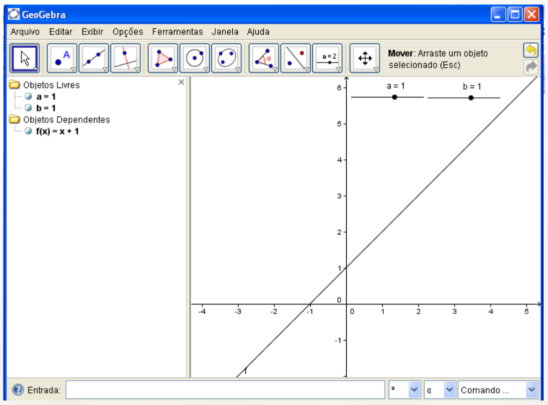


Figura 9- Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Para movimentar os seletores a e b o aluno deve selecionar o ícone:  na barra de ferramentas e, em seguida, movimentar o seletor **a** e depois o **b** e observar as janelas, algébrica e gráfica, para responder as alternativas pedidas.

Funções polinomiais do 2º grau

Tendo em vista as proximidades do uso do software para desenvolver as atividades propostas sobre esse tema, apresentaremos apenas comentários relativos à atividade 1.Nela o aluno deve inserir a função $f(x)=ax^2+bx+c$ ou $(f(x)=a*x^2+b*x+c)$ definindo valores para *a*, *b* e *c* diferentes de zero na **entrada de comandos**, por exemplo, para *a*=3, *b*=1 e *c*=2 deve ser digitada a expressão $f(x)=3x^2+x+2$ e apertar a tecla 'enter'. Irá aparecer na janela gráfica a representação da parábola (figura 10).

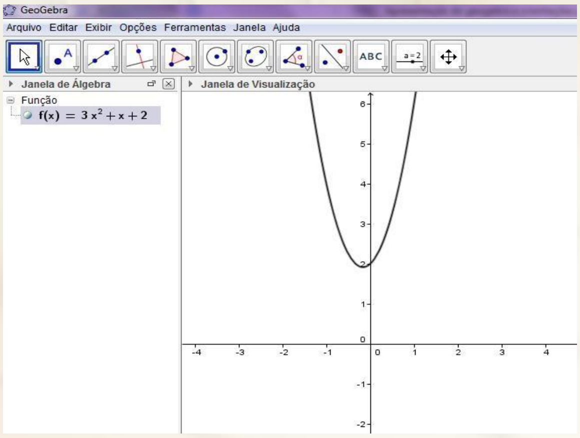


Figura 10 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Em seguida, o aluno deve manter o valor escolhido para b e c, no nosso exemplo *b*=1 e *c*=2, e atribuir valor negativo para *a*, neste exemplo vamos tomar *a* = -1. E a função será renomeada por g(x), ficando então $g(x) = -1x^2+1x+2$ (figura 11).

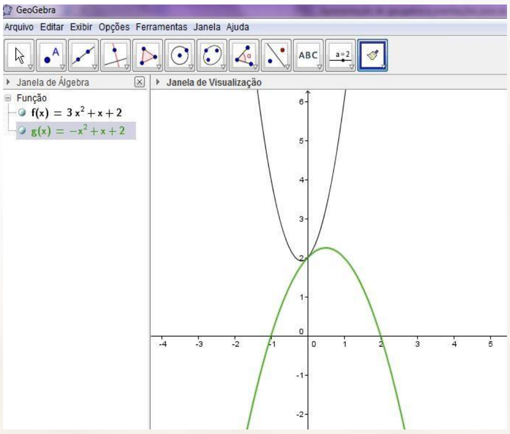


Figura 11 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Agora incentive os alunos a variar o valor de ‘*a*’ atribuindo por diferentes valores tanto positivos como negativo como na figura 12.

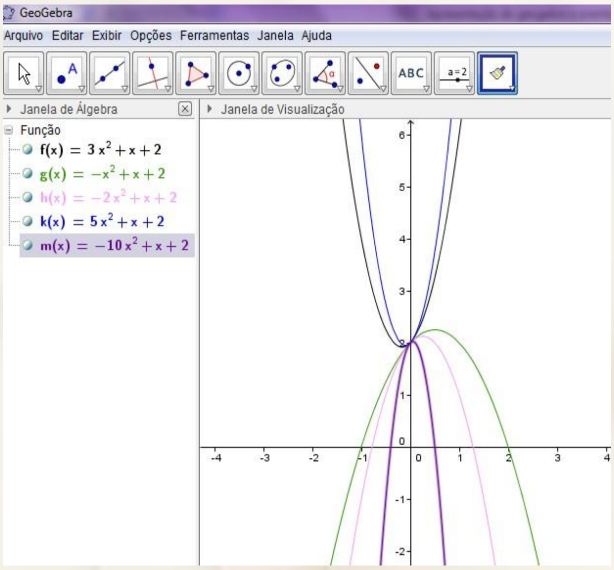


Figura 12 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Para finalizar a atividade é fundamental que os alunos descrevam as regularidades observadas.

Orientações para as atividades de Estatística

Nas atividades de estatística iremos utilizar alguns recursos específicos que não estão visíveis no *software*. Para visualizá-los basta clicar na ferramenta **Exibir** e aparecerá o modo de seleção das outras janelas.

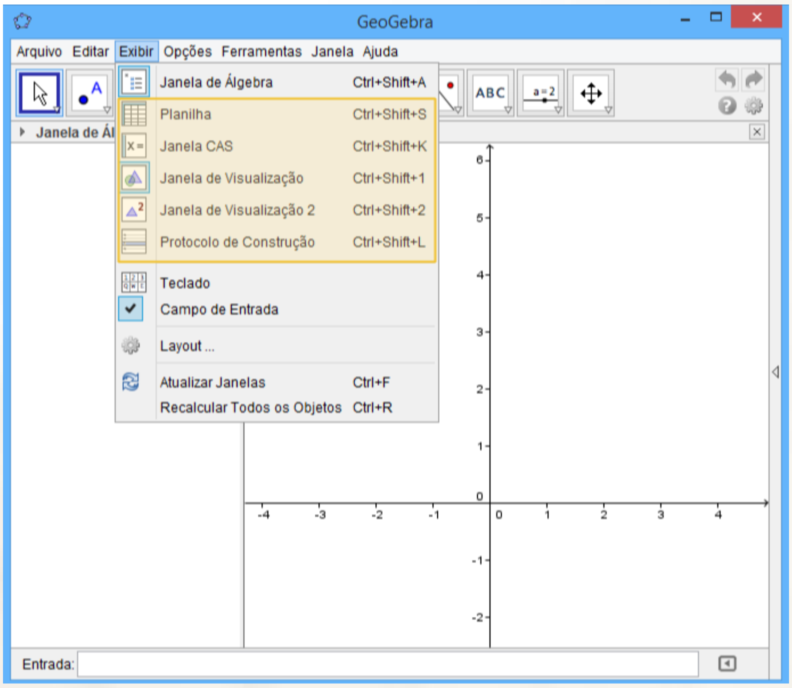


Figura 13 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

No *Geogebra* é possível gerenciar as várias janelas de acordo com o que se quer estudar. Para o nosso estudo de estatística vamos usar a **Janela de Álgebra**, **Planilha** e **Campo de Entrada**. Primeiramente vamos fechar a **Janela de Visualização**,

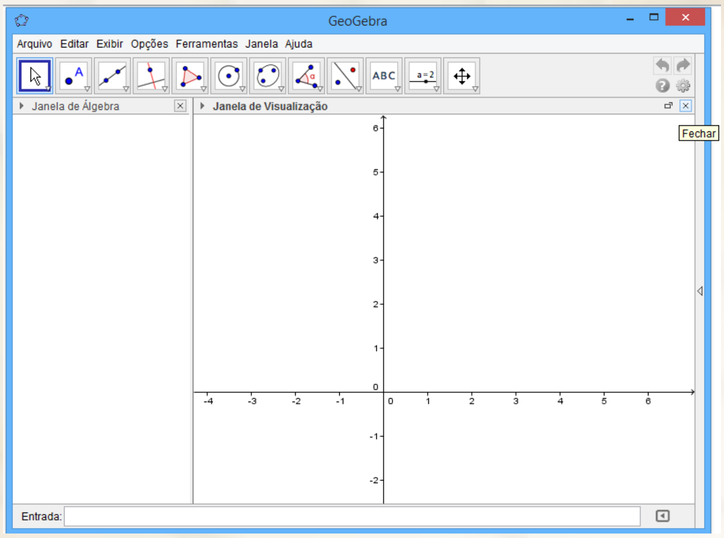


Figura 14 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Em seguida vamos exibir a planilha, clicando na ferramenta **Exibir** e depois em Planilha.

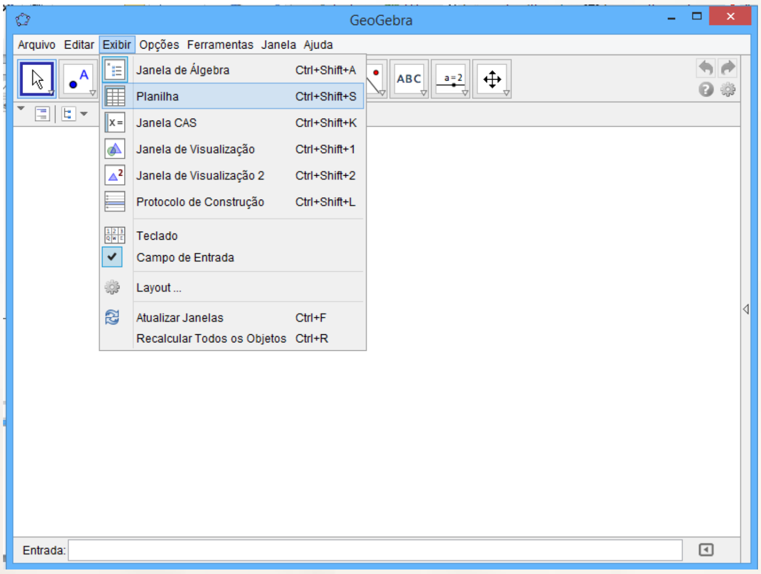


Figura 15 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Feito isso, ficamos com a disposição a seguir, e então podemos começar com nossa primeira atividade sobre estatística.

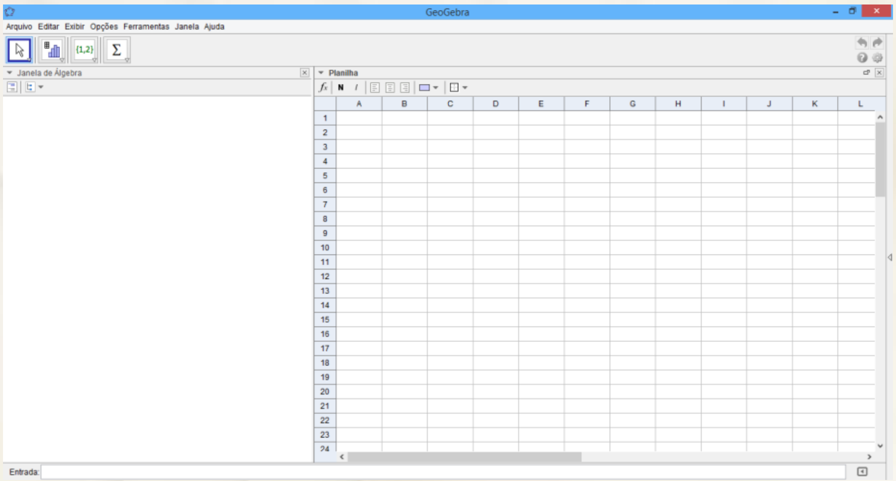


Figura 16 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Para a atividade 1, como temos um grupo de 21 pessoas, precisamos criar uma lista com 21 entradas. Para isso vamos usar a ferramenta **Criar Lista**. Vamos usar as células de A1 até A21. Escolhidas as células temos que preenchê-las com o número zero, pois não é possível, usando essa ferramenta, criar uma lista com as células sem preenchimento. Sendo assim, selecionamos as 21 células da planilha preenchidas e para isso basta clicar na primeira célula A1 e arrastar com o mouse até a célula A21, e depois clicar na ferramenta **Criar Lista**.

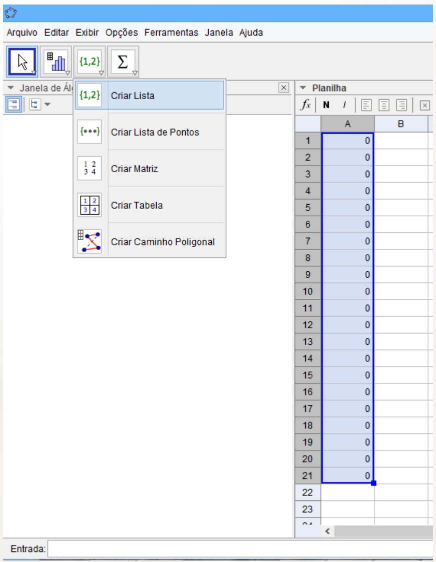


Figura 17 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Vamos nomear essa lista de salário.

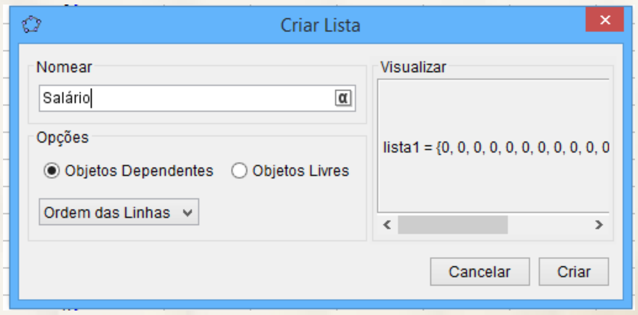


Figura 18 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Para mudar a cor das células selecionadas, basta clicar na ferramenta **Cor de Fundo** e escolher uma cor.

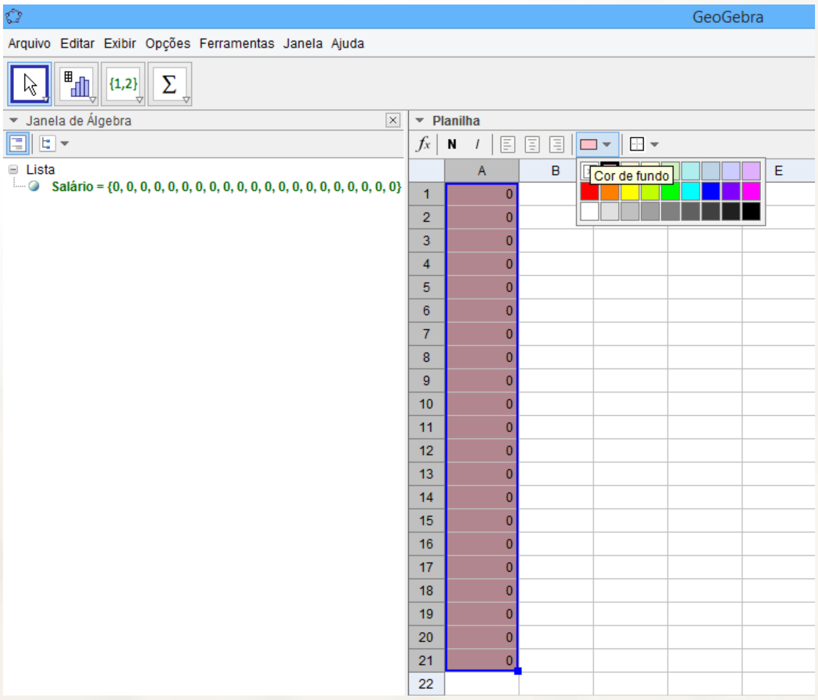


Figura 19 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Como a mediana é um valor central, podemos destacar o nosso termo central, A11, mudando a cor dessa célula, para isso devemos selecionar a célula A11 e usar novamente a ferramenta **Cor de Fundo**.

Como a lista **Salário** criada podemos usar as funções de **Média** e **Mediana**. Essas funções já estão pré-definidas no *Geogebra*. Temos duas opções para acessá- las. A primeira opção é digitar no **Campo de Entrada** a palavra média e selecionar a opção **Média**.

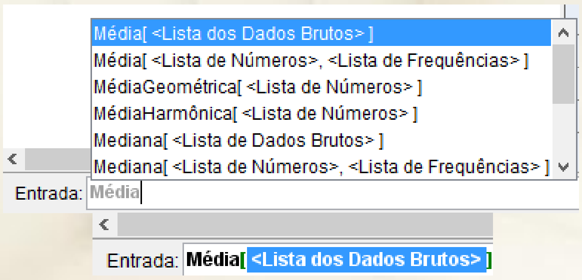
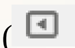


Figura 20 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

A segunda opção é usar a opção de ajuda, clicando no botão **Ajuda** ( canto inferior a direita). Ao clicar no **Ajuda**, aparecerá várias funções matemáticas, entre elas **Estatística**, clicando no botão “+” abrirá todas as funções da estatística, então selecionamos a opção desejada, **Média**, e clicamos em **Colar**. Observação: para fechar a caixa de ajuda, basta clicar no botão **Ajuda** novamente.

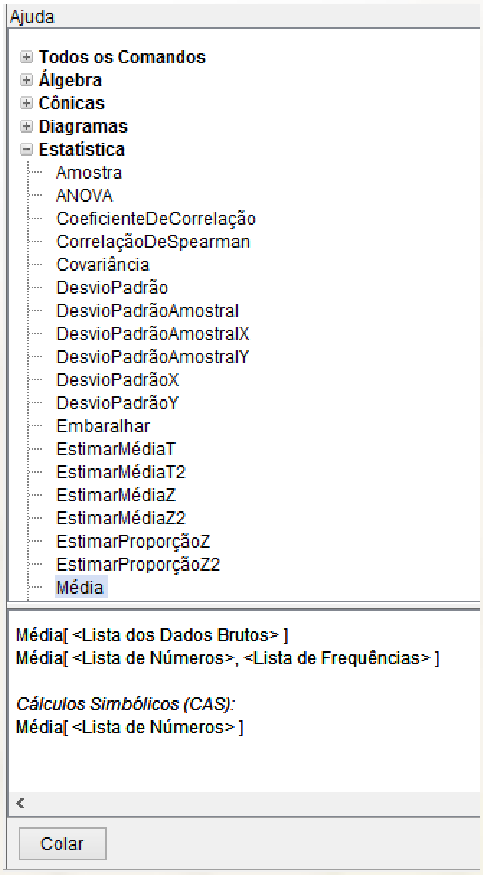


Figura 21 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Selecionada a função **Média**, precisamos informar ao *software* qual lista queremos que seja calculada a média; para isso é só digitar, entre chaves, o nome da lista, neste caso a lista Salário e apertar *enter*. Feito isso o *software* nomeará, automaticamente, esse **Número** de **a**.

Figura 22 - Tela do Geogebra
Fonte: Geogebra 4.4.3.0

Para renomear deve-se clicar com o botão direito do mouse sobre **a** e selecionar a opção **Renomear**. Nomearemos essa função de **Média**.

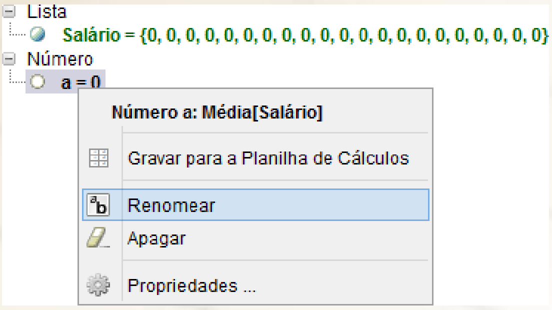


Figura 23 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Para acessar a função **Mediana** o procedimento é o mesmo. Selecionamos a função Mediana (pela opção 1 ou 2) que queremos calcular a mediana da lista **Salário**. Renomeamos a função para **Mediana** e assim concluímos a criação da primeira atividade.

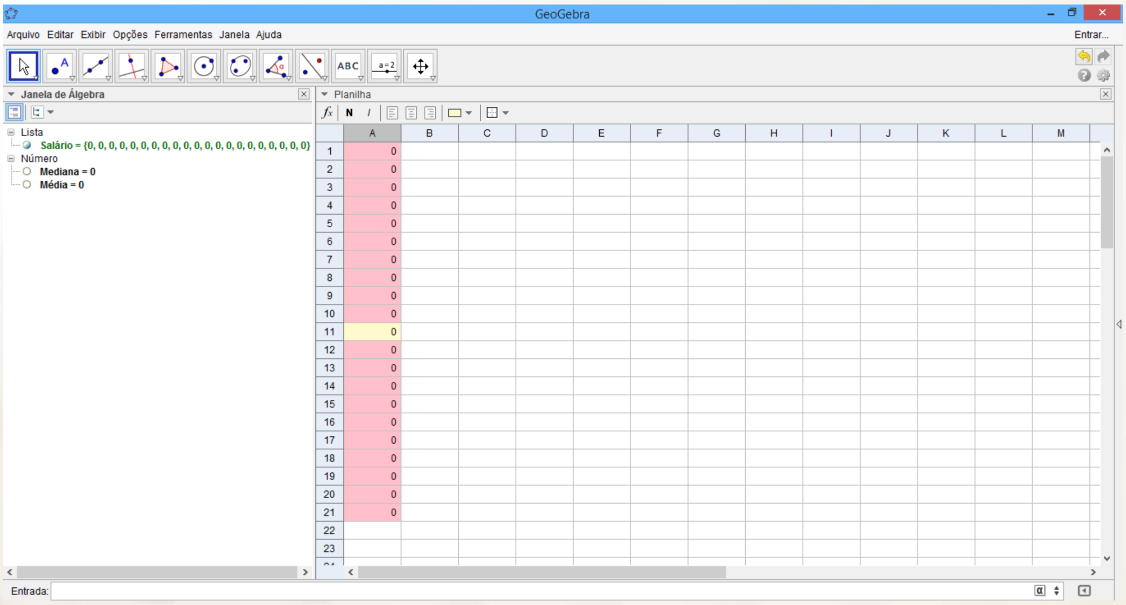


Figura 24 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Na atividade 2, os dados da prova de João foram:

Acertos	Quantidades
0	0
1	10
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	1
8	2
9	3
10	4

Para essa atividade usaremos a mesma disposição das janelas usadas na primeira atividade. Vamos usar a **Janela de Álgebra**, **Planilha** e **Campo de Entrada**.

Primeiramente vamos colocar os dados, da prova de João, na planilha do *Geogebra*. Para mudar a cor das células selecionadas, basta clicar na ferramenta **Cor de Fundo** e escolher uma cor.

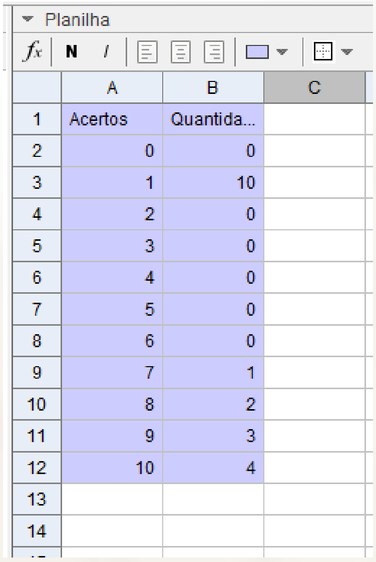


Figura 25 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Feito isso, vamos criar duas listas, usando a ferramenta **Criar Lista**, uma lista com os **Acertos** e outra lista com as **Quantidades** de acertos. Para isso basta clicar na primeira célula e arrastar com o mouse até a última célula, e depois clicar na ferramenta **Criar Lista**. Renomeando as listas respectivamente de **Acertos** e **Quantidades**.

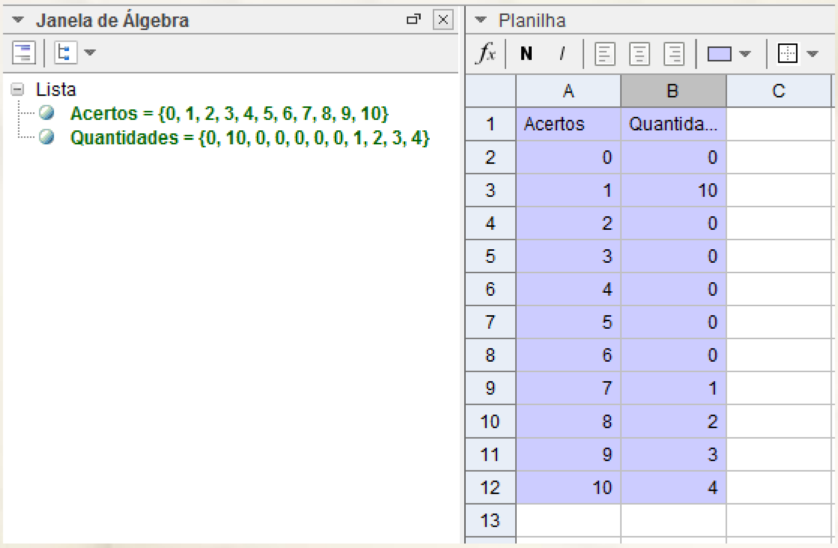


Figura 26 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Com as listas **Acertos** e **Quantidades** criadas podemos agora calcular a média aritmética ponderada desses dados. Lembrando que a média aritmética ponderada $\bar{x}$ de um conjunto de elementos x_1, x_2, ... , x_k com frequências absolutas respectivamente iguais a n_1, n_2, ... , n_k é calculada da seguinte maneira:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

Para isso vamos usar a função, pré-definida, **SigmaXY**. Para acessar essa função podemos digitar no **Campo de Entrada** a palavra sigma e selecionar a opção **SigmaXY** ou usar a opção **Ajuda**.

A função **SigmaXY** calcula a soma dos produtos: $xi \times yi$, *em que* xi *e* yi , são as coordenadas dos pontos dados na lista. No nosso caso precisamos calcular a soma dos produtos da quantidade de acertos, ou seja, **SigmaXY[Acertos, Quantidades]**, para calcular a média aritmética ponderada precisamos dividir esse resultado pela soma das quantidades de acertos. Resumindo, selecionada a função **SigmaXY**, informamos a <Lista de Abscissas> e a <Lista de Ordenada> que são respectivamente **Acertos** e **Quantidades** e depois dividimos pela soma das quantidades de acertos ficando com a seguinte função:

SigmaXY[Acertos, Quantidades] / Soma[Quantidades]

Feito isso o *software* nomeará, automaticamente, esse **Número** de **a**, renomearemos esse número de **Média**. Finalizando a criação da segunda situação.

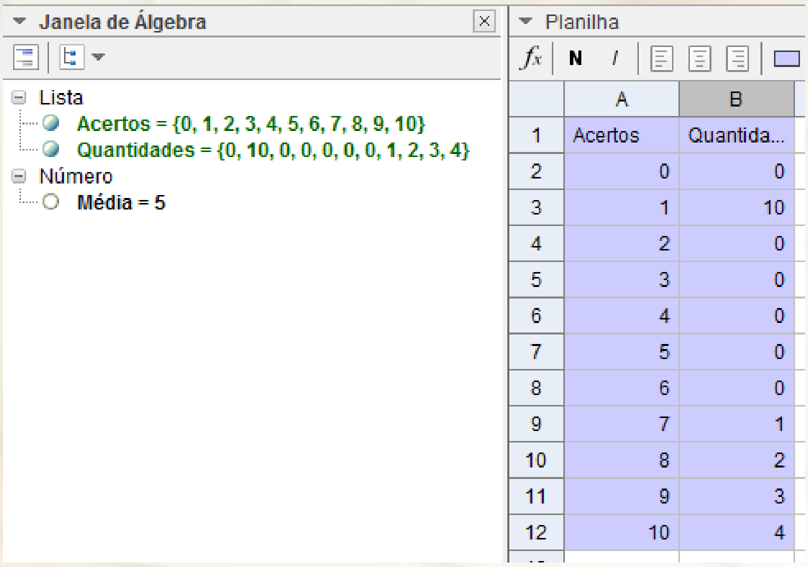


Figura 27 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Para a atividade 3, novamente usaremos a **Janela de Álgebra**, **Planilha** e Campo de Entrada.

Primeiramente vamos criar quatro listas, **Turma1**, **Turma2**, **Turma3** e **Turma4** (Obs.: não use espaço entre os símbolos ao nomear uma lista). Para isso vamos usar a ferramenta **Criar Lista**. Vamos usar as células de A1 até A6, para lista **Turma1**; as células B1 até B6, para a lista **Turma2**; as células C1 até C6, para a lista **Turma3** e as células D1 até D6 para a lista **Turma4**.

Escolhidas as células temos que preenchê-las com o número zero, pois não é possível, usando essa ferramenta, criar uma lista com as células sem preenchimento, então selecionas as cinco células da primeira lista e clicamos na ferramenta **Criar Lista**, fazendo esse mesmo processo para as quatro listas.

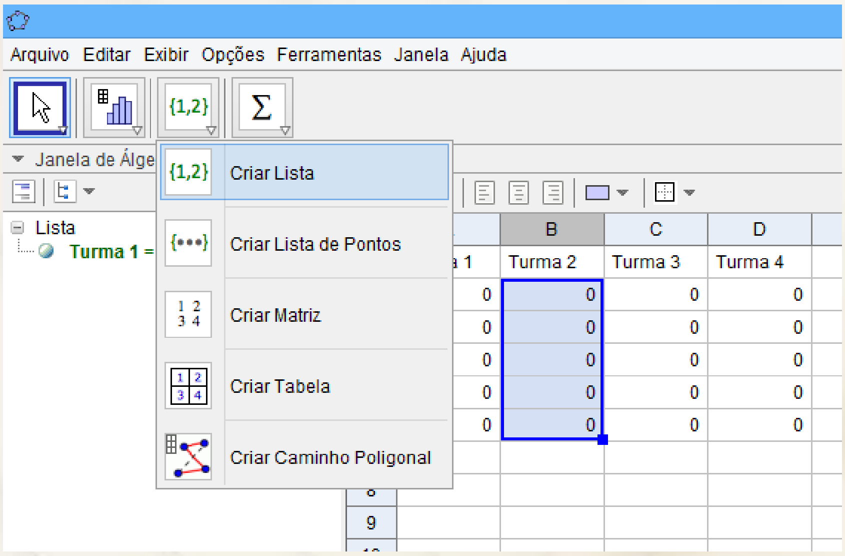


Figura 2835 - Tela do *Geogebra*
Fonte: *Geogebra* 4.4.3.0

Para mudar a cor das células, basta clicar na ferramenta **Cor de Fundo** e escolher uma cor.

Com as listas das quatro turmas criadas podemos usar as funções **Média** e **Desvio Padrão**. Essas funções também estão pré-definidas no *Geogebra* e para acessa-las podemos digitar no **Campo de Entrada** a palavra média (desvio padrão) e selecionar a opção desejada **Média** (**Desvio Padrão**) ou usar a opção **Ajuda**.

Vamos usar a função **Desvio Padrão** nas quatro turmas e nomear esses dados de DP1, DP2, DP3 e DP4, respectivamente. E usar a função **Média** nas quatro turmas e nomear de MédiaT1, MédiaT2, MédiaT3 e MédiaT4. Concluindo a criação da terceira atividade.

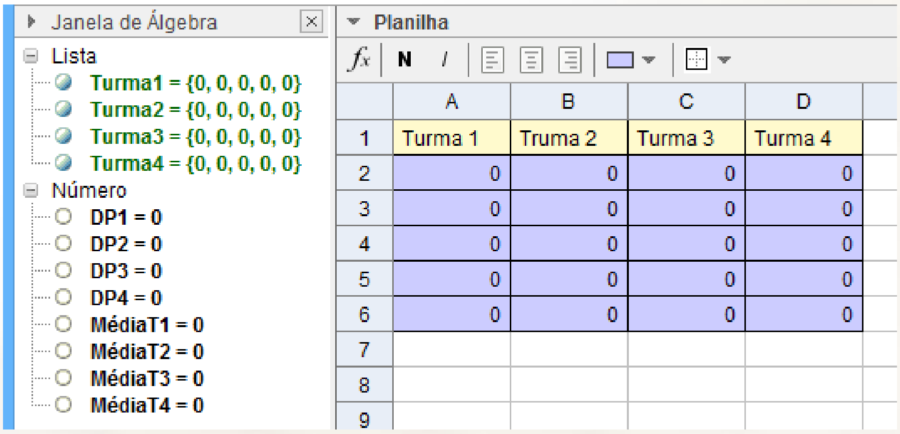


Figura 29 - Tela do Geogebra
Fonte: Geogebra 4.4.3.0

Sobre os autores

Adriana Barbosa de Oliveira

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Possui mestrado e doutorado em Educação Matemática pela mesma instituição. É professora adjunta do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e membro do grupo de estudos HEMEP - História da Educação Matemática em Pesquisa.

Antonio Sales

Licenciado em Matemática, Mestre e Doutor em Educação. É docente Sênior do Programa de Mestrado Profissional em Educação, da UEMS, professor no curso de Medicina da Uniderp/Anhanguera onde orienta pesquisas nas áreas de Educação em Saúde e sobre Bem-Estar Humano. É também docente do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Uniderp/Anhanguera e do Programa de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN).

Danielly Kaspary

Doutora pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul e pela Université Grenoble Alpes em Educação Matemática. Professora da Université Grenoble Alpes e integrante da instituição de pesquisa IREM de Grenoble. Realiza pesquisa na área do currículo do ensino de matemática e atua especialmente na formação inicial de professores dos anos iniciais.

Franciele Rodrigues de Moraes

Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Atualmente é Professora da Educação Básica atuando principalmente nos seguintes temas: erros, álgebra, teoremas em ação, Aplusix.

João Ricardo Viola dos Santos

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Realizou estágio, durante o mestrado, na Miami University, United States. Doutor em Educação Matemática pela UNESP de Rio Claro. Realizou pós-doutorado na School of Education da University of Cape Town, South

Africa. É professor do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e atua no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Atua também como professor do Programa de Pós-Graduação em Ciências da Natureza e Matemática na UFMT-SINOP (Mestrado Profissional). Foi Editor da revista Perspectivas da Educação Matemática (2014-2019). Foi diretor da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Regional Mato Grosso do Sul (2012-2015 e 2015-2018). Atualmente é coordenador do Grupo de Trabalho de Avaliação e Educação Matemática da SBEM (2019-2021)

José Luiz Magalhães de Freitas

Licenciado em Matemática pela UNESP-Araraquara-SP, Mestre em Matemática pela USP-São Carlos e Doutor em Didática da Matemática pela Universidade Montpellier II – França. Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando em ensino e pesquisa em geometria, aritmética e álgebra na educação básica e no ensino superior. É Professor Pesquisador Sênior do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. Atua também como docente pesquisador no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Uniderp/Anhanguera e no Programa de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN).

Katiane Rocha

Doutora pela École Normale Supérieure de Lyon na área de Didática da Matemática. Graduada em Licenciatura em Matemática e mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Tem experiência na área de Educação Matemática, com pesquisa em tecnologia educacional. Atualmente, participa do Grupo de Estudo em Didática da Matemática (DDMat) ligado à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Marcio Antonio da Silva

Pós-doutorado pelo Departamento de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Estocolmo (Suécia), supervisionado por Paola Valero. Doutorado e Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Atualmente, é Professor Associado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, lotado no Instituto de Matemática e atuando Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Trabalhou durante doze anos como professor de Matemática em escolas da cidade de São Paulo, tanto nos anos finais do ensino fundamental, quanto no ensino médio. É líder do Grupo de Pesquisa Currículo e Educação Matemática (GPCEM)

Marilena Bittar

Licenciada em Matemática pela UFMS, mestre em Matemática pela UnB, doutora em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier/Grenoble-França, pós-doutora pela Universidade Joseph Fourier/Fr. Professora titular da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e professora Sênior do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pesquisadora produtividade CNPq.

Maysa Ferreira da Silva

Licenciada em Matemática (UFMS) e Mestre em Educação Matemática na Linha de pesquisa Didática da Matemática pela UFMS. Doutora em Educação na linha de pesquisa Diversidade, Diferença e Desigualdade Social pela UFPR. Professora de Matemática, na Educação Básica, do quadro permanente da Secretaria Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul. Atua junto a coordenação do projeto Afirmação na Pós-Graduação (Curso Pré-Pós) desenvolvido pela Superintendência de Inclusão, Políticas Afirmativas e Diversidade (SIPAD/UFPR). Membro do Núcleo de Estudos Afro-brasileiros da Universidade Federal do Paraná (NEAB/UFPR) e do Grupo Trabalho Zumbi do Palmares – TEZ em Campo Grande/MS.

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato

Graduação em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, especialização em Planejamento e Tutoria em Educação Aberta e a Distância e Mestrado em Educação pela UFMS. Doutorado sanduiche na França (CAPES/PDSE) em Educação Matemática pelo PPGEduMat/UFMS. Professora efetiva da UFMS desde 2009. Tem experiência na coordenação de curso de Licenciatura em Matemática, no ensino nas modalidades presencial e a distância. Como também, na avaliação de curso à distância. Atuando no ensino e aprendizagem com uso de software e também em ambientes virtuais, como: moodle e google classe.

Thiago Pedro Pinto

Professor do Instituto de Matemática (INMA) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Possui mestrado em Educação Matemática pela Unesp/Rio Claro e doutorado em Educação para as Ciências

Unesp/Bauru. Vice-líder do Grupo História da Educação Matemática em Pesquisa (HEMEP – www.hemep.org) e possui interesse em temáticas relacionadas à filosofia e história da/na Educação Matemática. Diretor Regional da SBEM-MS (2020-2023).

Professores Participantes da ação presencial de outubro de 2013 em Campo Grande (MS):

NOME	ESCOLA	MUNICÍPIO
Augusto Cardoso Barnali	E.E Menodora Fialho	Dourados
Adriani Denisia Martini de Barros	E.E Antonia da Silveira Capilé	Dourados
Claudio Miranda	E.E Vilmar Vieira Matos	Dourados
Rafaela Cercas de Oliveira	E.E Presidente Vargas	Dourados
Sandro Bezerra da Silva	E.E Floriano Viegas Machado	Dourados
Idalgo Primo Monteiro	E.E Nathercia Pompeo dos Santos	Corumbá
José Carlos dos Santos	E.E Dom Bosco	Corumbá
Aloísio da Silva Ferreira	E.E Dr. Gabriel Vandoni	Corumbá
Vanderley Inácio Gonçalves	E.E Marechal Castelo Branco	Água Clara
Vander Tarciso	E.E Barão do Rio Branco	Douradina
Anderson Max Garcia	E.E João Vitorino Marques	Aral Moreira
Célia Regina de Ambrósio	E.E Adilson Alves da Silva	Brasilândia
Isabela Carrilho dos Santos	E.E Debrasa	Brasilândia
Rander Paes Fernandes da Silva	E.E José Ferreira da Costa	Costa Rica
Maria Luiza Garcia de Lima	E.E Santos Dumond	Costa Rica
Ender Machado de Oliveira	E.E Ernesto Solon Borges	Bandeirantes
José Candido de Castro Neto	E.E João Ribeiro Guimarães	Bandeirantes
Moacir Nunes da Silva Junior	E.E Roberto Scaff	Anastácio
Sandra Elisa Felipe	E.E Carlos Drumond de Andrade	Anastácio
Fernando Wilson Fusco Junior	E.E Georgina de Oliveira Rocha	Aparecida do Taboado
Quelmi Eloísa Mendonça Tosta	E.E Ernesto Rodrigues	Aparecida do Taboado
Elza Trindade da Costa Silva	E.E Camilo Bonfim	Camapuã
Flávio José de Oliveira Borges	E.E Joaquim M. da Silva	Camapuã/Pontinha do Cocho
Daiana Souza de Jesus	E.E Bráz Sinigáglia	Batayporã
Odete Pereira dos Santos	E.E Jan Antonin Bata	Batayporã
Paula Luciana Leite Paixão Oliveira	E.E Pedro Mendes Fontana	Coxim
Cindy Kelly Souza Rafael	E.E Pedro Mendes Fontoura	Coxim
Tiago Henrique Moscardini	E.E Padre Nunes	Coxim
Claudemir dos Santos	E.E Marcilio Augusto Pinto	Iguatemi
Cleide Aparecida Humberto de Souza	E.E Paulo Freire	Iguatemi
Nilton Cezar Centurion Saraiva	E.E Estefana Centurion Gambarra	Dois Irmãos do Buriti
Jader Gabriel Campos	E.E Indigena Cacique Ndeti Reginaldo	Dois Irmãos do Buriti
Laura Antunes Pimentel	E.E 13 de Maio	Deodápolis
Evandro Sergio de Souza Gonçalos	E.E Scila Médici	Deodápolis
Heloisa Alves Pereira	E.E Lagoa Bonita	Deodápolis/ Lagoa Bonita
Edirley Viana Vieira	E.E Mbo Eroy Guarani Kaiowá	Amambai
Valdete Lorensetti	E.E Dom Aquino Corrêa	Amambai
Priscila Baena Xavier	E.E Vespasiano Martins	Amambai
Dávid Ferreira de Souza	E.E Luiz da Costa Falcão	Bonito
Wellington Fernandes Pache	E.E Bonifácio Gomes Camargo	Bonito
Diléia de Fátima Xavier Bonfin	E.E Eufrosina Pinto	Glória de Dourados
Nadir Simplicio Justino Nodematu	E.E Hilda Bergo Duarte	Glória de Dourados
Vera Lucia Angelica da silva	E.E João Pedro Pedrossian	Bodoquena
Arnaldo Ferreira da Silva Filho	E.E João Pedro Pedrossian	Bodoquena
Sueli Mazini	E.E Jonas Belarmino da Silva	Fátima do Sul/Culturama
Rosangela Volobruff do Nascimento	E.E Senador Filinto Muller	Fátima do Sul
Fernando de Melo	E.E Eneil Vargas	Coronel Sapucaia
Karina Shizue Kawakami	E.E Guaicuru	Anaurilândia
Everton Renato Vieira de Araújo	E.E Prof. Ezequiel Balbino	Anaurilândia

Chris Paulino da Rocha	E.E Dr. Joé M. F. Fragelli	Angélica
Jorge Viegas Matins	E.E Rui Barbosa	Cassilândia
Genivaldo Donizete de Oliveira Longo	E.E São José	Cassilândia
Julio Veloso dos Santos	E.E Augusto Krug Netto	Chapadão do Sul
Paulo Hudson Balte	E.E Ester Silva	Bela Vista
Tarcilio Franco	E.E Castelo Branco	Bela Vista
Valdimiro Batista Barboza	E.E José Alves Quito	Corguinho
Maristela Aparecida da Costa	E.E Coronel Sapucaia	Coronel Sapucaia
Érika Ayumi Satake	E.E Arcênio Rojas	Caarapó
Vera Lucia Souza do Nascimento	E.E Manoel da C. Lima	Bataguassu
Rosana Parolisi Lima Fanelli	E.E Peri Martins	Bataguassu
Cristina de Oliveira Lima Becker	E.E Eldorado	Eldorado/ Guaira
Rafael Razza Pereira	E.E Eldorado	Eldorado
Sandra Regina Neto Braga	E.E Pantaleão Coelho Xavier	Antonio João
Luzia Maria Wetter Pinto	E.E Coronel José Alves Ribeiro	Aquidauana
Cleber Matias Wust	E.E Dr. Fernando C. da Costa	Aral Moreira
Mauricio Soares dos Reis	E.E Marechal Rondon	Nova Andradina
Lucicléia Encizo Martins Silva	E.E Prof. Luiz Carlos Sam	Nova Andradina/ Nova Casa Verde
Maria Aparecida da Silva	E.E Aracilda C.C. da Costa	Paranaíba
Tânia de Souza Menezes	E.E José Garcia Leal	Paranaíba
Luiz Ricardo do Nascimento	E.E Wladislau Garcia Gomes	Paranaíba
Andréia Borges de Freitas	E.E Gustavo Rodrigues Silva	Paranaíba
Adriano Aparecido Barros dos Santos	E.E Nova Itamarati	Ponta Porã
Roney Roger Dutra Garcia	E.E João Brenbatti Calvoso	Ponta Porã
Cristina Elaine da Costa Spanenberg	E.E Prof. Geni Marques Magalhães	Ponta Porã
Gabriely Rebouças Gonçalves	E.E Dep. Fernando C. C. Saldanha	Ponta Porã
Elias Pereira Lima	E.E Fernando Corrêa	Três Lagoas
Flodoaldo Moreno Júnior	E.E Fernando Correa	Três Lagoas
Thiago Carneiro de Barros Siquiera	E.E Dom Aquino Corrêa	Três Lagoas
Elisangela Camargo Nantes Alves	E.E Emanuel Pinheiro	Vicentina/Vila Rica
Valdirene Moura Rodrigues Marques	E.E Padre José Daniel	Vicentina
Gilvani Ritter	E.E Guimarães Rosa	Sete Quedas
Samuel Lemes de Campos	E.E 13 de Maio	Sete Quedas
Regina Célia List	E.E Paulo Eduardo de Souza F.	Sidrolândia
Luciano Rodrigues de Freitas Masson	E.E Vespasiano Martins	Sidrolândia/ Quebra Coco
José Mauro Ferreira	E.E Prof. Catarina de Abreu	Sidrolândia
Suzana Amador Nogueira Ribas	E.E Sidrônio Antunes de Andrade	Sidrolândia
Fernando Uiliam Estigarribia	E.E José Juarez de Oliveira	Itaquiraí
Cristiane da Silva Hellmann	E.E Manuel Guilherme dos Santos	Itaquiraí
Vagner Caceres Soares	E.E Etalívio Pereira Martins	Rio Brilhante
Neuza Hasako Nugamatsu Shimada	E.E Fernando Corrêa da Costa	Rio Brilhante
Sandra Regina Prudente Bertonha	E.E Caetano Pinto	Miranda
Luiz Antonio Nogueira	E.E Carmelita Canale Rebua	Miranda
Ellen Josefa Ferreira Conrado	E.E Rosa Pedrossian	Miranda
José Marques	E.E Cacique Timóteo	Miranda
Rodrigo Miranda Zanoni	E.E Antônio Coelho	Nova Alvorada do Sul
Fabiana Alves Amorim	E.E Delfina Nogueira de Souza	Nova Alvorada do Sul
Cristiane Ramos da Silva	E.E Leme do Prado	Ladário
Denise Assad de Paula	E.E 2 de Setembro	Ladário
Evandro Sebastião da Silva	E.E São Gabriel	São Gabriel do Oeste
Carla Aparecida Herrero da Silva	E.E Berlamino Ferreira Cunha	São Gabriel do Oeste
Airton Nakazato	E.E Antonio Fernandes	Naviraí
Jayme Evandro Sancles	E.E José Bonifácio	Porto Murtinho
Gerson Paredes Silva	E.E José Alves Ribeiro	Rochedo
Marcilio Fischer	E.E Leontino A. de Oliveira	Rio Negro

José Aparecido Bruschi	E.E Eduardo B. Amorim	Ribas do Rio Pardo
Ana Cristina Teodoro	E.E Japorã	Japorã
Roziney Aparecida Patuzzu	E.E Marechal Rondon	Mundo Novo
Hiran Castro Alexandra Filho	E.E Cleto de Moraes Costa	Tacuru
Gleison Nunes Jardim	E.E Presidente Médici	Naviraí
André Vieira Ruiz Garcia	E.E Cel. Pedro José Rufino	Jardim
Déborah Fabíola Dagostin Recalde	E.E Cel. Juvêncio	Jardim
Eli Brum de Mattos Carbonaro	E.E Antonio João Ribeiro	Itaporã
Meire Moraes da Silva	E.E Edson Bezerra	Itaporã
Luzia de Oliveira da Silva	E.E Rodrigues alves	Itaporã
Cleber Gualda Barbi	E.E Senador Filinto Muller	Ivinhema
Patricia Samúdio dos Santos	E.E Joaquim Gonçalves Ledo	Ivinhema/Amandina
Rosane Souza Cristofoli	E.E Padre Constantino de Monte	Maracaju
Luiz Carlos dos Santos	E.E Manoel Ferreira de Lima	Maracaju
Franklin Kappelen Flores	E.E Antonio Nogueira da Fonseca	Terenos
Thaiane de Morais Bispo	E.E Prof. Cleuza Teodoro	Pedro Gomes
Martos Antonio da Silva Moreno	E.E Vergelino Mateus de Oliveira	Rio Verde de Mato Grosso
Adilson José Francischine	E.E José Serafim Ribeiro	Jaraguari
Arini Gomes de Freitas Camillo	E.E Ana Maria de Souza	Selviria
André Luiz Castanharo	E.E Kendi Nakai	Paraiso das Águas
Walter aparecido Paz Tavares	E.E Prof. João Pereira Valim	Inocência
José Américo Sartoratto	E.E Cmte. Mauricio	Sonora
Adalberto Aparecido Campaner	E.E Thomaz Barbosa Rangel	Rio Verde do Mato Grosso
Marisane Soares Vilasanti	E.E Santiago Benites	Paranhos
Denis Pinho da Silva	E.E Dr. João Ponce de Arruda	Ribas do Rio Pardo
Alexandro Hideaki Nakata	E.E Castelo Branco	Mundo Novo
Givanilza Alves dos Santos	E.E Dr. Martinho Marques	Taquarussu
Edilaine dos Santos Silva Portilho	E.E Porto Vilma	Deodápolis/Porto Vilma
Gean de Paula Rodrigues Sotolani	E.E OIRV Boas	Nioaque
Gean Carlos F. Queiroz	E.E 31 de Março	Juti
Renato Arantes Raulino	E.E Zumbi dos Palmares	Jaraguari