

Sandra Maria Pinto Magina  
Síntria Labres Lautert  
Alina Galvão Spinillo  
(Organizadoras)

# PROCESSOS COGNITIVOS E LINGÜÍSTICOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Teoria, Pesquisa e Sala de Aula

Biblioteca  
do Educador  
Coleção SBEM  
Volume **21**

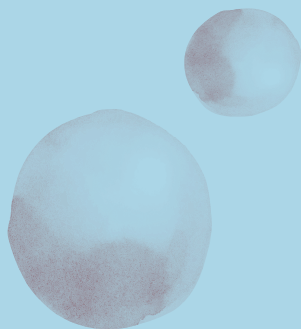


Sociedade Brasileira de  
Educação Matemática

Sandra Maria Pinto Magina  
Síntria Labres Lautert  
Alina Galvão Spinillo  
(Organizadoras)

# PROCESSOS COGNITIVOS E LINGÜÍSTICOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Teoria, Pesquisa e Sala de Aula



Sociedade Brasileira de  
Educação Matemática



Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM  
Universidade de Brasília - Campus Darcy Ribeiro  
Caixa Postal 4332 - AC UNB - CEP 70842-970 - Asa Norte/DF  
[www.sbembrasil.org.br](http://www.sbembrasil.org.br) | [sbem@sbembrasil.org.br](mailto:sbem@sbembrasil.org.br)

#### Conselho Editorial:

Marcelo Almeida Bairral  
Geraldo Eustáquio Moreira  
Vanessa Franco Neto

#### Conselho Editorial Nacional (CEN):

Alex Jordane de Oliveira  
André Luis Trevisan Antonio  
Carlos Fonseca Pontes  
Carlos Augusto Aguilar Júnior  
Clélia Maria Ignatius Nogueira  
David Antonio da Costa  
Fernanda Malinosky Coelho da Rosa  
Gilda Lisboa Guimarães  
Janete Bolite Frant  
João Alberto da Silva  
Jonei Cerqueira Barbosa  
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino  
Maria Auxiliadora Vilela Paiva  
Milton Rosa  
Paulo Afonso Lopes da Silva  
Romaro Antonio Silva  
Sintria Labres Lautert  
Suzi Samá Pinto

---

#### Revisão de texto

Antonio Balbino Silva

#### Projeto Gráfico, Capa e Diagramação

Janaína Mendes Pereira da Silva

#### Imagens utilizadas na capa

Freepik.com

---

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

---

Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática  
teoria, pesquisa e sala de aula [livro eletrônico] / organização  
Sandra Maria Pinto Magina, Sintria Labres Lautert, Alina  
Galvão Spinillo. -- 1. ed. -- Brasília, DF : SBEM Nacional, 2022.  
-- (Coleção SBEM : biblioteca do educador ; 21)  
PDF.

Vários autores.  
ISBN 978-65-87305-09-7

1. Ambiente de sala de aula 2. Cognição

3. Educação 4. Linguagem 5. Matemática - Estudo e ensino I. Magina,  
Sandra Maria Pinto. II. Lautert, Sintria Labres. III. Spinillo, Alina Galvão.  
IV. Série.

22-98017

CDD-510.7

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129



## **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**

### **DIRETORIA NACIONAL EXECUTIVA – DNE**

Marcelo Almeida Bairral (UFRRJ)

**Presidente**

Fátima Peres Zago de Oliveira (IFC - Campus Rio do Sul)

**Vice-Presidente**

Geraldo Eustáquio Moreira (UnB)

**Primeiro Secretário**

Vanessa Franco Neto (UFMS)

**Segunda Secretária**

Maurício Rosa (UFRGS)

**Terceiro Secretário**

Leandro de Oliveira Souza (UFU)

**Primeiro Tesoureiro**

Ana Virgínia de Almeida Luna (UEFS)

**Segunda Tesoureira**

### **Conselho Nacional Fiscal – CNF**

Antonio Carlos de Souza (UNESP - Campus de Guaratinguetá)

Everton José Goldoni Estevam (UNESPAR - Campus de União da Vitória)

Verônica Gitirana (UFPE)

Rhômulo Oliveira Menezes (SEDUC-PA / UFPA)

### **Comissão de Avaliação – CA**

Vanessa Franco Neto (UFMS, DNE, Presidente)

Geraldo Eustáquio Moreira (UnB, DNE, Vice-Presidente)

Jonei Cerqueira Barbosa (UFBA, CEN)

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino (UEL, CEN)

Suzi Samá (FURG, CEN)

### **Secretária da SBEM**

Larissa Martins Guedes

Obra submetida e aprovada no Edital SBEM-DNE 03/2021.



*Dedicamos este livro a Romulo Lins (in memorium),  
quem, com sua irreverência e mente brilhante, estimulou muitas  
ideias, entre elas a de que os processos cognitivos e linguísticos são  
instâncias da Educação Matemática*

# SUMÁRIO

PREFÁCIO.....	8
---------------	---

APRESENTAÇÃO.....	19
-------------------	----

## PARTE 1: PERSPECTIVAS TEÓRICAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

### Capítulo 1

<b>APROPRIAÇÃO DE PRÁTICAS DE NUMERAMENTO ESCOLARES: COMPREENDENDO APRENDIZAGEM MATEMÁTICA COMO PRÁTICA DISCURSIVA.....</b>	<b>25</b>
---	-----------

*Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca*

*Fernanda Maurício Simões*

### Capítulo 2

<b>A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS NA SALA DE AULA.....</b>	<b>55</b>
---	-----------

*Sandra Maria Pinto Magina*

*Síntria Labres Lautert*

*Irene Mauricio Cazorla*

### Capítulo 3

<b>O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS: TEORIZAÇÃO E DESDOBRAMENTOS PARA A PESQUISA E PARA O ENSINO.....</b>	<b>98</b>
---	-----------

*Amarildo Melchíades da Silva*

*Viviane Cristina Almada de Oliveira*

*Vitor Rezende Almeida*

### Capítulo 4

<b>DOIS OLHARES SOBRE A APRENDIZAGEM DE UM FUTURO PROFESSOR DO CAMPO.....</b>	<b>123</b>
---	------------

*Airton Carrião*

*Vanessa Sena Tomaz*

### Capítulo 5

<b>AS RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E LINGUAGEM DISCUTIDAS A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....</b>	<b>156</b>
--	------------

*Alina Galvão Spinillo*

*Leidy Johana Peralta Marín*

*Capítulo 6*

**ESTRATÉGIAS E SENTIDOS: UM MODELO ALTERNATIVO PARA ANÁLISE/ACESSO A INTERAÇÕES EM AÇÃO.....181**

*Janete Bolite Frant*

*Monica Rabello de Castro*

**PARTE 2: PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

*Capítulo 7*

**A RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA DE COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA POR ESTUDANTES DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.....208**

*Ernani Martins dos Santos*

*Capítulo 8*

**COMPETÊNCIA DE GENERALIZAÇÃO EM SITUAÇÕES DE RELAÇÃO FUNCIONAL: UM DIAGNÓSTICO.....235**

*Lígia Sousa Bastos*

*Vera Lucia Merlini*

*César Teixeira*

*Capítulo 9*

**ESCREVER PARA APRENDER MATEMÁTICA: TECENDO FIOS PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA ESCOLAR.....262**

*Ronaldo Barros Ripardo*

*Capítulo 10*

**ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DE VIDEOAULAS: UM OLHAR PELA PERSPECTIVA DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA.....298**

*Luiz Carlos Leal Junior*

*Egídio Rodrigues Martins*

*Cecília Pereira de Andrade*

**SOBRE AS ORGANIZADORAS E OS AUTORES.....328**

## PREFÁCIO

O encontro da pesquisa com a prática escolar tem um novo capítulo com a publicação deste livro ***“Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática: teoria, pesquisa e sala de aula”***, editado pelas pesquisadoras Alina Galvão Spinillo, Sandra Magina e Síntria Labres Lautert, representantes das primeiras gerações de pesquisadores em Educação Matemática a partir da Psicologia Cognitiva que, no âmbito da Matemática, se constituiu como área do conhecimento que teve seu impulso em meados de 1976 com a criação do Grupo Internacional para a Psicologia da Educação Matemática (PME-*Psychology of Mathematics Education*).

A relação entre a pesquisa e ensino de matemática tem mais de dois séculos. Os historiadores da Educação Matemática são unânimes em situar o século XIX como a época em que começa a surgir uma preocupação em entender, explicar e propor metodologias para melhorar a aprendizagem da matemática. No início, tais estudos eram feitos por matemáticos preocupados com a preparação dos professores, visando uma melhor formação dos futuros estudantes universitários. No final do século XIX, os estudantes das universidades alemãs começaram a receber uma formação “mais prática” em relação ao ensino de matemática. Um dos líderes desse movimento foi o matemático Felix Klein (1849-1925), que criou cursos sobre metodologia do ensino de matemática em várias universidades, mas também criou um curso de doutorado em Educação Matemática na Universidade de Gottingen na Alemanha, além de ter escrito importantes livros, com destaque para os três volumes intitulados *“Matemática Elementar de um ponto de vista superior”* (1908). No mesmo ano, Klein aproveitou a realização do Congresso Internacional de Matemáticos, em Roma, para fundar a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI- *International Commission on Mathematical Instruction*).

O ICMI, ativo até hoje, tem entre suas entidades afiliadas o Grupo Internacional para a Psicologia da Educação Matemática (PME), fundado no 3º Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME 3-*International Congress*

of *Mathematical Education*) realizado em Karlsruhe, Alemanha, em 1976. O evento foi fundado por alguns dos mais prestigiosos pesquisadores da época e responsáveis por nossa formação teórica neste campo, com destaque para Efraim Fischbein (1920-1998) que foi seu primeiro presidente, Hans Freudenthal (1905-1990), Richard Skemp (1919-1995) e Gérard Vergnaud (1933-2021), entre outros que nos legaram pesquisas e teorias importantes que ainda hoje impactam a pesquisa e nossas práticas de sala de aula.

Vale registrar a criação da Comissão Internacional para o Estudo e Melhoria do Ensino das Matemáticas (CIEAEM) no ano de 1950, que teve entre seus fundadores alguns matemáticos, psicólogos e pedagogos de primeira grandeza como Jean Piaget (1896-1980), Jean Dieudonné (1906-1992), Caleb Gattegno (1911-1988) e Gustav Choquet (1915-2006), entre outros. Nas conferências do CIEAEM discutia-se a natureza dos objetos matemáticos que se ensinavam nas escolas, currículo, materiais didáticos, tarefas, perspectivas para o ensino nas décadas seguintes entre outros tópicos relevantes.

Mas foi a partir da fundação do PME que a pesquisa sobre processos de aprendizagem, metodologias de ensino, materiais instrucionais, avaliação, formação de professores, obstáculos epistemológicos, mediação por meio de tecnologias, entre outros temas de alta relevância, ganhou um grande impulso e um status de pesquisa científica, inicialmente na Europa, EUA, Canadá e Austrália.

Não é fácil determinar a origem da pesquisa no Brasil sobre temas conexos à Educação Matemática. Até o início dos anos 1980 havia menos de 20 dissertações ou teses de doutorado que poderiam ser classificadas de “Educação Matemática”, a maioria apresentadas nos programas de Educação ou Psicologia de algumas poucas universidades públicas. Os departamentos de Matemática não reconheciam a Educação Matemática, a chamavam de “perfumaria”. Mas a semente da investigação já estava plantada. Na UNICAMP, o Prof. Ubiratan D’Ambrósio (1932-2021) criou um programa de mestrado internacional de Ensino de Ciências e Matemática que gerou 72 teses entre 1977 e 1984. Na UFPE já existia um Programa de Mestrado em Psicologia fundado em 1976 que tinha como área de concentração a Psicologia Cognitiva (desde 1998 tem programas de mestrado e doutorado) de onde saíram importantes contribuições para a Educação Matemática brasileira e internacional. Na UNESP de Rio Claro foi criado em 1984 o primeiro Mestrado em Educação Matemática que se tornou numa referência como centro de excelência de reconhecimento internacional.

Fora da universidade surgiram importantes movimentos:

- Em 1961 o Prof. Oswaldo Sangiorgi (1921-2017) criou o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) muito ativo nas décadas de 1960 e 1970 e ponta de lança do chamado Movimento da Matemática Moderna.

- No ano de 1970, em Porto Alegre, a Prof.<sup>a</sup> Esther Pilar Grossi, e mais de 50 educadoras/es, fundou o Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação (GEEMPA).

- No Rio de Janeiro, liderados pela Prof.<sup>a</sup> Maria Laura Mouzinho Leite Lopes (1917-2013), José Carlos de Mello e Souza (irmão de Malba Tahan), Franca Cohen Gottlieb e mais duas dezenas de professores/as e matemáticos/as foi fundado o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), que lança o Boletim GEPEM, que é a publicação de Educação Matemática mais antiga do Brasil.

- Na Bahia havia um grupo fundado pela Prof.<sup>a</sup> Martha Souza Dantas, que organizou em 1955 o 1º Congresso Nacional de Ensino da Matemática. Seu grupo tinha conexões internacionais e contou com a liderança da Prof.<sup>a</sup> Arlete Cerqueira Lima e do Prof. Omar Catunda, que era um dos principais matemáticos brasileiros da época.

- Em São Paulo, em 1983, um grupo de 20 educadoras lideradas pelas professoras Anna Franchi, Lucília Bechara, Manhucia Liberman e este que aqui escreve, fundaram o Centro de Educação Matemática (CEM), grupo cuja origem foi uma parceria com o educador matemático húngaro Zoltan Paul Dienes (1916-2014), da Universidade de Sherbrooke e por muitos chamado de o “pai da Psicologia da Educação Matemática” e o Prof. Claude Gaulin (1938-2020) da Universidade de Laval.

Estas lideranças, iniciativas e movimentos configuraram o que poderia ser o nascimento da Educação Matemática brasileira. Mas, em busca de um marco da Educação Matemática brasileira, elegi a publicação do artigo *“Na vida, dez, na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática”*, de Terezinha Nunes Carraher, David William Carraher e Analúcia Dias Schliemann, publicado no Cadernos de Pesquisa, em 1982. A escolha deve-se à força do artigo e seu impacto para fora dos ambientes acadêmicos no Brasil e no mundo. Lembro-me, com clareza, de ter lido o artigo em grupos de estudo de professores resistentes aos devaneios do ensino tradicional de matemática e às influências do chamado “Movimento da Matemática Moderna”. Nesta época se espalhavam pelo país

as chamadas “Escolas Alternativas”, em sua maioria de inspiração construtivista, outras tinham como linha mestra a “Arte-Educação”, movimento fundado pela educadora Ana Mae Barbosa. Em comum, uma educação de resistência com foco no estudante, nas suas experiências, desenvolvimento e aprendizagem. Neste contexto as práticas escolares, algumas experimentais, eram desenvolvidas a partir de múltiplas perspectivas, como, por exemplo, a linha freiriana de emancipação do indivíduo e educação como prática de liberdade, ou ainda, a partir dos interesses dos alunos como nas escolas inspiradas em Freinet ou Decroly.

Para os professores de matemática, como eu, o surgimento de pesquisas que contribuíam para explicar como funciona a cognição dos alunos e reconheciam seus saberes advindos de sua cultura, eram um bálsamo, iniciava-se uma transformação em direção à uma Educação Matemática Crítica com foco na aprendizagem significativa. Discutia-se qual deveria ser o foco do ensino da matemática e a pesquisa sobre Resolução de Problemas começava a ter adeptos em todos os níveis de ensino. Abordagens não tradicionais eram valorizadas e pesquisadas como a História da Matemática, as aplicações e a Modelagem, o ensino por Projetos, a Etnomatemática, o uso de mediadores como jogos e materiais manipuláveis estruturados ou não, os primeiros passos no uso da tecnologia com a popularização da Linguagem Logo criada por Seymour Papert (1928-2016). É neste cenário que a pesquisa em Educação Matemática foi se fortalecendo e influenciando cada vez mais: as práticas escolares, a qualidade dos materiais didáticos, as novas diretrizes curriculares, as metodologias ativas e os instrumentos de avaliação, à luz de uma nova função, como orientadora do educador nas decisões em sala de aula e no replanejamento com mais atenção ao aluno e à aprendizagem do que como instrumento punitivo e de exclusão. Cabe lembrar que foram os estudos teóricos da pesquisadora argentina Emilia Ferreiro sobre o processo de aquisição da leitura e da escrita da criança que se assentaram as bases do sistema de ciclos ou progressão continuada implantado na capital paulistana durante a gestão de Paulo Freire como Secretário Municipal de Educação da Cidade de São Paulo. Vemos, então, a pesquisa transformando pessoas, as práticas docentes e o sistema educacional.

## **O impacto da pesquisa nas práticas escolares**

Discorrer sobre o impacto da pesquisa, em especial das que tratam de processos de aprendizagem, é tarefa para vários volumes de livros. Não tenho a

pretensão de dar conta de tarefa tão complexa, principalmente no curto espaço de um Prefácio, mas selecionarei de minhas vivências alguns eventos marcantes, teorias importantes, artigos imperdíveis, palestras memoráveis que contribuíram para me formar como educador matemático múltiplo, como professor, formador de professores, autor de livros didáticos e de material de apoio para professores, consultor curricular e pesquisador.

Como já citado, na época em que foi publicado, o artigo *“Na vida, dez, na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática”* desequilibrou a todos. Passamos a falar entre nós sobre: saberes culturais, as matemáticas que os indivíduos aprendem fora da escola a partir de suas experiências, níveis de aprendizagem, estratégias não convencionais para fazer cálculos e uma variedade de aspectos relacionados ao binômio ensinar-aprender. Mas logo começamos a olhar para outras direções em busca de respostas teóricas e confiáveis para perguntas que se faziam há décadas:

- O que está por trás das dificuldades que os alunos têm com a linguagem algébrica?
- Existe um pensamento algébrico distinto de um pensamento aritmético?
- Porque os alunos têm dificuldades na aprendizagem da Geometria se ela parece ser mais “real” que a álgebra?
- Devemos permitir que os alunos usem calculadora?
- Os estudantes devem decorar a tabuada?
- É possível ensinar probabilidade no Ensino Fundamental?
- Por que alunos de Norte a Sul, de Leste a Oeste, teimam em somar duas frações, somando numeradores e denominadores como se estivessem fazendo uma multiplicação?
- Por que todo indivíduo tem problemas com a regra dos sinais?

Essas e outras perguntas ainda são feitas nos corredores das escolas, mas a pesquisa já respondeu a muitas delas, e seus autores têm divulgado seus resultados contribuindo para orientar práticas, reformar currículos e estabelecer critérios de qualidade para materiais instrucionais. Darei alguns exemplos muito pontuais que, entendo, deveriam ser de domínio não só do mundo acadêmico



(pesquisadores e estudantes de mestrado e doutorado), mas também e, principalmente, de domínio de professoras/es, dos especialistas que atuam nas secretarias de educação e também dos autores de materiais instrucionais (livros didáticos, apostilas, sites).

Muitos dos leitores deste livro, mesmo sem se dar conta, já sofreram o impacto da pesquisa que leva a novas práticas e abordagens, seja na sua formação na escola básica ou nos estudos universitários.

Até a década de 1980, o ensino das operações básicas era feito de modo prescritivo pelo “método da instrução” apoiada na estrutura de um algoritmo específico (a conta armada), na mecanização e no culto ao trabalho braçal e enfadonho. Em 1977, a Prof.<sup>a</sup> Anna Franchi defendeu uma dissertação de mestrado sobre o ensino da subtração que trazia pela primeira vez as ideias de Gérard Vergnaud e sua Teoria dos Campos Conceituais que focava nas relações, nos contextos e nas ideias das operações, no caso da subtração, expressas pela ação de tirar, completar e comparar. Graças a esse estudo, a SEE-SP publicou dois livros para a alfabetização matemática “Atividades Matemáticas” (1981), com atividades em que as ideias da subtração eram explicitadas e vivenciadas pelas crianças por meio de atividades, e não apenas exercícios, com orientações para os professores. Anos depois uma espécie de guia para avaliação de livros didáticos passou a exigir um equilíbrio na seleção dos problemas a fim de evitar que o contato da criança com problemas subtrativos fosse exclusivo de “situações de tirar”, como se ensinava até aquele momento. Desde então passou-se a valorizar o significado das operações aritméticas, e as técnicas de cálculo deixaram de ser exclusivamente algorítmicas, se valorizando os processos de cálculo mental e estimativa que estão assentados em propriedades aritméticas (tais recomendações aparecem nos PCN, 1997). Sobre este aspecto recomendo a todos, após a leitura dos capítulos deste livro, lerem ou relerem *“Na vida, dez, na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática”*.

Do mesmo modo, o ensino de frações era restrito à prescrição de comandos desconectados do significado da fração no contexto em que esta é usada. Mas, um artigo do Prof. José Maurício de Figueiredo Lima, *“Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade”*, publicado no livro *“Aprender Pensando”* (SEE-PE e UFPE) mostrou que não é indiferente apresentar aos estudantes contextos de uso de frações no âmbito do contínuo e do discreto. Desde então, alguns autores, como este que aqui escreve, passaram a utilizar uma variedade de materiais (*tangram*, material dourado etc.) que

apresentavam níveis de dificuldade distintos, levando a solidificar uma ideia mais robusta de frações, para além da contagem que indicaria o numerador e o denominador. Ainda sobre o conceito de *fração*, vale destacar os estudos de Behr e de Vergnaud que ressaltam seus diferentes significados, mostrando que a palavra fração está relacionada a muitas ideias e constructos.

Desde então, no Brasil e no mundo, os currículos procuram levar em conta as complexidades de cada constructo, entendendo que a aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudoproblemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam atentar para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas. Frações são um “megaconceito”, constituído (construído) por diferentes subconceitos, aquilo que chamamos de interpretações do conceito.

Segundo esta linha de pensamento, vale a pena falar das várias ideias e usos de porcentagens que, em um primeiro momento, estão associadas a uma fração (relação parte-todo), em outro momento é uma razão (o que justifica um procedimento de cálculo “multiplica pelo numerador e divide por 100”), em outro contexto é expressa uma probabilidade e em outro uma taxa de variação. A pesquisa nos autoriza a defender que porcentagem não deve ser reserva deste ou daquele ano escolar, deveria ser ensinada do 6º ao 9º ano, com distintas abordagens e significados, respeitando a complexidade em cada momento da vida escolar. Difícilmente alunos de 12 anos conseguem produzir significado para a porcentagem como taxa de variação. Deve-se ressaltar que a porcentagem está no campo das estruturas multiplicativas de que trata a Teoria dos Campos Conceituais.

Outro tópico sensível que gera muitas discussões é a “regra de sinais”, em geral prescrita e “ensinada” por meio de técnicas mnemônicas ou histórias pouco factíveis e forçadas, e de eficácia suspeita, como o popular “o inimigo de meu inimigo é meu amigo” para explicar que “menos vezes menos é mais”. Um robusto estudo do matemático francês Georges Glaeser (1918-2002) *“Epistemologia dos números negativos”*, lançado em 1981 na França, cuja tradução foi publicada em 1985 no Boletim GEPEM 17, trouxe luz à questão, mostrando a complexidade e os obstáculos epistemológicos que impediam a aceitação dos números negativos ao longo da história, até o século XVII. No contexto escolar tais obstáculos se reproduzem, principalmente pela tentativa utilizada por professores e autores de materiais instrucionais em “naturalizar” a relação da criança ou

adolescente com as regras operatórias. Para isso, lançam mão de cenários como altitudes, temperaturas e saldos bancários para ensinar as operações aditivas, mas deixando de lado e não colocando nada no lugar na hora de ensinar as operações multiplicativas. Esta ainda é uma questão em aberto, uma vez que a maioria dos livros “ensina” as operações aditivas e multiplicativas em um mesmo capítulo, ignorando a natureza distinta de tais operações e os níveis de abstração simbólica, também distintos, por parte dos alunos que nem sempre apresentam maturidade para aceitar a regra dos sinais e compreendê-la. Vale ressaltar que em alguns países, as operações multiplicativas, tanto entre números relativos como em frações, são propostas em momento diferente do ensino das operações aditivas, em alguns casos, até em anos escolares diferentes.

Não fosse a pesquisa em Educação Matemática, os alunos do Ensino Fundamental não estariam estudando estatística ou probabilidades. O ensino de probabilidades iniciou-se na década de 1980 nas escolas primárias em Minas Gerais por influência da Prof.<sup>a</sup> Maria do Carmo Vila que pesquisou o tema em seu doutorado. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997 e 1998) passou a ser conteúdo recomendado, isto graças ao trabalho de investigação de E. Fishbein e do grupo de Carmen Batanero, hoje fazendo parte dos currículos da maioria dos países.

Há temas em que a pesquisa avançou, mas ainda não impactou o ensino na escola. Um exemplo são os estudos sobre níveis de aprendizagem de Van Hiele e os processos que compõem o pensamento geométrico, inseridos em cursos de formação de professores (ver os trabalhos da Prof.<sup>a</sup> Ana Kallef da UFF), mas ainda ausentes da geometria tratada na maioria dos livros didáticos.

A lista de temas, a história de seu ensino e as transformações por que passaram ao longo do tempo, graças ao impacto da pesquisa científica, é grande; talvez nunca possa ser finalizada, também as variáveis e fenômenos de sala de aula que intervêm na aprendizagem. Tome como exemplo os dez capítulos deste livro, em que se discutem temas como numeramento, Teoria dos Campos Conceituais, modelo dos Campos Semânticos, relação entre matemática e linguagem, resolução de problemas, interações na sala de aula, operações aritméticas, pensamento funcional, escrita na educação matemática, tecnologias, concepções de professores, entre outros temas que estão nas entrelinhas e nos fundamentos de cada capítulo.

Cada texto aqui publicado deve impactar, de um modo ou de outro, pessoas (leitores) e ações, tendo potencial de produzir mudanças de

concepção, de práticas e de orientações curriculares, de levar a descobertas e ao estabelecimento de novas relações. Se possível, gostaria que fosse uma semente que ao ser regada desperta a curiosidade e o interesse que pode gerar um novo mestrado ou doutorado, contribuindo para manter a pesquisa brasileira em posição de destaque, ampliando a comunidade de pesquisadores/as.

Faço questão de marcar uma posição e externar meu fascínio sobre a Educação enquanto processo ativo, dinâmico, complexo, em constante construção e contextualizado. Desta perspectiva entendo que a pesquisa é uma atividade inerente ao processo educativo, não uma atividade apartada ou meramente burocrática (do ponto de vista da carreira acadêmica). A pesquisa em Educação Matemática deve ser rigorosa e responsável, e precisa se dirigir a uma audiência maior que uma banca de defesa, que deve estar orientada à busca de respostas para necessidades e problemas “reais” que tem como fonte a sala de aula, a atividade docente, os materiais instrucionais, o currículo (com a participação dos educadores) e os problemas que surgem da vida cotidiana; e aqui vale a pena citar Freudenthal, para quem a “Matemática é uma atividade humana”. Resumindo em uma frase simples, não deve existir uma pesquisa sobre Educação Matemática independente da atividade educativa e da natureza da Matemática como ciência.

Os textos que compõem este livro atendem aos critérios de boa ciência que descrevi no parágrafo anterior. Cada texto que você irá ler a seguir vai se multiplicar, este é o destino natural da boa pesquisa, esta é a função da investigação em Educação Matemática e isto é o que espero.

Encerro, dizendo que para mim é uma grande honra prefaciар este livro sobre **Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática**, principalmente quando organizado por um grupo formado por pesquisadoras oriundas do programa de mestrado e doutorado em Psicologia Cognitiva da UFPE que há 40 anos foi responsável por fazer minha cabeça e também responsável indireto por me levar, também, à pesquisa em Educação Matemática.

**Antonio José Lopes “Bigode”**

*Centro de Educação Matemática (CEM)*

*Professor, pesquisador, formador e autor*

## AUTORES

**Airton Carrião Machado** Universidade Federal de Minas - UFMG.

**Alina Galvão Spinillo** Universidade Federal de Pernambuco - UFPE.

**Antônio César Nascimento Teixeira** Universidade Federal do Sul da Bahia - UFSB.

**Amarildo Melchhiades da Silva** Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF.

**Cecília Pereira Andrade** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo IFSP - Campus Campinas.

**Egídio Rodrigues Martins** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais - IFNMG - Campus de Januária.

**Ernani Martins dos Santos** Universidade de Pernambuco - UPE.

**Fernanda Mauricio Simões** Escola Municipal Modestino Gonçalves - Santa Luíza -MG.

**Irene Mauricio Cazorla** Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC.

**Janete Bolite Frant** Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ.

**Leidy Johana Peralta Marín** Universidade Federal de Pernambuco - UFPE.

**Lígia Sousa Bastos** Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba – PB.

## AUTORES

**Luiz Carlos Leal Júnior** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo IFSP – Campus Sertãozinho

**Maria Conceição Ferreira Reis Fonseca** Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG.

**Monica Rabello de Castro** Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ.

**Ronaldo Barros Ripardo** Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará - UNIFESSPA.

**Sandra Maria Pinto Magina** Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC.

**Síntria Labres Lautert** Universidade Federal de Pernambuco - UFPE.

**Vanessa Tomaz** Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG.

**Vera Lúcia Merlini** Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC.

**Vitor Rezende Almeida** Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais – Juiz de Fora - MG

**Viviane Cristina Almada de Oliveira** Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ.

## APRESENTAÇÃO

**E**ste livro é mais uma obra elaborada pelo Grupo de Trabalho *Processos Cognitivos e Linguísticos em Educação Matemática* (GT 9) filiado à Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Antes de apresentar a obra, cabe tecer algumas considerações acerca do GT9.

O GT9 existe desde o I Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (I SIPEM) realizado em novembro de 2000 em Serra Negra, São Paulo, coordenado por Janete Bolite Frant, Jorge Falcão, Monica Rabello e Romulo Lins, que na ocasião eram docentes da Universidade de Santa Úrsula, UFPE, UERJ e UNESP-Rio Claro, respectivamente.

No documento de conclusão das atividades do recém-formado grupo, como resgatam Bolite Frant e Castro no *Capítulo 6* deste livro, ressaltava-se que a Educação Matemática não poderia prescindir da Cognição e da Linguagem para alcançar seus objetivos relativos ao ensino e à aprendizagem. Além do foco temático, outro ponto enfatizado na ocasião da formação do grupo foi o interesse frente à necessária e desejável articulação entre teoria e pesquisa, buscando-se compreender a dupla causalidade que alimenta essas instâncias.

Completando 21 anos e presente em sete simpósios internacionais, o GT9, em 2021, alcança sua maioridade, mantendo o mesmo foco e interesse científico que motivaram sua formação. Ao longo deste período o grupo funcionou ora com um número expressivo de participantes, ora com um número reduzido, mas sempre marcando sua existência e resistência. O grupo, desde sua concepção, acolhe pesquisas de diferentes filiações teóricas e opções metodológicas, realizadas com participantes de diversas faixas etárias e níveis de escolaridade. Essa diversidade tem gerado discussões preciosas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

O GT tem se renovado, seja pelo ingresso de novos membros, seja pelo retorno de vários outros que, em última instância, estiveram, de alguma maneira, presentes por meio de suas obras e ideias que são citadas nos trabalhos e em discussões realizadas em cada simpósio. Quer variando quanto à presença de

seus membros quer variando quanto aos temas abordados, uma preocupação é constante no funcionamento do grupo: a produção e divulgação científica coletiva por meio de livros, capítulos de livro e números especiais em revistas científicas.

Dando continuidade à produção coletiva do grupo, foi organizado o presente livro cujo objetivo principal é ressaltar a importância dos processos cognitivos e linguísticos para a Educação Matemática. O título do livro reflete esta proposta que é inserida no contexto histórico da Educação Matemática no Brasil, como comenta *Antonio José Lopes "Bigode"* ao fazer o *Prefácio* desta obra. Neste *Prefácio* é ressaltado o papel fundamental desempenhado pela pesquisa que se articula à atividade educativa e à Matemática como ciência, articulação essa por ele denominada *boa ciência*.

A estrutura do livro é organizada em duas grandes partes, revelando o interesse em refletir acerca de questões teóricas e de pesquisa, reiterando a importância desses dois aspectos para a construção do conhecimento, de modo geral, e para a Educação Matemática em particular. Na Parte 1 constam seis capítulos que abordam questões teóricas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

No *Capítulo 1*, Fonseca e Simões tecem considerações acerca da aprendizagem matemática como uma prática discursiva, dedicando grande parte do texto à discussão do conceito de apropriação de práticas de numeramento no âmbito das situações de aprendizagem escolar. As autoras discutem obras de autores que se apoiam na perspectiva históricocultural para a apropriação dessas práticas por estudantes de variados perfis econômicos, culturais e étnicos.

O *Capítulo 2* trata de um olhar particular sobre a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud, olhar esse que se volta para um campo conceitual ainda pouco considerado: o campo de medidas de tendência central. Magina, Lautert e Cazorla iniciam o capítulo discorrendo acerca dos dois campos conceituais mais conhecidos (aditivo e multiplicativo) e avançam as discussões em relação ao campo de medidas de tendência central que vem sendo investigado nos últimos anos. Ao longo do texto, as questões teóricas são ilustradas por situações de pesquisa e da sala de aula.

O capítulo seguinte se desloca do enfoque conceitual tratado no capítulo anterior, para o semântico, em que Silva, Oliveira e Almeida, no *Capítulo 3*, tratam do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) proposto por Lins. Após apresentarem os pressupostos teóricos e os principais conceitos que sustentam esse modelo, são ilustradas e comentadas em detalhes as análises realizadas



sobre as enunciações feitas por participantes de pesquisas e estudantes em relação à produção de significados para a matemática. Ao final, são discutidas as potencialidades e desdobramentos que apontam como o modelo se aplica à pesquisa em Educação Matemática e à sala de aula.

O *Capítulo 4*, de autoria de Carrião e Tomaz, se volta para aquele que ensina Matemática, analisando e teorizando acerca da trajetória de aprendizagem de um futuro professor, licenciando de um programa de Educação do Campo que é por ele narrada ao elaborar seu trabalho de conclusão de curso. A teorização é feita por meio de duas perspectivas teóricas que compartilham uma mesma base epistemológica de natureza sociocultural: a Teoria das Zonas e a Teoria da Aprendizagem Expansiva. A análise dessa trajetória revela a proposta do licenciando em sugerir ações didáticas que dialogam com as questões que norteiam a Educação do Campo.

Spinillo e Marín, no *Capítulo 5*, discutem as relações entre Matemática e Linguagem. Inicialmente, são comentadas algumas das principais abordagens sobre as possíveis articulações entre esses campos do conhecimento. Em seguida, essas relações são tratadas a partir de pesquisas sobre a resolução de problemas por crianças, tendo como pressuposto a ideia de que o enunciado dos problemas matemáticos é um tipo de texto, e que as dificuldades na compreensão desse texto precisam ser examinadas à luz de enfoques teóricos e recursos metodológicos oriundos da Linguística Textual. Esse paradigma é considerado relevante para identificar as dificuldades específicas na compreensão do enunciado e as consequências disso no desempenho na resolução de problemas.

No *Capítulo 6*, que finaliza esta parte teórica do livro, Bolite-Frant e Castro propõem o Modelo da Estratégia Argumentativa (MEA) como alternativa para investigar e interpretar as interações de professores de Matemática com alunos e com pesquisadores. A ideia central é que pensamento e linguagem se estruturam mutuamente, tendo a argumentação como instância que participa dessa estruturação. As autoras, além de atualizarem as bases teóricas que fundamentam esse modelo, descrevem os passos necessários para a aplicação da estratégia argumentativa como ferramenta para análise de dados. Após essa descrição, o uso dessa ferramenta é ilustrado em estudos que ressaltam os avanços na aplicação do modelo na análise do discurso.

A *Parte 2* do livro traz quatro capítulos que relatam pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Santos, no *Capítulo 7*, apresenta resultados relativos à resolução de problemas de estrutura multiplicativa obtidos

com estudantes do Ensino Fundamental. Tanto a escolha dos problemas como a forma de análise toma como fundamento a Teoria dos Campos Conceituais. O texto enfatiza o papel fundamental da resolução de problema para promover uma aprendizagem conceitual da Matemática. A análise dos dados recaiu, especificamente, sobre a compreensão dos estudantes acerca dos principais elementos constituintes das situações-problema investigadas a partir do exame das formas de resolução adotadas que são apresentadas e discutidas ao longo do capítulo.

No *Capítulo 8*, Bastos, Merlini e Teixeira também voltam sua atenção para os processos de resolução adotados por estudantes do Ensino Fundamental, no caso, a resolução de problemas algébricos por meio de diferentes suportes de representação: lápis e papel e material manipulativo. O conceito de generalização, considerado fundamental no pensamento algébrico, foi o alvo principal da investigação. A noção de *Early Algebra* é considerada na parte introdutória do capítulo, e também considerada tanto na configuração dos problemas apresentados como na análise dos dados. Os dados revelaram que as crianças possuem noções intuitivas sobre a generalização em situações algébricas e que essas intuições emergem independentemente do suporte de representação utilizado.

Ripardo, no *Capítulo 9*, relaciona Matemática e Linguagem ao apresentar um estudo de caso com um aluno do Ensino Fundamental em que o ato de escrever é considerado uma ação importante na aprendizagem da Matemática no contexto escolar. Articulando a noção de discurso e gêneros textuais, o autor apresenta uma pesquisa cujo foco recai sobre aulas em que o aluno produz textos típicos do discurso matemático escolar em situações de resolução de problemas. Os resultados, de modo geral, revelam que a escrita e reescrita de textos podem ser um recurso didático que pode vir a favorecer o aperfeiçoamento da comunicação do aluno no âmbito do discurso matemático.

O livro é finalizado com o *Capítulo 10*, de autoria de Leal Junior, Martins e Andrade que discutem, também em uma abordagem discursiva, o ensino de Matemática por meio de videoaulas, que tanto têm caracterizado as atividades docentes em tempos de pandemia. A pesquisa se concentra em analisar algumas passagens de entrevistas realizadas com professores que ensinam Matemática, discutindo as percepções que apresentam sobre a atividade de ensino nesta nova configuração. Comentários críticos são tecidos ao longo de todo o capítulo.

Como pode ser notado, os processos cognitivos e linguísticos são

reiteradamente tratados nos capítulos que compõem esta obra, tanto em termos teóricos como empíricos, mas sempre com vistas a gerar reflexões acerca da Educação Matemática. Cumprindo seu papel na construção do conhecimento neste campo marcado pelo hibridismo, o livro busca despertar o interesse de pesquisadores de distintas áreas de formação acadêmica e educadores matemáticos, divulgando as produções do GT9 ao atingir sua maioria.

**Sandra Magina**  
**Síntria Labres Lautert**  
**Alina Galvão Spinillo**  
*(Organizadoras)*



## **Parte 1**

Perspectivas teóricas sobre o  
ensino e aprendizagem  
da Matemática

## Capítulo 1

# **APROPRIAÇÃO DE PRÁTICAS DE NUMERAMENTO ESCOLARES: COMPREENDENDO APRENDIZAGEM MATEMÁTICA COMO PRÁTICA DISCURSIVA<sup>1</sup>**

*Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca  
Fernanda Maurício Simões*

Neste capítulo procuramos contemplar a aprendizagem (de práticas matemáticas escolares) não como um exercício cognitivo individual, mas como uma ação sociocultural, dotada de mecanismos e intenções pragmáticas e de caráter discursivo. Nessa perspectiva, dispomo-nos a discutir a mobilização do conceito de apropriação de práticas de numeramento, com a intenção de nos aprofundarmos em sua configuração como construto teórico e na exploração de suas potencialidades analíticas e de seus eventuais limites.

*Palavras-chave:* Práticas de Numeramento. Apropriação de Práticas. Práticas Discursivas. Relações de Ensino e Aprendizagem de Matemática.

## **Introdução**

Neste capítulo, apresentamos como temos operado com o conceito de apropriação de práticas de numeramento para compreender a aprendizagem de práticas da matemática escolar, assumidas como práticas discursivas – o que destaca sua dimensão sociocultural, histórica e interlocutiva.

Essa disposição de operação analítica atende a um conjunto de indagações que nos têm ocorrido a partir das investigações que o Grupo de

---

<sup>1</sup> Os estudos que subsidiaram a escrita deste texto contaram com o apoio da Capes e do CNPq.

Estudos sobre Numeramento – GEN<sup>2</sup> desenvolve em salas de aula que envolvem públicos diversos da Educação Básica, e que assumem a etnografia como lógica de pesquisa (GREEN et al., 2005). Analisando o material empírico produzido nessas investigações, temos observado que, muitas vezes, a despeito das intenções pedagógicas da/o docente, os processos de aprendizagem vivenciados escapam ao propósito da prática pedagógica no que tange a seus significados e dinâmicas. Isso, porém, frequentemente passa despercebido ou é identificado apenas como insucesso ou como indisciplina, porque os tempos e as normas escolares são regidos por certas especificidades que visam à transmissão do conteúdo, à organização da classe, à manutenção da ordem, ou ao atendimento exclusivo às dúvidas que são manifestadas pela maioria dos alunos e que são, de certa forma, previstas nas orientações didáticas da formação docente ou dos livros didáticos. Esse *script* pouco flexível muitas vezes dificulta à/o docente a análise das posições assumidas pelas/os estudantes nos jogos discursivos de que participam. É para que tenhamos um olhar mais cuidadoso para o drama, os encantos e as possibilidades das salas de aula da Educação Básica que, nas pesquisas que realizamos, dedicamo-nos ao acompanhamento do cotidiano da sala de aula e à análise das interações de que participam docentes e discentes durante a realização das atividades escolares, focalizando, de modo especial, os modos como estudantes se posicionam nessas atividades.

Com efeito, a dinâmica das atividades escolares nos parece demandar uma atenção mais perspicaz não apenas para as respostas de estudantes que satisfazem os objetivos didáticos traçados, mas principalmente para aquelas tidas como inadequadas e que, não raro, são categorizadas como erros ou faltas (de ‘conhecimento prévio’, de ‘prontidão’, de ‘compreensão’, de ‘atenção’, de ‘aptidão’, de ‘dedicação’, de ‘empenho’, de ‘tempo’, de ‘condições cognitivas’, de ‘recursos linguísticos’ etc.) que acometem estudantes. Entender os conhecimentos, as habilidades, os valores que sustentam os posicionamentos assumidos por alunas e alunos, mesmo que estranhos às intenções das práticas escolares, pode auxiliá-los a conhecer melhor essas pessoas como sujeitos de conhecimentos, de aprendizagens, de cultura, de direitos e de desejos, e a pensar em propostas pedagógicas mais adequadas a cada público, a seus interesses, a suas demandas, a suas expectativas, a seus valores culturais e a seu potencial, bem como às

---

<sup>2</sup> Cadastrado no Diretório de Grupos de Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e vinculado à linha de pesquisa em Educação Matemática do Programa de Pós-graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da UFMG, o GEN reúne pesquisadoras(es) interessadas(os) na análise de práticas matemáticas como práticas discursivas.

contribuições que pode prestar à dinâmica escolar, a perspectiva crítica pela qual aprendizes crianças, adolescentes, jovens, pessoas adultas e idosas se engajam ou resistem às práticas escolares.

As análises empreendidas nas investigações do GEN têm apontado que os processos de apropriação dos conceitos e dos procedimentos relativos às práticas matemáticas veiculadas na escola, ao invés de se restringirem à dimensão técnica dessas práticas, mesmo que seja essa a dimensão enfatizada pela abordagem pedagógica, são antes definidos pelas formas como os sujeitos significam os valores a elas vinculados (KNIJNIK, 2006; SKOVSMOSE, 2007). Nesse contexto, as posições discursivas assumidas pelas/os estudantes nas diversas situações de ensino e de aprendizagem forjadas em sala de aula nos sugerem a alternância na mobilização de argumentos que ora se solidarizam com o modo de conhecer proposto pela escola – quando as/os aprendizes se posicionam como sujeitos que desejam dominar esse modo de usar a língua e assumir os valores a ele associados –, ora questionam a abordagem escolar – e as/os aprendizes se posicionam como sujeitos que se referenciam em modos outros de usar a língua, constituídos por outros valores, outras concepções e outra relação com o mundo.

Os modos de usar a língua, todavia, refletem e constituem as relações que as pessoas estabelecem entre si, com as instituições, com os conhecimentos, com a natureza e com a vida social em diversas instâncias. Por isso, não é surpreendente que, em sociedades capitalistas, ideias, conceitos, procedimentos e argumentos quantitativos deem suporte a grande parte das relações sociais que nelas se estabelecem. Nelas, práticas sociais envolvendo quantificação, medição, orientação no espaço, ordenação, classificação e outras relações com o mundo que associamos ao que chamamos de ‘Matemática’ compõem os modos de usar a língua falada, a língua escrita e mesmo a linguagem gestual, e são por eles constituídas. A essas práticas temos chamado ‘Práticas de Numeramento’, justamente para destacar sua dimensão sociocultural e seu caráter discursivo, e para evitar que o adjetivo ‘matemáticas’ restrinja seu âmbito às práticas escolares.

Entretanto, como educadoras, nos interessa compreender a dinâmica da aprendizagem justamente da matemática escolar configurada em processos de apropriação de práticas de numeramento, o que requer, por isso, abordá-la não como um exercício cognitivo individual, mas como uma ação sociocultural; se envolve questões dos âmbitos sintático e semântico, é também dotada de mecanismos e intenções pragmáticas, e de caráter discursivo. Neste ensaio, discutimos como temos mobilizado o conceito de ‘apropriação’ como construto

teórico, apontando suas potencialidades analíticas em trabalhos investigativos, que, todavia, se apoiam nas e se destinam às práticas e relações pedagógicas.

Para isso, retomamos, na próxima seção, as elaborações que foram produzidas na operacionalização desse conceito em resposta aos propósitos investigativos e às interpelações do material empírico de estudos que se integram ao programa de pesquisa do Grupo de Estudos sobre Numeramento. Na seção seguinte, apontaremos os caminhos teóricos que trilhamos, inspiradas por aquelas elaborações, procurando explorar as referências do edifício teórico por elas delineado. Por fim, apresentamos nossa própria elaboração da ‘apropriação de práticas de numeramento’ como construto teórico e ferramenta analítica, na qual a relevância atribuída ao caráter discursivo dessas práticas insere nossos esforços investigativos no campo das pesquisas sobre aspectos cognitivos e linguísticos da Educação Matemática.

## **Alguns usos do conceito de apropriação de práticas de numeramento, suas intenções e referências**

Não é inédito e nem sequer raro que a proposição do problema da aprendizagem, especialmente focalizando populações e grupos sociais não identificados com a cultura escolar e que a ela passaram a acorrer no contexto da mudança do paradigma da exclusão para um esforço de inclusão, seja estabelecida mobilizando-se o conceito de ‘apropriação’. A mobilização desse conceito parece, de certa forma, bem estabelecida<sup>3</sup> em trabalhos no campo do Letramento (ALIAGAS et al., 2009; CHARTIER, 2007; MARINHO; CARVALHO, 2010; PAULINO; COSSON, 2009; ROCKWELL, 2005; SMOLKA, 1993; 2000; STREET, 2003), que o definem menos ou mais rigorosa ou detalhadamente, ou mesmo se utilizam do termo ‘apropriação’ quase que como um sinônimo de aprendizagem, adotando-o, assim, tacitamente, sem fazer maiores reflexões em relação ao que ele aportaria na análise da participação dos estudantes nas práticas letradas em relação ao uso de outros termos tais como ‘aprendizagem’, ‘assimilação’, ‘compreensão’, ‘apreensão’, etc.

---

<sup>3</sup> Fizemos um levantamento exaustivo no repositório de teses e dissertações do Programa de Pós-graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da UFMG, e encontramos 88 trabalhos, entre teses e dissertações defendidas entre 2000 e 2016, que mobilizam o conceito de apropriação de práticas de letramento e/ou de práticas de numeramento.



De um modo geral, os estudos nesse campo de pesquisa e de ação pedagógica, ao investigarem (e se disporem a agir sobre) processos de aprendizagem das práticas escolares, questionam a eficácia do paradigma que interpreta a aprendizagem como assimilação de conceitos, em que o significado depende dos esquemas de que o sujeito dispõe, como defendido ou suposto por trabalhos desenvolvidos em perspectivas que se apoiam na teoria Piagetiana ou em seus desdobramentos (SMOLKA, 1993, p. 8). Nesse contexto, o conhecimento é visto como atribuição de significados; porém, os tais significados são de natureza “bio/lógica” e “constituem os esquemas operativos do sujeito”. Assim, a significação é desvinculada do âmbito social e verbal e se localiza na dependência do desenvolvimento das estruturas operatórias que possibilitam ao indivíduo atribuir este ou aquele significado e assim instituir o significante enquanto tal.

Entretanto, outras interpretações vão sendo forjadas à medida que as preocupações se voltam para a compreensão dos sujeitos educandos numa dimensão social, cultural e histórica, obrigando à adoção de concepções de aprendizagem que considerem os processos de participação em práticas sociais, os quais envolvem tanto a inclusão nas práticas como a atribuição de sentidos aos valores, conhecimentos e habilidades que as envolvem. São essas preocupações que definem, de certa forma, o desenvolvimento da perspectiva sócio-histórica do fenômeno educativo e nos parece ter sido em resposta aos questionamentos sobre os processos de aprendizagem interpostos por essa mudança nas perspectivas pelas quais se investiga e se compreende a aprendizagem e se propõe a promovê-la, que o termo ‘apropriação’ passa a ser mobilizado com frequência nos textos acadêmicos e escolares, especialmente no campo do Letramento (no qual incluímos os estudos do Numeramento), como ferramenta teórica para entender os modos como aprendizes participam das interações que ocorrem em sala de aula e significam as atividades escolares.

São também essas preocupações e esses questionamentos que nos movem na urdidura de uma fundamentação teórica para a adoção da expressão ‘apropriação de práticas de numeramento’ como ferramenta analítica em nossos estudos. Nesse movimento, ocorre-nos resgatar aqui os modos como a expressão foi utilizada em sete estudos (BRITO, 2012; FREITAS, 2010; LIMA, 2012; MENDONÇA, 2014; SÁ, 2016; SILVA, 2013; SIMÕES, 2010) desenvolvidos pelo Grupo de Estudos sobre Numeramento entre 2010 e 2016, que, ao adotarem essa expressão, consideraram a necessidade de conceituar ‘apropriação’ para sustentar a perspectiva teórica que informava a análise requerida pela questão

investigada por suas/seus autoras/es. Nos usos e nas referências teóricas a que se filiam os estudos, buscamos, assim, contribuições que, confrontadas com as interpelações de nossa experiência de educadoras e de pesquisadoras da sala de aula, nos auxiliem na compreensão e na crítica do edifício teórico que, a partir desse resgate, procuramos construir.

Ainda que se observem diferenciações de escopo e perspectivas entre esses estudos, os modos como o termo é usado nos diversos trabalhos parecem guardar certas similitudes entre si, tornando possível perceber a construção de uma tessitura de significados, caracterizada por concepções de sujeito, de contexto social, de aprendizagem e de sentido que dialogam.

Com efeito, o conceito de apropriação nesses trabalhos parece ser mobilizado para garantir a admissibilidade ou a inevitabilidade da pluralidade de sentidos, indicando a adoção de uma concepção de conhecimento como prática social que sustenta a possibilidade desses diversos modos de apropriação de conhecimentos. Dessa maneira, esses estudos, desenvolvidos com a intenção de entender os processos de significação produzidos por estudantes adultas/os (da EJA, de movimentos sociais, ou de licenciaturas voltadas a públicos específicos) quando se esforçam para participar de práticas de numeramento escolares (ou referenciadas na matemática escolar), buscam não apenas avaliar se as respostas produzidas por estudantes correspondem às expectativas didáticas escolares, mas focalizar as posições discursivas assumidas pelos sujeitos, bem como os conhecimentos, as habilidades, os valores e os interdiscursos<sup>4</sup> que sustentam tais posicionamentos.

É essa perspectiva que faz com que o texto de Ana Luiza Smolka (2000) se constitua na referência principal usada pela maioria desses trabalhos. Partindo de um debate a respeito do termo 'internalização' na teoria vygotskyana, Smolka (2000) mostra como esse construto teórico corresponde a um modo de compreender o processo de aprendizagem que se contrapõe à perspectiva inatista. Smolka compartilha a visão vygostkyana de que as funções mentais superiores constituem relações sociais internalizadas (VYGOSTKY, 1981, 1989, 1998), pois, no processo de desenvolvimento da personalidade, "qualquer função psicológica superior foi externa; isso significa que foi social; antes de se tornar uma função, foi primeiro uma relação social entre duas pessoas" (VYGOTSKY 1929/1989, p. 56, apud SMOLKA, 2000, p. 30). Entretanto, a autora pondera que

---

<sup>4</sup> Refere-se à rede discursiva que constitui os discursos, ou seja, à relação dos enunciados com outros discursos a partir dos quais se tecem ou que poderão ser forjados tomando por base aquela enunciação.

esse conceito sugere uma dualidade entre o ‘fora’ e o ‘dentro’, como se o social fosse separado do individual. Ou seja, o sujeito internalizaria práticas culturais que se localizariam ‘lá fora’.

Diante desse impasse, Smolka (2000) propõe o conceito de ‘apropriação’. Esse construto parte do pressuposto, também sustentado por Vygotsky, de que o foco do estudo devem ser as relações sociais nas quais os sujeitos estão envolvidos. Os indivíduos, nesse sentido, são afetados por signos e sentidos produzidos nas relações e na história dessas relações. Assim, procura-se compreender não as ações em si, mas os múltiplos significados que as ações humanas adquirem dependendo dos modos de participação dos sujeitos e dos posicionamentos que assumem.

A essa concepção de apropriação corresponde uma visão de sujeito na qual “ele próprio constitui um signo, interpretado e interpretante em relação ao outro – não existe antes ou independente do outro, do signo, mas se faz, se constitui nas relações significativas” (SMOLKA, 2000, p. 37). Desse modo, a apropriação se apresenta como uma categoria relacional, que independe do julgamento de um outro autorizado que irá valorar determinado processo como adequado, pertinente ou não. Assim, os múltiplos significados produzidos pelos sujeitos decorrentes de seus modos de se posicionarem e de participarem das práticas sociais em que estão inseridos provocam diversos efeitos de sentidos e geram tensionamentos entre o próprio e o pertinente ao outro (SMOLKA, 2000).

É nessa perspectiva que Fernanda Simões (2010) assume em sua pesquisa, o conceito de apropriação como “uma resposta ativa à interação social e não uma reprodução mecânica” (SMOLKA, 2000). Simões (2010) investigou os modos como jovens e adultos que cursavam o segundo segmento da EJA em uma escola municipal se apropriavam de práticas de numeramento escolares. Para isso, valeu-se da observação participante em sala de aula para produzir um material empírico que a auxiliasse a compreender os posicionamentos assumidos por esses sujeitos durante as atividades escolares propostas pela professora. Sua investigação apontou que estudantes da EJA ora se solidarizavam com os modos de conhecer e de se relacionar com o mundo propostos pela escola, ora questionavam os valores que fundamentam as práticas de letramento e de numeramento escolares, definindo diferentes modos de apropriação dessas práticas.

Em sua investigação, Simões (2010) mobiliza o conceito de apropriação para analisar, especificamente, aqueles significados que os estudantes atribuem

às práticas de numeramento escolares que não correspondem aos objetivos didáticos anunciados pelas atividades propostas pelos professores. Dessa forma, tal conceito parece interessar-lhe, de forma peculiar, por admitir que “tornar próprio, tornar seu não significa exatamente e nem sempre coincide com tornar adequado às expectativas sociais” (SMOLKA, 2000, p.13 apud SIMÕES, 2010, p.22).

Por sua vez, a etnografia produzida por Valdenice Silva (2013) em ambiente escolar e nos contextos laboral e da vida comunitária identificou, nas práticas de numeramento protagonizadas por estudantes da EJA, trabalhadores das facções de roupas para o Polo de Caruaru, moradores de uma região campesina pernambucana, táticas de resistência à exploração e à desumanização. Com efeito, o marco etnográfico que referencia sua pesquisa permitiu à pesquisadora reconhecer nas práticas de numeramento que se forjam nas atividades laborais, escolares e da vida social da comunidade, atitudes de cuidado, de solidariedade e de disposição para aprendizagem, que se opõem aos processos e relações de trabalho, de ensino ou de convivência desumanizadores.

Assim também, Silva (2013) mobiliza o conceito de apropriação a fim de demarcar os posicionamentos de estudantes da EJA que, a despeito de prognósticos negativos em relação aos seus processos de aprendizagem, assumem discursos que denotam, por um lado, a disposição em aprender os jogos de linguagem<sup>5</sup> próprios da matemática escolar e, por outro, que demarcam seus questionamentos e contra-argumentos em relação ao saber matemático hegemônico. Nesse sentido, sua investigação também se reporta a um aspecto central do conceito de apropriação destacado no artigo de Smolka (2000), também realçado por Simões (2010) de que tornar próprio não significa necessariamente a exibição de comportamentos esperáveis e “supõe uma tomada de posição” (SILVA, 2013, p.173).

É ainda o confronto de discursos que marca a perspectiva de análise adotada por Josinalva Sá (2016) e por Ruana Brito (2012), quando contemplam tensões que permeiam o currículo de cursos de licenciatura para públicos específicos.

Sá (2016), por meio da análise da participação de estudantes da Licenciatura em Educação do Campo – habilitação em Matemática – em práticas

---

<sup>5</sup> O uso dessa expressão remete à obra de maturidade de Ludwig Wittgenstein (2007), na qual o autor chama de ‘jogos de linguagem’ “a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada” (IF7). Para o autor, diferentes ‘formas de vida’ produzem diferentes ‘jogos de linguagem’.

de numeramento escolares forjadas nas aulas de um dos módulos do Tempo Escola do curso<sup>6</sup>, procura identificar os posicionamentos desses estudantes que indicam tensões entre os discursos da e sobre a proposta curricular do curso e os modos de ensinar matemática na Educação do Campo. Sua opção por mobilizar o conceito de apropriação em seu trabalho justifica-se, segundo a autora, pelo fato desse construto possibilitar explicar os modos de ser, de relacionar e de conhecer dos sujeitos, considerando, além das relações nas quais estão envolvidos, o papel ativo que desempenham em seus processos de compreensão do mundo. Nessa mobilização, Sá (2016), apoiada em Smolka (2000), destaca que os estudantes, “vão estabelecendo modos próprios de participar das práticas de numeramento escolares, confrontando-as com outras práticas e transformando-as à medida que se dá tal participação” (SÁ, 2016, p.20).

Brito (2012) analisou os modos como educadores e educadoras Pataxó que cursavam a Formação Intercultural de Educadores Indígenas (FIEI/REUNI-UFMG) se apropriavam das práticas de numeramento escolares. Adotando uma abordagem etnomatemática, a autora identificou tensões no processo de apropriação das práticas de numeramento escolares vivenciadas por esse grupo de estudantes, que se debatia entre a perspectiva de uma matemática mais escolar e a abordagem de um conhecimento matemático mais ligado à tradição indígena.

Desse modo, Brito (2012) também mobiliza o termo apropriação, assumindo, assim como o faz Simões (2010), que seu uso permite pensar a aprendizagem como processo de apropriação de discursos, em que os sujeitos “convertem a palavra alheia em própria, opondo à palavra do locutor uma contrapalavra” (BAKHTIN/VOLOCHINOV, 1992, p. 105). O conceito se mostra fecundo porque permite, como afirma Brito (2012), contemplar os diferentes modos de participação nas práticas sociais, focalizando, em específico, “a relação que os estudantes estabelecem com a cultura escrita, suas expectativas em relação à escolarização, suas demandas, suas críticas, seus desejos e suas propostas para a ação pedagógica” (BRITO, 2012, p. 36).

Cibele Lima (2012), por sua vez, analisou as práticas de numeramento forjadas nas relações de estudantes jovens e adultos com os materiais didáticos usados nas aulas de matemática de uma turma do segundo segmento do Ensino Fundamental. A autora acompanhou, por um semestre, duas turmas da EJA e

---

<sup>6</sup> O curso investigado adotava a Pedagogia da Alternância, organizando-se em módulos realizados na Universidade (Tempo Escola) e atividades desenvolvidas nas comunidades campesinas (Tempo Comunidade).

registrou, por meio de recursos diversos, a dinâmica das aulas observadas, trazendo para a análise as interações em que os sujeitos avaliavam os materiais didáticos que lhes eram disponibilizados e o uso que deles se fazia nas aulas de matemática. O estudo tomou as posições assumidas pelas alunas e pelos alunos nessas interações como práticas discursivas, nas quais elas e eles se constituíram como sujeitos de aprendizagem na relação com as práticas escolares.

Dessa maneira, ao se propor compreender os modos como estudantes da EJA se apropriam de práticas discursivas de numeramento a partir das relações que constroem com os materiais didáticos da EJA, Lima (2012) também vê no conceito de apropriação uma possibilidade de focalizar os sentidos atribuídos por esses sujeitos às práticas sociais. Em especial, a autora destaca a asserção feita por Smolka (2000, p. 31), segundo a qual, “as ações adquirem múltiplos significados, múltiplos sentidos, e tornam-se práticas significativas, dependendo das posições e dos modos de participação dos sujeitos nas relações”.

Fora do contexto escolar, mas também contemplando a relação com práticas letradas que a escola busca promover, o estudo de Augusta Mendonça (2014), desenvolvido numa lógica etnográfica, buscou discutir a apropriação, por indígenas Xakriabá, das práticas de numeramento que se inserem na dinâmica da elaboração, do desenvolvimento e da prestação de contas de projetos sociais nas aldeias, projetos esses que se valem de recursos concedidos via editais públicos. A pesquisa indicou que os Xakriabá, embora tivessem que se submeter a regras e procedimentos impostos pelos editais e pela dinâmica dos projetos, forjavam táticas para incorporar tais regras e procedimentos a seu sistema de mundo, desse modo, ‘indigenizando’ (SAHLINS, 1997) as práticas letradas (e numeradas) a eles associadas.

Mendonça (2014) vale-se dos estudos de Elsie Rockwell (2005) para trabalhar com o conceito de apropriação. Segundo a autora, apropriação:

“[...] tem a vantagem de transmitir simultaneamente o sentido da natureza ativa e transformadora do sujeito e, ao mesmo tempo, o caráter coercitivo, mas também instrumental da herança cultural. O termo situa claramente a ação das pessoas que tomam posse dos recursos culturais disponíveis e os utilizam (ROCKWELL, 2005, p. 29).

Assim, Rockwel (2005) destaca as possibilidades que o conceito de apropriação oferece de analisar o valor específico que objetos da cultura adquirem para diferentes grupos culturais, baseando-se em seu estudo dos modos como

povos indígenas do México se apropriam da ferramenta da escrita. Do mesmo modo, o conceito de apropriação mobilizado por Mendonça (2014) em sua pesquisa também se relaciona ao uso que os Xakriabá fazem dos objetos da cultura – no caso a cultura escrita – a que têm acesso.

Não se pode, porém, deixar de destacar a influência de Mikhail Bakhtin no conjunto de estudos que aqui analisamos. Smolka (2000), referência central na abordagem do conceito de apropriação em cinco das pesquisas analisadas acima (BRITO, 2012; LIMA, 2012; SÁ, 2016; SILVA, 2013; SIMÕES, 2010), ao desenhar o conceito de apropriação, traz duas importantes premissas teóricas de Bakhtin (1988) que contribuem para sustentar o modo como propõe e utiliza tal conceito. A primeira diz respeito à multiplicidade de significações que é o que faz de uma palavra uma palavra. A segunda refere-se à perspectiva de que as palavras pronunciadas por um sujeito também estabelecem múltiplas relações com as palavras dos outros, as quais podem ser caracterizadas pela submissão, pela resistência, pela contestação, gerando sentidos não esperados e modos de apropriação diversos.

Essas premissas, menos ou mais explicitamente, também são consideradas nos trabalhos aqui analisados que se referenciam nos estudos de Smolka. No estudo de Érico Freitas (2010), no entanto, o recurso a aportes bakhtinianos remete à perspectiva teórica de James Wertsch (1998) para compreender os modos como os sujeitos se apropriam do discurso científico escolar.

Freitas (2010) estudou a produção de sentidos por estudantes da EJA durante uma aula de Física intitulada “Luz, Cores e Visão” e a relação dos discursos desses sujeitos com aquele veiculado pelo professor e pela ciência escolar. Sua análise, de inspiração bakhtiniana, sugere que o professor, ao sustentar a produção discursiva dos estudantes, favorece um maior entrelaçamento entre as ‘palavras próprias’ dos alunos e as ‘palavras alheias’ da ciência escolar.

Segundo Wertsch (1998), a atividade responsiva dos estudantes, materializada em seus enunciados pronunciados nas interações em sala de aula, constitui um indício das formas de significações construídas por estudantes. Essas, porém, são constrangidas pela assimetria característica das posições sociais assumidas por docentes e discentes no espaço escolar. Nesse sentido, Freitas (2010, p. 29) assume que:

“[...] as evidências de apropriações do discurso científico escolar pelo estudante podem ser encontradas nos seus enunciados proferidos nos momentos em que o discurso na sala de aula é mais interativo, em que mais de uma “voz” é ouvida [destaque do autor].

Ao refinar o conceito de apropriação com o qual opera, Freitas (2010) pontua que Wertsch (1998) mobiliza tal termo a partir da obra de Bakhtin e entende-o como “um processo no qual algo que pertence aos outros é tornado próprio por meio da fala” (p.33). Nesse sentido, Freitas (2010) assume que os sentidos individuais são construídos a partir de contextos sociais em que tais significados estão estabilizados. Ao apropriar-se de um conceito, então, o estudante seria capaz de operá-lo em diversos contextos discursivos em que ele tenha sentido, “com intenções próprias e de modo criativo”.

Assim, a análise tecida por Freitas (2010) considera que a compreensão do discurso do outro é de natureza responsiva, remetendo-se a Cada um dos próximos 7 capítulos perpassa, de alguma maneira, a formação de professores e explora a perspectiva da EMC e suas múltiplas possibilidades. (1953/1997 apud FREITAS, 2010, p. 28) para assumir que “a compreensão passiva do significado do discurso ouvido é apenas um momento abstrato da compreensão ativamente responsiva real e plena, que se atualiza na subsequente resposta em voz real alta”

Simões (2010) também recorre a Bakhtin/Volochinov (1992), no reconhecimento de que o processo de compreensão implica a apropriação de discurso, processo em que o sujeito converte a palavra do outro em própria:

Compreender a enunciação de outrem significa orientar-se em relação a ela, encontrar o seu lugar adequado no contexto correspondente. A cada palavra da enunciação que estamos em processo de compreender, fazemos corresponder uma série de palavras nossas, formando uma réplica (BAKHTIN/ VOLOCHINOV, 1992 apud SIMÕES, 2010, p. 22).

Freitas (2010) e Simões (2010) consideram, ainda, em seus trabalhos, o conceito de enunciação de Bakhtin (1953/1997, p. 123), e, partindo do pressuposto de que a interação verbal como fenômeno social constitui “a verdadeira substância da língua”, sublinham a necessidade de se considerarem as condições de produção do discurso na análise das interações em sala de aula. Nesse sentido, esses autores assumem que todo enunciado é produzido em um determinado contexto social, por pessoas que ocupam um lugar institucional determinado, e se



destina a um interlocutor que também ocupa um lugar social específico.

Silva (2013, p. 62), por sua vez, apoia-se na teoria da enunciação de Bakhtin, assumindo que o problema da significação demanda a consideração da linguagem, que se engendra em uma situação social e histórica concreta, “de modo que o significado da palavra está ligado à história, através do ato único de sua significação.” Desse modo, para Silva (2013), assim como para Freitas (2010), a significação está associada à tomada de posição em um ato concreto de enunciação e está relacionada a um discurso responsivo, segundo o qual: “Toda compreensão é prenhe de resposta, e nessa ou naquela forma a gera obrigatoriamente: o ouvinte se torna falante” (BAKHTIN/VOLOCHINOV, 1992, p. 271).

O conceito de diálogo, ainda na perspectiva bakhtiniana, também é utilizado por Silva (2013, p. 3), que considera que “o diálogo existe em qualquer circunstância, mesmo quando o silêncio impera, pois ali também se pode observar a dinâmica dialógica das interações de vozes sociais, o diálogo inevitável”. Essa concepção de diálogo é corroborada pela análise de Silva (2013), que toma os enunciados proferidos pelos sujeitos de sua investigação como contrapalavras, prenhes de um sentido ideológico e vivencial. Nessa análise, Silva (2013) cita Bakhtin para reiterar que “não são palavras o que pronunciamos ou escutamos, mas verdades ou mentiras, coisas boas ou coisas más, importantes ou triviais, agradáveis ou desagradáveis” (BAKHTIN/VOLOCHINOV, 1992, p. 95).

Brito (2012) também se apoia em Bakhtin/Volochinov (1992) para alertar que as escolhas feitas pelo locutor em uma interação social são pautadas não só pelo valor que ele atribui a determinadas práticas sociais, mas pelos valores que ele supõe que seus interlocutores assumem e pelos efeitos de sentidos que pretende causar. Compartilhando o caminho teórico traçado por Freitas (2010) e Simões (2010), Brito (2012) também demarcará que a compreensão, numa interação dialógica, é uma atitude responsiva. Nesse sentido, sustenta-se em Bakhtin/Volochinov (1992), para considerar que:

O locutor postula esta compreensão responsiva ativa: o que ele espera, não é uma compreensão passiva que, por assim dizer, apenas duplicaria seu pensamento, no espírito do outro; o que espera é uma resposta, uma concordância, uma adesão, uma objeção, uma execução e etc. (BRITO, 2012, p. 291).

Também da Teoria da Enunciação bakhtiniana, Simões (2010), Freitas (2010) e Brito (2012) se valem do conceito de gênero discursivo bakhtiniano, quando consideram (e exploram a produtividade analítica de considerar) que cada esfera da comunicação humana produz determinados modos de usar a língua, que podem ser caracterizados por “tipos relativamente estáveis de discursos” e são constituídos historicamente para cumprir determinadas finalidades em circunstâncias específicas.

Também encontramos a referência aos gêneros discursivos em Lima (2012), ao tratar das especificidades da linguagem que caracterizam o gênero textual ‘livro didático (de matemática)’, chamando a atenção para a estrutura composicional, lexical e do conteúdo temático característico desse tipo de texto e assinalando que os estudantes da EJA se posicionam em relação às práticas de numeramento escolares, as quais são regidas por jogos de linguagem específicos, materializados em atividades e exposições de conteúdos veiculadas nos textos didáticos.

Por fim, é interessante notar que Brito (2012) recorre a Bakhtin/Volochinov (1992) com o objetivo de evidenciar a proximidade conceitual entre a teoria do autor e o conceito de prática de numeramento mobilizado em sua pesquisa. A autora destaca que, assim como Bakhtin considera as relações nas quais os sujeitos estão envolvidos “fatores imprescindíveis na explicação dos seus modos de viver, modos de ser, de conhecer e de se relacionar” (p. 138), os processos de apropriação das práticas de numeramento também levam em conta os seus contextos de uso, os objetivos de quem usa, os efeitos de sentido desejados pelos sujeitos em relação aos significados que orientam sua participação no mundo.

Aspectos dos conceitos de letramento e de numeramento ressaltados pelo trabalho de Mendonça (2014), assim como ocorre nos estudos de Simões (2010), Brito (2012), Lima (2012), Silva, (2013), e Sá (2016), também são coerentes com o modo como se entende o termo ‘apropriação’. Assumindo que sujeitos com pouca ou nenhuma escolarização, aprendem, em outras instâncias da vida social, modos de se relacionar com as demandas sociais de leitura, escrita e conhecimentos matemáticos, Mendonça (2014) enfatiza (e todos esses trabalhos, de algum modo, declaram) a vinculação do conceito de numeramento que sustenta seus estudos ao conceito de letramento que se filia à vertente ideológica, descrita por Brian Street (1998). Longe de restringi-lo a habilidades neutras, as autoras defendem a ideia de que o letramento se constitui em práticas sociais, tecidas por relações de forças atreladas a um contexto específico, que não podem

ser transplantadas para outro contexto. As práticas de numeramento, por sua vez, concebidas como práticas de letramento, são também entendidas como práticas discursivas, “de algum modo, relacionadas à cultura escrita” (MENDONÇA, 2014, p. 40), em todos esses trabalhos.

Além disso, se Smolka (2000) apresenta o conceito de apropriação como uma categoria relacional, Lima (2012) chama atenção para o fato de a dimensão social e cultural do numeramento obrigar-nos a tomá-lo também como um conceito relacional. Para isso, a autora se apoia nas reflexões de Maria Fonseca (2010, p. 239), segundo as quais, “as práticas de numeramento se configuram na relação entre as pessoas e entre os grupos e na relação com os conhecimentos que associamos à matemática.”

Dessa maneira, esses estudos articulam suas referências teóricas de modo a elaborar uma compreensão da “apropriação de práticas de numeramento” que potencializa as possibilidades analíticas e de repercussão de seus estudos, assumindo e interpelando a complexidade da relação pedagógica e oferecendo contribuições para sua produção.

## **Referências teóricas na elaboração de um conceito de ‘Apropriação de práticas de numeramento’**

O exercício analítico que procedemos na seção anterior auxiliou-nos não apenas no delineamento das perspectivas sob as quais os estudos focalizados têm assumido o conceito de apropriação de práticas de numeramento com intenções analíticas, mas também nos instigou à busca de suas referências teóricas e de outros estudos que embasam ou dialogam com tais referências.

Iniciamos essa trilha reflexiva recorrendo ao artigo de Smolka “O impróprio e o impertinente na apropriação de práticas sociais”, de 2000, referência principal de grande parte das dissertações e teses analisadas. Esse artigo nos levou então, a estudos de Angel Pino (1992; 1993; 2000) que procuram explicar o processo pelo qual ocorre a transformação das relações sociais em funções mentais da pessoa. Esses estudos, todavia, nos remeteram a trabalhos de Vygotsky, expoente da corrente teórica da psicologia sócio-histórica, e à filosofia da linguagem de Bakhtin.

Em seu texto “Gênese das funções mentais superiores”, Lev Vygotsky (1931) toma como premissa a origem social dessas funções e defende a ideia de

que:

[...] todas as funções psíquicas superiores são relações interiorizadas da ordem social, são o fundamento da estrutura social da personalidade. Sua composição, sua estrutura genética e modo de ação, em uma palavra, toda sua natureza, é social; inclusive ao converter-se em processo psíquico segue sendo quase social<sup>7</sup> (VYGOTSKY, 1981, p. 141).

É com base nessas proposições de Vygotsky que diversos autores explicam o fenômeno da internalização, processo pelo qual os sujeitos reconstróem, no plano pessoal, as funções que, primeiramente, ocorrem nas relações sociais (PINO, 1992; VYGOTSKY, 1981).

Segundo Smolka (2000), o fenômeno pode ser entendido como incorporação da cultura, o domínio de modos de ser e de se relacionar consigo, com os outros e com o mundo. Em consonância com as reflexões da autora, Pino (1992, p. 322) chama a atenção para o fato de o objeto de internalização, segundo Vygotsky, não ser a ação em si, mas a sua significação: “esta pertence à ordem da subjetividade anônima em que ao mesmo tempo em que é por ela constituída é constituinte de toda subjetividade.”

Pino (1992) pontua, entretanto, que, desde os estudos de Vygotsky e Leontiev, não se avançou muito no conhecimento do modo como se dá esse processo de internalização. Nesse mesmo estudo, Pino observa que o conceito de internalização dificulta a compreensão do processo que pretende explicar, além de veicular uma visão dualista e naturalista do homem e do social, contradizendo a concepção de sujeito subjacente ao modelo histórico-cultural da Psicologia. Nessa perspectiva, Smolka (2000) considera que esse construto, não obstante se oponha a uma perspectiva inatista dos processos de aprender, “carrega a imagem de dentro/fora do organismo, sugerindo, portanto, uma distância, uma diferença, ou mesmo uma oposição entre o individual e o social, como se o individual não fosse, em sua natureza, social” (SMOLKA, 2000, p. 28).

É nesse contexto e buscando compreender o significado das ações humanas que Smolka (2000) propõe o conceito de “apropriação” como uma categoria de análise. Esse conceito pretende, segundo Smolka (2000), contemplar

---

<sup>7</sup> Todas las funciones psíquicas superiores son - relaciones interiorizadas de orden social, son el fundamento de la estructura social de la personalidad. Su composición, estructura genética y modo de acción, en una palabra, toda su naturaleza es social; incluso al convenirse en procesos psíquicos sigue siendo cuasi-social.

os múltiplos sentidos das ações dos sujeitos, os quais dependem das posições que assumem nas práticas sociais de que participam.

Com efeito, a preocupação com as questões dos sentidos e dos significados nos processos de relação das pessoas com o mundo externo perpassa os estudos de muitos autores da Psicologia Social que têm em Vygotsky uma de suas referências. Pino (1992), ao lançar a pergunta: “Como cada sujeito se apropria da significação?”, recorre ao conceito de mediação semiótica. Para o autor, as relações epistemológicas e as relações comunicativas são mediatizadas por instrumentos semióticos. Nesse sentido, os significados das palavras são reconstituídos no próprio ato da comunicação, admitindo diversos sentidos, em função das singularidades dos agentes dessa comunicação.

Assim, o conceito de apropriação tem como uma de suas âncoras a ideia de mediação do signo. Segundo Smolka (2000), comumente, compreendemos apropriação como o domínio de mediadores culturais que permite atender as expectativas sociais relacionadas ao que se espera como modos de agir e de se relacionar consigo e com os outros, característicos de uma determinada prática social. Nesse sentido, “tornar adequado é geralmente tomado como um indicador de tornar próprio” (SMOLKA, 2000, p. 32). Smolka (2000), contudo, propõe aí uma subversão dessa ideia e defende que se apropriar, ou seja, tornar próprio, nem sempre diz respeito a corresponder às expectativas, a adequar-se ao comportamento esperado; relaciona-se antes a modos de significar próprios de um sujeito específico, que vivenciou trajetórias sociais e culturais particulares e assume posições e formas de participações possíveis nas práticas sociais de que participa.

Por isso, um aspecto importante do conceito, destacado por Smolka (2000), diz respeito a sua dimensão relacional. Isso porque é nas relações com os outros que os sujeitos se apropriam, ou seja, atribuem sentidos às práticas sociais, decorrentes das formas singulares pelas quais delas participam. Esses ‘outros’, também participantes de práticas sociais, assumem posições e nutrem expectativas em relação aos modos de agir de seus interlocutores. E nesse jogo discursivo, se por um lado a apropriação pode ser tomada como modos de “tornar *adequado*, *pertinente*, aos valores e normas socialmente estabelecidos” (SMOLKA, 2000, p. 28, destaques da autora), por outro, “*tornar próprio não significa exatamente, e nem sempre coincide com tornar adequado às expectativas sociais. Existem modos de tornar próprio, de tornar seu, que não são adequados ou pertinentes para o outro*” (Smolka, 2000, p. 32, destaques da autora).

Nessa perspectiva, Smolka (2000) recorre a Bakhtin, para quem as palavras são imbuídas de uma multiplicidade de significações. O autor, em seu livro “Marxismo e Filosofia da Linguagem” (BAKHTIN/VOLOCHINOV, 1992), ocupa-se do problema da significação e da compreensão no âmbito dos estudos da filosofia da linguagem sob uma perspectiva marxista. Sob o argumento de que a condição de existência da palavra é sua significação, Bakhtin/Volochinov (1992), já no início de sua obra indica que a significação é afetada pela “entonação expressiva, a modalidade apreciativa sem a qual não haveria enunciação, o conteúdo ideológico, o relacionamento com uma situação social determinada” (p.15). Nesse sentido, o signo é social, carregado de um caráter vivencial, e seus múltiplos sentidos só podem ser compreendidos no interior de um processo enunciativo.

Compreensão e significação são, para Bakhtin/Volochinov (1992), processos que se interrelacionam. A significação é produto da interação entre os participantes de uma interação verbal e não se localiza no interior da palavra. Ao participarem de um diálogo, os interlocutores são ativos e se engajam em um processo de compreensão da enunciação do outro, orientando-se em relação a ela, inserindo-a em um contexto correspondente e produzindo uma contrapalavra (BAKHTIN/VOLOCHINOV, 1992). Assim, o processo de compreensão envolve uma tomada de posição, em que a cada palavra da enunciação que intencionamos compreender, produzimos palavras nossas, formando uma réplica. Para Bakhtin/Volochinov (1992, p. 132), “a compreensão é uma forma de diálogo; ela está para a enunciação assim como uma réplica está para a outra no diálogo”.

Nesse sentido, é a relação da apropriação com a significação e as possibilidades que esse conceito aporta às análises das dinâmicas da sala de aula na consideração do jogo enunciativo e de suas condições de significação que nos fizeram elegê-lo como ferramenta teórica a ser utilizada nas análises que empreendemos dos processos de aprendizagem de matemática, especialmente, mas não exclusivamente, quando focalizamos aprendizes jovens e pessoas adultas com pouca escolarização. Acreditamos que refletir sobre os modos como sujeitos se posicionam nas práticas escolares, em nosso caso, aquelas relacionadas ao conhecimento matemático, nos possibilita compreendê-los para além dos limites impostos por um olhar baseado unicamente em uma perspectiva didática da dinâmica do ensinar e do aprender. O conceito de apropriação ajuda-nos, assim, a analisar a dimensão social, histórica e cultural do que parece ser uma pergunta trivial de uma estudante, ou daquilo que inicialmente é visto como uma recusa

à execução de uma tarefa escolar ou, ainda, do que é considerado um erro em relação aos objetivos didáticos que levam à proposição de uma determinada atividade.

A mobilização desse conceito nos trabalhos do Grupo de Estudos sobre Numeramento atende, assim, a uma disposição de compreender educandos e educandas em suas singularidades, mas também como sujeitos sociais. É essa disposição que nos faz voltar-nos para as interações discursivas em que esses sujeitos se engajam na sala de aula, procurando identificar e analisar as posições discursivas que assumem como processos de apropriação das práticas de numeramento escolares, essas também compreendidas como práticas discursivas.

## **Apropriação de práticas de numeramento como apropriação de práticas discursivas**

Ao compreender a apropriação de práticas de numeramento como apropriação de práticas discursivas, e, assim, abordar a questão da ‘aprendizagem da matemática escolar’ no âmbito das questões de (uso da) linguagem, é preciso, todavia, considerar que as posições discursivas assumidas pelas pessoas não se estabelecem exclusivamente a partir de emanções individuais, e nem são resultado apenas de circunstâncias situacionais estabelecidas numa determinada aula com determinados sujeitos. A compreensão da dinâmica discursiva que o conceito de apropriação, tal como o temos utilizado, nos inspira requer, assim, relacionar o discurso ao uso da linguagem como prática social.

Com efeito, o reconhecimento das práticas de numeramento como práticas discursivas supõe considerar que sistemas de representação matemáticos<sup>8</sup> dão forma e comunicabilidade, emprestam argumentos e estabelecem poderes às interações que compõem variadas práticas da vida social, especialmente em sociedades como a nossa, marcadas pelos modos de relação social, cultural e econômica do Capitalismo.

Assim, nossa intenção de compreender a dinâmica discursiva de cada sala de aula de matemática investigada constituindo processos de apropriação de práticas de numeramento nos levou a Norman Fairclough (2000, 2001, 2003), para quem o discurso nutre uma relação dialética com as estruturas sociais. O discurso

---

<sup>8</sup> Tais como a linguagem algébrica, os gráficos, os diagramas, as figuras geométricas, ou a linguagem verbal específica.

constitui uma dimensão da prática social e está relacionado às instituições em que ocorre, as quais estabelecem para ele papéis e práticas específicas. Desse modo, ao mesmo tempo em que é constituído pelas ordens do discurso que lhe caracterizam, contribui para sua formação.

Fairclough (2001) define discurso como “um modo de ação, uma forma em que as pessoas podem agir no mundo e, especialmente, sobre os outros, como também um modo de representação” (p.91). A prática discursiva medeia a relação entre o texto e a prática social. É nesse contexto que o autor pontua as três funções do discurso que nos parecem úteis para analisar os processos de apropriação de práticas de numeramento escolares por estudantes de diferentes referências culturais, faixas etárias, identificações de gênero e de grupo étnico, histórias de vida e trajetórias escolares, condições econômicas, de saúde e de acesso a ela, vivências religiosas e laborais, locais e condições de moradia e inserção na vida comunitária.

A primeira função ressalta que a prática discursiva contribui para construir identidades sociais e posições de sujeitos. Esse processo indica o caráter ideológico do discurso na obra de Fairclough. Segundo o autor, os sujeitos são interpelados pelos significados em jogo na prática discursiva. Tais significados, por sua vez, são estabelecidos a partir da ideologia que se manifesta nas práticas sociais. Nesse sentido, o autor defende uma constituição dialética do sujeito pelo discurso, em que o equilíbrio entre o sujeito como agente vivo e como efeito ideológico depende das condições sociais e das formas como se estabelecem as relações de poder. De certa forma, essa compreensão da relação entre sujeito e discurso se relaciona à de Michel Foucault, embora o próprio Fairclough manifeste sua crítica a um caráter que ele considera pesadamente estruturalista na concepção de sujeito do filósofo francês:

A insistência de Foucault sobre o sujeito como um efeito das formações discursivas tem um sabor pesadamente estruturalista, que exclui a agência social ativa de qualquer sentido significativo. [...] A posição sobre o discurso que defenderei [...] é dialética e considera os sujeitos sociais moldados pelas práticas discursivas, mas também capazes de remodelar essas práticas (FAIRCLOUGH, 2001, p. 70).

Essa concepção de sujeito que se constitui numa relação dialética com o discurso admite, ou mais, demanda, entretanto, o reconhecimento do caráter dialógico do discurso, numa perspectiva Bakhtiniana, que nos parece ecoar nas



considerações de Fairclough sobre as relações sujeito-discurso. Para Bakhtin (1953/1997, p. 316),

Um enunciado concreto é um elo na cadeia da comunicação verbal de uma dada esfera. As fronteiras desse enunciado determinam-se pela alternância dos sujeitos falantes. Os enunciados não são indiferentes uns aos outros, nem são auto-suficientes [sic]; conhecem-se uns aos outros, refletem-se mutuamente. São precisamente esses reflexos recíprocos que lhes determinam o caráter. O enunciado está repleto dos ecos e lembranças de outros enunciados, aos quais está vinculado no interior de uma esfera comum da comunicação verbal.

Como práticas discursivas, as práticas de numeramento também se estruturam em enunciados que não são independentes de seus contextos de uso e dos ecos de outros discursos que lhes dão sustentação ou referência. Os processos de significação que se forjam nas interações e configuram a apropriação das práticas de numeramento não se constituem em relações de dimensões exclusivamente semânticas. A compreensão das posições assumidas por discentes e docentes nessas interações demanda a consideração da dimensão pragmática e histórica da linguagem. Nos discursos mobilizados pelos sujeitos e nos processos de significação que essa mobilização envolve também está presente a memória, o já dito (ORLANDI, 2007), característico das formações discursivas disponíveis. Assim, os sentidos dependem das relações construídas a partir das e com as formações discursivas, essas mesmas heterogêneas e fluidas.

Nessa perspectiva, o discurso é constituído pelo já dito, o interdiscurso, e pelo que é formulado na enunciação, o intradiscurso, dadas as condições de produção específicas. Segundo Eni Orlandi (2007), o discurso é formado pelo delicado cruzamento entre memória e o que vai ser atualizado. Desse modo, entendemos que, quando os sujeitos se apropriam de práticas de numeramento, não reproduzem nem inauguram os sentidos, mas, como propõe Orlandi (2007), podem encontrar espaço para o estabelecimento de novas relações a partir do que já foi dito.

A segunda função que Fairclough (2001) atribui ao discurso está relacionada à construção de certos modos das pessoas se relacionarem. Quando as práticas discursivas sustentam certas relações sociais, pode-se afirmar que elas contribuem para a manutenção de uma certa hegemonia. Ao contrário, quando questionam relações já estabelecidas pode-se observar um abalo da ordem de discurso dominante.

Nesse processo, os sujeitos nem sempre estão cientes da característica ideológica de suas ações. Na sala de aula, por exemplo, o modo como são estabelecidos os turnos de fala ou conduzida uma atividade ou as relações que os sujeitos estabelecem com as práticas escolares contribui para manter ou para questionar as ordens de discurso hegemônicas. É nessa perspectiva que estudos sobre práticas de numeramento, ao conceber as práticas matemáticas como práticas socioculturais, têm focalizado as posições assumidas pelos sujeitos em interações que envolvem matemática na escola ou fora dela, e a própria conformação que essas interações assumem, como oportunidades de estabelecimento de modos diversos de relações sociais marcadas pelo reforço ou pela contestação das relações de hegemonia entre conhecimentos matemáticos: escolares e cotidianos (CABRAL, 2007; FARIA, 2007; FERREIRA, 2009), da cidade e do campo (SÁ, 2016; VASCONCELOS, 2011), não indígenas e indígenas (BRITO, 2012; MENDONÇA, 2014), produzida por homens e produzida por mulheres (SOUZA, 2008), dentre outros.

A terceira função que Fairclough (2001) atribui ao discurso relaciona-se à sua contribuição para construção de conhecimento e de sistemas de crenças, sua manutenção e sua transformação. Os significados também são gerados em uma relação de poder e representam uma dimensão do exercício do poder e da luta pelo poder. As práticas discursivas podem tanto recorrer a convenções que naturalizam o que é estabelecido como válido em um determinado contexto, como podem ser arena de diferentes possibilidades de interpretações que resultariam, potencialmente, em rearticulações na ordem do discurso.

Se, ao buscarmos explicitar o modo como concebemos a apropriação das práticas discursivas a que chamamos práticas de numeramento, recorremos a Fairclough, isso se deve a um alinhamento com uma abordagem da linguagem que não se restringe à consideração de sua forma linguística, mas também a compreende como constituindo material da ideologia (o que se articula à perspectiva bakhtiniana que permeia o uso do conceito de apropriação em nossas análises). Assim, como a análise que Fairclough propõe interessa-se pelo sentido do texto – sentido que é produzido nas práticas de leitura, e não especificamente pelo seu conteúdo – também a análise que buscamos proceder interessa-se pela produção de sentidos para as práticas matemáticas, produção que se efetua na interação e nos modos de processamento e uso do conhecimento matemático e não numa assimilação de natureza exclusivamente semântica de seu conteúdo. O conteúdo matemático pensado como conteúdo de um texto fornece pistas

relacionadas ao seu sentido, porém, a análise das práticas de leitura deve levar em consideração os aspectos ideológicos e históricos das práticas sociais envolvidas e que estão engendradas nas intenções de sua escrita ou proposição, nos contextos de sua produção e sua veiculação, nas circunstâncias, nos interesses e nas consequências de sua leitura. Isso porque as práticas discursivas passadas e suas convenções dotam o texto matemático de significados potenciais, os quais podem ser contraditórios e heterogêneos. Estabelece-se, assim, um campo de luta e aberto às múltiplas interpretações.

## **Considerações Finais**

Essa abordagem da produção dos sentidos de textos (verbais, simbólicos, icônicos, gestuais) que veiculam discursos matemáticos, a partir das práticas de sua leitura é que dará suporte às análises a que temos submetido os eventos de numeramento que selecionamos no material empírico produzido em nossas investigações. Tomamos reflexões sobre o discurso para subsidiar o uso que fazemos do conceito de ‘apropriação de práticas de numeramento’ porque nos interessa focalizar as práticas de leitura e de produção de textos (verbais, simbólicos, icônicos, gestuais) que circulam nas aulas de matemática como práticas discursivas, que configuram modos de ação sobre o mundo e sobre os outros, por meio da linguagem. Essas práticas de leitura e de produção de textos matemáticos configuram modos culturais de uso da linguagem que incluem valores, crenças, sentimentos e relações sociais estabelecidas em meio a ideologias e relações identitárias. Elas podem entrar em harmonia, se complementarem ou indicarem resistência às ordens de discurso dominantes.

Nesse sentido, um dos objetivos de se analisarem as práticas de leitura e de produção de textos (compreendidos em um âmbito amplo dos conhecimentos que a escola faz circular) e, em especial, de se analisarem as práticas de leitura e de produção de discursos oportunizadas e/ou demandadas pelos processos de ensino e de aprendizagem de matemática na escola é a desnaturalização de práticas hegemônicas. Para isso, procuramos identificar não somente o que as pessoas fazem com a linguagem, mas os valores e as crenças que sustentam suas ações.

Street (1984) afirma que as práticas de leitura são orientadas por atitudes e relações sociais que se conectam a outros processos sociais mais amplos,

políticos, econômicos e culturais. O que temos encontrado nos estudos que desenvolvemos (FONSECA; SIMÕES, 2011; 2014; SIMÕES, 2010, 2019; SIMÕES; FONSECA, 2010; 2012; 2015) e em outros estudos sobre apropriação de práticas de numeramento (ADELINO, 2009; 2018; BRITO, 2012, 2019; CABRAL, 2007, 2015; CARVALHO, 2014; FARIA, 2007; FERREIRA, 2009; LIMA, 2007, 2012, 2020; SILVA, 2013; MENDES, 2001; MENDONÇA, 2014; MIRANDA, 2015; SÁ, 2016; SCHNEIDER, 2010; SOUZA, 2008; VASCONCELOS, 2011) que assumem essas práticas como práticas de letramento. Fonseca (2017) corrobora a perspectiva de Street de que os valores sociais e morais ligados ao contexto social em que as práticas de letramento (entre elas, as de numeramento) são produzidas geram atitudes e sentimentos na relação com o texto. É por isso que as análises que desenvolvemos não podem desconsiderar que estudantes atribuem significados às atividades em sala de aula no confronto com práticas sociais estabelecidas por discursos próprios da instituição escolar, mas também com outras, específicas de outros contextos sociais.

São os processos e as condições dessa significação que pretendemos contemplar quando focalizamos os sujeitos apropriando-se de práticas de numeramento, mobilizando e tensionando valores sociais e morais das diversas culturas que convivem em solidariedade ou disputa nas salas de aula. Interessamos com isso, principalmente, conhecer melhor o público da Educação Básica e os novos públicos do Ensino Superior, para além dos estereótipos ou idealizações que desconsideram suas diferentes condições e expectativas, intenções e referências, temores e desejos, disposições e resistências, que os constituem como sujeitos de conhecimento e memória, de cultura e aprendizagem, de direitos e de projetos.

## Referências

ADELINO, Paula R. **Jovens do Ensino Médio Técnico: um olhar a partir das aulas de matemática**. 174p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2018.

ADELINO, Paula R. **Práticas de numeramento nos livros didáticos de matemática voltados para a educação de jovens e adultos**. 134p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2009.

ALIAGAS, Cristina; CASTELLÀ, Josep M.; CASSANY, Daniel. “Aunque lea poco, yo sé que soy listo”. Estudio de caso sobre un adolescente que no lee literatura”. **OCNOS**, n. 5, p. 97-112, 2009.

BAKHTIN, Mikhail. **Estética da criação verbal**. São Paulo, SP: Martins Fontes, 1997 (1953).

BAKHTIN, Mikhail. **The dialogic imagination: four essays**. In: M. Holquist (Org.). Austin, Texas: University of Texas Press, 1988.

BAKHTIN, Mikhail (VOLOCHINOV, Valentin). **Marxismo e filosofia da linguagem**. 6ª Ed. São Paulo, SP: Hucitec, 1992 (1929).

BRITO, Ruana P. S. **Apropriação de práticas de numeramento em um contexto de formação de educadores indígenas**. 269p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2012.

BRITO, Ruana P. S. **“É o que eles estão querendo pesquisar, estão querendo mostrar”**: apropriação de práticas de numeramento da Educação Estatística por estudantes indígenas do Curso de Formação Intercultural para Educadores Indígenas da UFMG. 539p. Tese (Educação) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2019

CABRAL, Viviane R. S. **“Nada é cem por cento”**: usos de conhecimentos matemáticos como táticas retóricas nas práticas discursivas de adolescentes atendidos pelo Centro de Referência de Assistência Social CRAS. 219p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2015.

CABRAL, Viviane R. S. **Relações entre conhecimentos matemáticos escolares e conhecimentos do cotidiano forjadas na constituição de práticas de numeramento na sala de aula da EJA**. 169p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2007.

CARVALHO, Giovanna C. **Papéis do contexto das questões de Matemática do ENEM**: práticas de numeramento envolvidas na discussão com docentes em formação. 202p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2014.

CHARTIER, Anne-Marie. **Práticas de leitura e escrita: história e atualidade**. Belo Horizonte: Ceale/Autêntica, 2007.

FAIRCLOUGH, Norman. **Analysing discourse: textual analysis for social research**. Londres e Nova York: Routledge: 2003.

FAIRCLOUGH, Norman. **Discurso e mudança social**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2001.

FAIRCLOUGH, Norman. Discourse, social theory, and social research: the discourse of welfare reform. **Journal of Sociolinguistics**, Oxford, v. 4, n. 2, p. 163-195, 2000.

FARIA, Juliana B. **Relações entre práticas de numeramento mobilizadas e em constituição nas interações entre os sujeitos da educação de jovens e adultos**. 335p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2007.

FERREIRA, Ana R. **Práticas de numeramento, conhecimentos cotidianos e escolares em uma turma de Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos**. 158p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2009.

FONSECA, Maria C. F. R. Alfabetização, letramento e numeramento: conceitos para compreender a apropriação das culturas do escrito In: GOULART, Cecília; GONTIJO, Cláudia; FERREIRA, Norma (Orgs.). **A alfabetização como processo discursivo: 30 anos de A criança na fase inicial da escrita**. São Paulo: Cortez, 2017, v.1, p. 165-177.

FONSECA, Maria C. F. R.; SIMÕES, Fernanda M. Apropriação de práticas de numeramento na EJA: valores e discursos em disputa. **Educação e Pesquisa** (USP Impresso), v. 40, p. 517-531, 2014.

FONSECA, Maria C. F. R.; SIMÕES, Fernanda M. A escolarização e as práticas sociais de leitura e escrita: a análise dos educandos adultos da Escola Básica. **Revista Portuguesa de Educação**, v.24, p.111-134, 2011.

FREITAS, Erico T. F. **A linguagem na formação de conceitos na sala de aula de física na educação de jovens e adultos**. 181p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2010.

GREEN, Judith; DIXON, Carol N.; ZAHARLICK, Amy. A Etnografia como uma lógica de investigação. **Educação em revista**, Belo Horizonte, MG, v. 42, p. 13-79, 2005.

KNIJNIK, Gelsa. **Educação matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra**. Santa Cruz do Sul, RS: EDUNISC, 2006.

LIMA, Cibele L. F. **Estudantes da EJA e materiais didáticos no ensino da matemática**. 139p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2012.

LIMA, Priscila C. **Constituição de práticas de numeramento em eventos de tratamento da informação na Educação de Jovens e Adultos**. 114p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2007.

LIMA, Raquel M. P. **“O meu é mais grande”**: Rotinas lúdicas de comparação nas culturas da infância e apropriação de práticas de numeramento por crianças de 3 e 4 anos em uma Escola Municipal de Educação Infantil. 171p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2020.

MARINHO, Marildes; CARVALHO, Gilcinei T. (Orgs.) **Cultura Escrita e Letramento**. Belo Horizonte: Ed.UFMG, 2010.

MENDES, Jackeline R. **Ler, escrever e contar: práticas de numeramento-letramento dos kaiabi no contexto de formação de professores índios no Parque Indígena do Xingu**. 254p. Tese (Doutorado em Linguística Aplicada) – Instituto de Estudos da Linguagem, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2001.

MENDONÇA, Augusta A. N. **“Fechando pra conta bater”**: a indigenização dos projetos sociais Xakriabá. 183p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2014.

MIRANDA, Paula R. **“O PROEJA vai fazer falta”**: uma análise de diferentes projetos educativos a partir dos discursos de estudantes nas aulas de Matemática. 267p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2015.

ORLANDI, Eni L. P. **Análise de discurso**: princípios e procedimentos (1a. Edição: 1990, Ed. Pontes). 2ª Ed. Campinas: Pontes, 2007.

PAULINO, Graça; COSSON, Rildo. Letramento literário: para viver a literatura dentro e fora da escola. In: ZILBERMAN, Regina; RÖSING, Tania (Orgs.). **Escola e leitura: velha crise; novas alternativas**. São Paulo: Global, p. 61-80, 2009.

PINO, Angel. As categorias de público e privado na análise do processo de internalização. **Educação & Sociedade**, Campinas, SP, v. 13, n. 42, p. 315-327, 1992.

PINO, Angel. O social e o cultural na obra de Lev. S. Vigostki. **Educação & Sociedade**, Campinas, SP, v. 71, p. 45-78, 2000.

PINO, Angel. Processos de significação e constituição do sujeito. **Temas em Psicologia**, Ribeirão Preto, SP, v. 1, n. 1, 1993.

ROCKWELL, Elsie. La apropiación, un proceso entre muchos que ocurren en ámbitos escolares. In: Memoria, conocimiento y utopía. Anuario de La Sociedad Mexican de Historia de la Educación. Barcelona. **Edicones POMARES**, n. 1, p 28-38, 2005.

SÁ, Josinalva R. **Licenciatura em Educação do Campo: propostas em disputa na perspectiva de estudantes do Curso de Matemática da UFMG**. 129p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2016.

SAHLINS, Marshall. O pessimismo sentimental e a experiência etnográfica: por que a cultura não é um “objeto” em via de extinção (parte I). **Mana**, v.3, n.1. p.41-73, 1997.

SCHNEIDER, Sonia M. **Esse é o meu lugar... esse não é o meu lugar: relações geracionais e práticas de numeramento na escola de EJA**. 2010. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2010

SILVA, Valdenice L. **Práticas de numeramento e táticas de resistência de estudantes camponeses da EJA, trabalhadores na indústria de confecção**. 238p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2013.

SIMÕES, Fernanda M. **Apropriação de práticas de letramento (e de numeramento) escolares por estudantes da EJA**. 190p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2010.



SIMÕES, Fernanda M.; FONSECA, Maria C. F. R. Apropriação de práticas de letramento escolares por estudantes da Educação de Jovens e Adultos. **Revista Brasileira de Educação**, v.20, p.869-884, 2015.

SIMÕES, Fernanda M.; FONSECA, Maria C. F. R. "Escrever explicando é mais difícil": hipóteses de estudantes adultos sobre a produção de textos escritos. **Educação Unisinos** (On-line), v. 16, p.78-86, 2012.

SIMÕES, Fernanda M.; FONSECA, Maria C. F. R. Práticas de letramento cotidianas e escolares: confrontos na sala de aula da Educação de Pessoas Jovens e Adultas. **Leitura. Teoria & Prática**, v. 54, p. 40-46, 2010.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo, SP: Cortez, 2007.

SMOLKA, Ana L. B. O (im)próprio e o (im)pertinente na apropriação das práticas sociais. **Cadernos Cedes**. Campinas, SP, v.20, n. 50, p. 26-40, 2000.

SMOLKA, Ana L.B. **A criança na fase inicial da escrita**: a alfabetização como processo discursivo. São Paulo, SP: Cortez; Campinas/São Paulo: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1993.

SOUZA, Maria C. R. F. **Gênero e Matemática(s)**: jogos de verdade nas práticas de numeramento de alunas e alunos da Educação de Pessoas Jovens e Adultas. 317p.Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2008.

STREET, Brian. New literacies in theory and practice: what are the implications for language in education? **Linguistics and Education**, v. 10, n. 1, p.1-24, 1998.

STREET, B. What's "new" in New Literacy Studies? Critical approaches to literacy in theory and practice. **Current Issues in Comparative Education**, v.5, n.2, p. 77-91, 2003.

VASCONCELOS, Kyrleys P. **Um estudo sobre práticas de numeramento na Educação do Campo**: tensões entre os universos do campo e da cidade na Educação de Jovens e Adultos.126p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2011.

VYGOTSKY, Lev S. The genesis of higher mental functions. In: WERTSCH, J.V. (Org.). **The concept of activity in soviet psychology**. Armonk, N.Y.: M.E. Sharpe, 1981, pp. 134-143.

VYGOTSKY, Lev S. **Concrete human psychology**. Soviet Psychology, XXVII (2), 1989, p. 53-77.

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. Trad. José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche, 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKY, Lev S. **Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores**. Obras Escogidas, Tomo III, Madrid: Visor Distribuciones, S.A., 1931/1996b.

WERTSCH, James. **Mind as action**. Oxford: Oxford University Presss, 1998.

WITGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. Petrópolis: Vozes, 2009.

## **Autoras**

### **Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca**

Universidade Federal de Minas Gerais

E-mail: mcfrfon@gmail.com

### **Fernanda Maurício Simões**

Escola Municipal Modestino Gonçalves - Santa Luiza -MG.

E-mail: simoesamaral@gmail.com

## Capítulo 2

# A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS NA SALA DE AULA

*Sandra Maria Pinto Magina  
Síntria Labres Lautert  
Irene Mauricio Cazorla*

Muito já tem sido publicado no Brasil sobre a Teoria dos Campos Conceituais, já que ela vem sendo usada como suporte para inúmeras pesquisas no país, pelo menos, desde a década de 1980. Neste artigo, o nosso interesse é inicialmente discutir essa teoria, de maneira geral, trazendo seus principais elementos. Na sequência apresentaremos, para exemplificá-la, três campos conceituais, a saber: as estruturas aditivas, multiplicativas e de medidas de tendência central. Os dois primeiros campos já são bem conhecidos, tendo sido apresentados à comunidade científica desde o início dos anos 80 pelo próprio Vergnaud. Já o terceiro campo nós o trazemos como novidade, uma vez que ele vem sendo construído nos últimos dois anos. O capítulo terá a preocupação de apresentar os três campos conceituais, através de exemplos, a maioria deles advindos de estudos científicos e, a partir dessa macro visão, discuti-los, levando-se em consideração a sala de aula.

*Palavras-chave:* Teoria dos Campos Conceituais. Estruturas Aditivas. Estruturas Multiplicativas. Estruturas das Medidas de Tendência Central. Ensino Fundamental. Sala de Aula.

## Introdução

Podemos apresentar a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) chamando a atenção para três premissas básicas presentes que as alicerça: (1) o conhecimento vai se constituindo no sujeito dentro de um longo período de tempo (VERGNAUD, 1983, 1990); (2) o conhecimento conceitual emerge a partir de situação-problema, o que significa que em sala de aula existe uma relação entre conceitos matemáticos e resolução de problemas, a qual não é nada simples para o professor explicitá-

la (VERGNAUD, 1988b); e (3) os conceitos iniciam suas formações dentro de validades restritas, variando de acordo com a experiência e o desenvolvimento cognitivo do aprendiz. Essas validades vão se ampliando à medida que conceitos interagem com outros (VERGNAUD 1990, 1991, 1998).

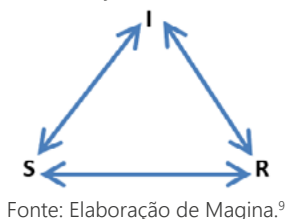
Tais premissas nos levam a pensar que a TCC, uma teoria de cunho psicológico, com grande influência das ideias de Piaget, mas também de Vygotsky, tem uma vocação para a sala de aula; para o processo de formação e desenvolvimento de conceitos científicos no aprendiz. Tal relação ficará ainda mais clara quando apresentarmos alguns dos campos conceituais já propostos. Veremos que eles foram aplicados, sobremaneira, no ambiente escolar, na sala de aula. Em outras palavras, os conceitos considerados e que compõem os campos conceituais pertencem ao ambiente escolar.

Antes de apresentarmos esses campos conceituais, sempre vistos com o olhar da sala de aula, gostaríamos de recuperar e explicar alguns conceitos centrais da TCC. É importante salientar que essa explicação é fruto de nossa interpretação, a partir de alguns aspectos: (a) das inúmeras leituras de textos publicados por Vergnaud, nos últimos 25 anos, sobre a teoria; (b) das nossas reflexões sobre os resultados de nossas pesquisas e de outras em que a TCC foi usada como subsídio teórico; e (c) dos vários debates pessoais que tivemos a oportunidade de ter com o próprio Gérard Vergnaud, ao longo dos anos.

## **O tripé que compõe a formação do conceito**

Em muitos textos, Vergnaud (1983, 1988, 1990) esclarece que para que se dê a formação de um conceito, há que haver uma relação entre: (S) um conjunto de situações, podendo essas serem atividades, tarefas ou problemas; (I) um conjunto de invariantes por meio dos quais o aprendiz lida com as situações; e (R) um conjunto de representações simbólicas que permitem que os invariantes interajam com as situações. Esses três conjuntos se relacionam como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Triângulo com o tripé dos três conjuntos de elementos que estão na base da formação do conceito



Fonte: Elaboração de Magina.<sup>9</sup>

Magina, Campos, Gitirana e Nunes (2001), foram muito felizes ao explicar a relação que existe entre esses três conjuntos de ternas, do ponto de vista psicológico. O conjunto de Situações – S – refere-se à realidade, ou, como chamam certos autores da semiótica, o referente; os conjuntos dos Invariantes e das Representações Simbólicas – I e R – referem-se às representações, quer sejam gestuais, orais, escritas, tabulares ou gráficas.

Notemos, por fim, que esse tripé apresentado na Figura 1 refere-se a apenas um conceito. Porém se considerarmos que cada uma das situações traz, em si, muitos conceitos, os quais vão sendo apropriados pelo sujeito à medida que ele lida cada vez mais com situações análogas, então como falar em formação de um único conceito? Por que não considerar a formação de um grupo de conceitos, um campo conceitual? É a partir dessa compreensão que Vergnaud construiu a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD 1982, 1983, 1994), que, segundo ele, embora tenha sido elaborada no âmbito da Matemática, pode ser pensada em diferentes áreas de conhecimento.

## O Teorema-em-ação

Este conceito foi introduzido na TCC para explicar aquelas situações em que o aprendiz resolve um problema de maneira particular, muitas vezes, pouco

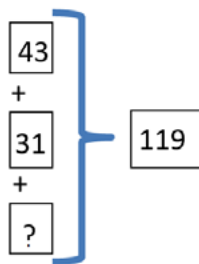
<sup>9</sup> Magina usa essa representação triangular para descrever os três elementos da terna proposta por Vergnaud (1982, 1988b) para explicar a formação do conceito. Vergnaud os apresenta como: C(S,I,R), em que o C é o conceito, o S o conjunto de situações, o I o conjunto de invariantes e o R (já representado antes por sigma e ainda pelo “s” minúsculo) o conjunto de representações simbólicas. Já Magina encachou cada um dos elementos em um dos vértices do triângulo, ligando-os por seta. Para Magina essa representação deixa mais claro a estreita relação que esses três elementos têm entre si. Magina vem usando essa representação em suas aulas “Teorias da Aprendizagem”, tanto na PUC/SP, quanto UESC e, ainda, em várias palestras em que ela discute a Teoria dos Campos Conceituais, desde 1994.

ou nada canônica, mas não sabe explicar como resolveu. Um exemplo do uso de um *teorema-em-ação* fica explícito na resolução apresentada por um estudante do 4º ano, de uma escola pública da cidade de São Paulo, a seguinte situação:

**Situação 1** – João tem uma coleção de 119 carrinhos em miniatura, que ele arruma em três prateleiras, assim distribuídos: 43 carrinhos na 1ª prateleira, 31 carrinhos na 2ª prateleira e o restante dos carrinhos ele arruma na 3ª prateleira. Quantos carrinhos ficaram na 3ª prateleira?

Trata-se de uma situação do campo conceitual aditivo (ou estrutura aditiva), classificada como composição, em que se conhece duas partes da composição e se pergunta pela terceira parte, conhecendo-se o total dessa composição. Podemos representar o problema pelo cálculo relacional apresentado na Figura 2, a seguir.

Figura 2 - Cálculo relacional proposto para a resolução da Situação 1



Fonte: Elaboração das autoras.

Vergnaud (1990, 1998) explica que o termo *teorema-em-ação* quer expressar a possível existência de um teorema matemático que está por trás da ação do estudante, mas que ele não tem consciência disso. Observemos a identificação desse *teorema-em-ação*, a partir de um diálogo com esse estudante:

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 31 \\
 + 45 \\
 \hline
 119
 \end{array}$$

**RESPOSTA: 45 CARRINHOS**

*Professora: - Como você achou a resposta 45?*

*Estudante: - Somando.*

*Professora: - E como você colocou o 45 em uma das parcelas da sua conta? Esse número não está no enunciado.*

*Estudante: - É que eu fui somando e coloquei ele.*

*Professora: - Somando?*

*Estudante: - É, eu peguei 43 com o 31 e aí eu somei... de 74 até chegar em 119. Aí, a senhora queria que a gente armasse a conta e eu armei.*

Vamos identificar os dois teoremas matemáticos que estão sendo, implicitamente, usados nas ações do estudante:

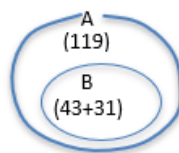
1º *teorema-em-ação*: Eu peguei 43 com o 31. Nessa ação, ele somou a quantidade de carrinhos da 1ª e 2ª prateleiras, sendo  $n(J)$  o conjunto de carrinhos da 1ª prateleira e  $n(L)$  o conjunto da 2ª prateleira.

Assim, o teorema que está por trás da ação do estudante de somar  $43 + 31$  é:

$$n(J \cup L) = n(J) + n(L).$$

2º. *teorema-em-ação*: Aí, eu somei 74 até chegar em 119. Consideremos que: (1) 74 é a quantidade de carrinhos do conjunto B, e 119 é a quantidade de carrinhos do conjunto A, e (2) que B é subconjunto de A ( $B \subset A$ ), já que B é uma parte do total de carrinhos do João (A), como mostra a Figura 3 a seguir.

Figura 3 - Representação do 2º teorema-em-ação presente na ação do estudante para resolver a Situação 1



Fonte: Elaboração das autoras.

Então, o complementar de B em relação a A é o que falta entre A e B, isto é,  $A - B$ . O estudante partiu de 74 (B) e foi completando valores até chegar

em 119 (A).

Matematicamente, o estudante fez:

$$\begin{matrix} & B \\ C & \\ A & \end{matrix} \therefore A - B = 119 - 74$$

Ora, como já está presente na resolução do estudante, as três quantidades de carrinhos de cada prateleira? Como o estudante fez para saber? A incógnita do problema é justamente a quantidade de carrinhos na terceira prateleira. E, no entanto, ele já a apresenta quando arma a resolução do problema.

O que podemos inferir é que ele, provavelmente, considerou a relação de “74 para 119”, e assim foi completando valores desde 74 até chegar em 119. Por exemplo, podemos completar inicialmente de 10 em 10 ( $74 + 10 = 84$ ;  $84 + 10 = 94$ ;  $+ 10 = 104$ ;  $104 + 10 = 114$ ) e depois completar 5, chegando a 119.

Em conclusão, podemos dizer que o *teorema-em-ação* é uma proposição, verdadeira ou falsa, que o sujeito lança mão para lidar com determinada situação, sem que ele, contudo, tenha consciência disso.

## Esquema

Vergnaud (1990, 1998) utiliza o termo “esquema” emprestado da Teoria de Piaget, a qual concebe esquema como uma ação organizada que pode ser transferida ou generalizada por meio de sua repetição em situação análoga (PIAGET; INHELDER, 1995). Em outras palavras, um esquema significa a formação de um conceito ainda de forma limitada, porque seu significado está restrito a uma ou a poucas situações. Para ele, o esquema “é a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações” (VERGNAUD, 1990, p. 136). Anos mais tarde, ele explica que o conceito de esquema é “essencial para qualquer teoria cognitivista, porque ele articula, dentro dele mesmo, ambos, o comportamento e os aspectos representacionais: regras de ação e invariantes operatórios” (VERGNAUD, 1998, p. 27). Dessa forma, ele toma os esquemas como elementos que estão no cerne da cognição.

Vergnaud (1998) explica que os *invariantes operatórios* fazem parte dos esquemas, os quais podem trazer tanto conhecimentos explícitos quanto implícitos. Quando os conhecimentos presentes nos invariantes estão implícitos,



esses são chamados de teoremas-em-ação e estão relacionados à competência do sujeito. Já quando estão explícitos para o sujeito, estamos falando em concepção. Os primeiros estão relacionados ao que os franceses chamam de *savoir faire*, enquanto os segundos ao *savoir dire*.

Voltando aos esquemas, para Vergnaud a maior parte dos esquemas não são efetivos, mas são eficientes e mais, muitas de nossas atividades cognitivas são regidas por eles.

Em outras palavras, um esquema é universal e eficiente para um conjunto de situações, e ele pode gerar diferentes sequências de ação, informação apreendida ou controlada, dependendo das características específicas de cada situação particular (VERGNAUD, 1998, p. 172, tradução nossa).

Os esquemas se compõem de, pelo menos, quatro elementos, a saber:

1. Objetivos e antecipações;
2. Regras de ação, procura de informação e controle;
3. Invariantes operacionais;
4. Possibilidades de inferência.

Devemos considerar, contudo, que não raro o estudante se depara com situações para as quais ele não tem nenhum esquema disponível. Isto porque o esquema é um conceito com domínio de validade restrito. Nesse caso, o discente lança mão do que a TCC chama de “esquemas circunvizinhos”, isto é, esquemas próximos aos que já usou para lidar com situações parecidas. Dessa forma, esse busca, entre os esquemas já utilizados com sucesso anteriormente, aquele (ou aqueles) que possa ser decomposto e/ou desmembrado para formar um novo esquema.

## **Competência versus concepção**

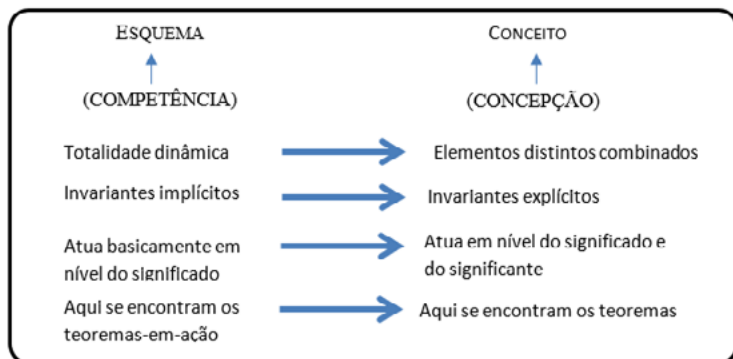
Vergnaud (1988b) considera que *competência e concepção* formam juntas as duas faces de uma mesma moeda. Ele explica que enquanto a competência de um estudante pode ser traçada por meio das suas ações ao resolver situações-problema, a sua concepção costuma ser traçada por meio das expressões simbólicas expressadas por ele. Assim, voltamos ao que já apresentamos anteriormente: saber fazer (*savoir fare*) tem a ver com competência, enquanto

saber dizer (*savoir dire*) à concepção.

Nessa direção, Vergnaud (1988b) esclarece que a *competência* tem estreita relação com o esquema, já que este é formado por algumas organizações invariantes da ação, em um certo conjunto de situações. Já a concepção é analisada em termo de relações, propriedades e objetos. Assim, podemos dizer que a *competência* está relacionada ao esquema, enquanto a *concepção ao conceito*.

Além disso, estabelece um comparativo entre competência e concepção, o qual nós aprimoramos e apresentaremos em forma de quadro, comparando, de partida, os termos esquema e o conceito no âmbito da TCC.

Quadro 1 - Comparação entre os termos esquema e conceito no âmbito da TCC



Fonte: Elaboração das autoras.

Assim, vemos que a TCC oferece valiosos elementos para a análise das ações e das dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos. Ela constitui uma ferramenta poderosa para a construção de diagnóstico dos alunos, a partir da análise das estratégias adotadas por eles diante de situações-problema. Isto porque ela apresenta um quadro coerente para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências simples e complexas, envolvendo diferentes campos conceituais. Embora, Vergnaud tenha um grande conjunto de publicações explorando campos conceituais no âmbito da Matemática, seus pressupostos teóricos podem e devem ser usados para compreender outros campos de conhecimentos.

## Os campos conceituais e a sala de aula de Matemática

Os primeiros campos conceituais delimitados por pesquisas foram os campos aditivo e multiplicativo, nessa ordem. Vergnaud (1997) também apresenta algum delineamento do campo conceitual geométrico e algébrico. Mas, diferentemente dos dois primeiros campos, esses se encontram ainda em construção. Por fim, pesquisadores neo-vergnaudianos vêm pesquisando e buscando avançar em novos campos conceituais. Esse é o caso de Cazorla que, a partir de pesquisa com diferentes colaboradores, (CAZORLA; OLIVEIRA, 2010; CAZORLA *et al.*, 2017; CAZORLA; SANTANA; UTSUMI, 2019) está iniciando a delimitação de um novo campo, qual seja, o das medidas de tendência central.

Entendemos que todos esses cinco campos conceituais referidos acima poderiam ser apresentados e discutidos neste capítulo. No desejo de podermos aprofundar a discussão, optamos por trazer apenas três deles, dois dos quais já bem conhecidos da literatura (os campos das estruturas aditivas e multiplicativas, EA e EM, respectivamente) e o terceiro que ainda está em construção, o campo conceitual das estruturas das medidas de tendências central – EMTC. Contudo, entendemos que os estudos de Cazorla (2010, 2017, 2019, 2021) já nos permite apresentá-lo no âmbito de uma primeira aproximação, o que acreditamos ser uma abordagem inovadora deste capítulo e, portanto, aquela que necessitaremos de mais tempo no espaço para discuti-lo. Importante declarar que todos os três campos serão vistos com o foco na sala de aula. Por fim, elucidamos que não é a nossa pretensão esgotar os campos a serem discutidos aqui, e sim problematizá-los a luz da sala de aula.

### O campo conceitual aditivo e a sala de aula

Este campo conceitual, ou Estruturas Aditivas como também é chamado, foi o primeiro a ser delimitado por Vergnaud (1982, 1988b, 1998). Nele, estão presentes conceitos tais como: adição, contagem, transformação, comparação e composição de quantidades, subtração, sistema de numeração etc. A partir dos resultados de uma pesquisa realizada com 782 crianças entre a 1ª e 4ª série<sup>10</sup>, do Ensino Fundamental, estudantes de escolas públicas da grande São Paulo, Magina *et al.* (2001) fizeram uma releitura desse campo e propuseram uma tabela

---

<sup>10</sup> Na época em que o estudo foi realizado, o Ensino Fundamental dividia-se em oito anos, todos chamados por série. No que tange aos anos iniciais, este era composto por quatro séries.

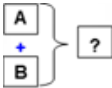
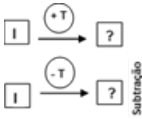
em que são apresentados esquemas de situações-problema, os quais exigem do aprendiz graus de complexidade cognitiva distintos.

Os problemas protótipos são aqueles que as crianças já chegam no 1º ano sabendo resolvê-los, pois já interagiram com esse tipo de situação por muitas vezes, em suas vidas cotidianas, fora da escola. Esses problemas podem envolver dois tipos de situações: as de transformação e as de composição. As situações de composição podem ser, por exemplo, de contar brinquedos (o que nada impede que a criança some os objetos) – veja a coleção de carrinhos de Carlos. Nela, há três carrinhos azuis e dois brancos. Quantos carrinhos Carlos tem? – Em que se sabe as partes e se pergunta pelo todo. Continuando a pensar sobre brinquedos, para ilustrar a situação de transformação prototípica – Carlos tinha três carrinhos e ganhou quatro de seu avô. Quantos carrinhos ele tem agora? – Em que há alguma quantidade no início, ocorre uma transformação de ganho ou de perda, e pergunta-se sobre o estado final dessa quantidade. Na pesquisa acima referida, Magina *et al.* (2001) encontraram um percentual de acerto acima de 80% entre as crianças do 1º ano, dos anos iniciais.

Esses esquemas estão dispostos dentro de extensões e consideram situações de composição, transformação e comparação apresentadas no Quadro 2, a seguir.

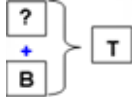
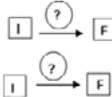

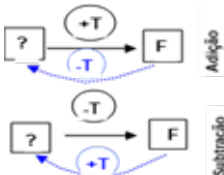


Quadro 2 - Síntese das situações-problema aditivos

(continua)

Protótipo	Situações-Problema de Adição		
	Composição	Transformação	Comparação
	 <p>Composição com todo desconhecido</p>	 <p>Estado final desconhecido</p>	

Quadro 2 - Síntese das situações-problema aditivos

(conclusão)

	Situações-Problema de Adição		
	Composição	Transformação	Comparação
1ª Extensão	 Parte desconhecida	 com $F > I$  com $F < I$  Transformação desconhecida	
2ª Extensão			 Referido desconhecido
3ª Extensão		 Estado inicial desconhecido	 Relação desconhecida
4ª Extensão			 Referente desconhecido

Fonte: Magina *et al.* (2001, p. 51).

Assim, é importante ter em mente que a criança já chega ao Ensino Fundamental com o raciocínio desenvolvido para esses tipos de situações-problema. Portanto, pouco ou nada contribuirá para a expansão das estruturas aditivas dos estudantes insistir nesse tipo de problema, aumentando os seus números ou acrescentando mais parcelas a serem somadas e/ou subtraídas. Na verdade, o que propomos é que o professor avance nas estruturas aditivas,

trazendo situações dentro de outras extensões mais sofisticadas para serem trabalhadas em sala de aula.

Já problemas que envolvem a quarta extensão são bastante complexos e apresentam menos de 80% de acertos entre estudantes do último ano, dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Fazem parte dessa extensão problemas de transformação com o estado inicial desconhecido e problemas de comparação com o referente desconhecido. Apresentaremos, a seguir, dois exemplos desses problemas:

**Exemplo 1:** João gastou R\$ 15,00 no mercado e lhe sobrou R\$ 35,00 na carteira. Quanto João tinha quando entrou no mercado?

**Exemplo 2:** Ana tem um irmão mais velho chamado Carlos. Carlos tem 13 anos e tem 5 anos a mais que Ana. Quantos anos tem Ana?

Os resultados das pesquisas indicam que problema do tipo exposto no Exemplo 2 apresenta-se ainda mais difícil para os estudantes. Magina e Campos (2004) realizaram um estudo diagnóstico com 248 crianças cursando os anos iniciais do Ensino Fundamental, em escolas públicas da cidade de São Paulo. Nesse estudo, elas encontraram que o percentual de acerto de estudantes da 4ª série em problemas similares ao Exemplo 2 ficava em torno de 70%.

Defendemos que situações aditivas podem avançar, em termos de complexidade, para além das extensões que se apresentam no Quadro 2. É possível, por exemplo, trazer problemas que envolvam mais de uma extensão. Apresentaremos, a seguir, dois exemplos que exploram situações mais complexas do que as apresentadas nas extensões. Contudo, em nenhuma delas os números dos problemas são de grande magnitude, isto é, eles estão na casa da unidade ou da dezena. O motivo para isso é que queremos garantir que o estudante dos anos iniciais conheça os números presentes nos problemas e, ainda, que seus valores não sejam um obstáculo para a resolução deles.

**Exemplo 3:** Ana, Bia e Ivo jogaram um torneio de figurinhas hoje. No primeiro jogo, Ana jogou com Bia e ganhou cinco figurinhas; no segundo, Bia jogou com Ivo e ganhou duas figurinhas e, no terceiro jogo do torneio, Ivo jogou com Ana e ganhou quatro figurinhas. Quem ganhou mais figurinhas no torneio?

Trata-se de uma situação que envolve composição de transformação. Há muitos caminhos para resolver a situação proposta. Iremos apresentar um dos

esquemas possíveis de solução.

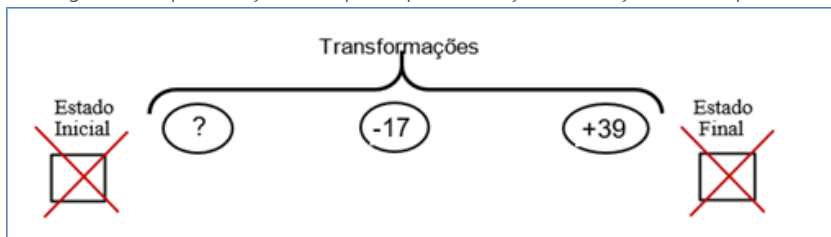
	Ana	Bia	Ivo	
1º jogo	+5	(-5)		
2º jogo		+2	(-2)	
3º jogo	(-4)		+4	
Total	+ 1	-3	+2	Resposta: Ivo ganhou.

Notemos que é preciso computar o ganho, mas também a perda de cada um dos jogadores, isto é, se um ganhou figurinha, o seu oponente, necessariamente, perdeu. Depois de registrar todos os ganhos e perdas (as transformações), então fazemos a composição das duas partes.

Exemplo 4: Mayra jogou figurinha duas vezes hoje. No primeiro jogo, ela não lembra o que aconteceu, mas sabe que, no segundo jogo, perdeu 17 figurinhas. Quando chegou em casa Mayra constatou que hoje ela ganhou 39 figurinhas. O que ocorreu no primeiro jogo?

O esquema, a seguir, oferece uma possibilidade de estratégia de resolução do problema, deixando claro que os estados iniciais e finais não são importantes para a sua resolução.

Figura 4 - Representação de esquema para resolução da situação do Exemplo 4



Fonte: Elaboração das autoras.

Note que para a resolução do problema não é necessário saber quantas figurinhas Mayra tinha antes dos jogos (estado inicial) ou com quantas figurinhas ela ficou depois dos dois jogos (estado final). O que o problema quer saber é sobre as transformações (ganhos e perdas) que as figurinhas de Mayra sofreram

nos jogos. E, de fato, Mayra deve ter ganhado muito no primeiro jogo para poder ter perdido 17 figurinhas no segundo jogo e ainda ter saído com um ganho de 39 figurinhas hoje. Então, ela certamente ganhou no primeiro jogo as 17 figurinhas (que foi o que perdeu no segundo jogo) mais as 39 figurinhas (que foi o ganho total no dia de hoje). Mayra ganhou hoje 56 figurinhas no primeiro jogo.

Em conversa pessoal com Vergnaud, em uma de suas visitas acadêmicas à PUC/SP, no final dos anos 90, do século passado, ele nos disse que pesquisa realizada na França, nos anos 80, apontou que 25% dos estudantes franceses do 8º ano tiveram dificuldades em resolver esse tipo de problemas. Acreditamos que a dificuldade não reside na operação a ser feita, qual seja,  $17 + 39$ , pois se trata de uma operação de adição com números pequenos (na ordem das dezenas). Ao nosso ver (e de Vergnaud também), a dificuldade do problema reside em não se saber (e nem ter importância para a resolução do problema) o quanto Mayra tinha antes e o quanto ficou depois. Assim, é posta uma situação inusitada para o aprendiz, a qual exige que ele busque uma nova perspectiva para resolvê-la.

Muito mais se pode discutir sobre as estruturas aditivas, mas sabemos que muito também já foi tratado sobre esse campo conceitual. Assim, encerramos esta seção defendendo que o importante no trabalho pedagógico dessas estruturas é o professor se colocar no papel de mediador desse processo de apropriação e expansão das estruturas aditivas por seus estudantes. Para tanto, é preciso que situações-problema pertencentes a essas estruturas possam perpassar por todo o Ensino Fundamental. Afinal, Vergnaud (1982, 1996, 1998) deixa claro, em muitos de seus escritos, que um campo conceitual leva anos para ser apropriado pelo aprendiz.

## **O campo conceitual multiplicativo e a sala de aula**

Problematizar sobre o campo conceitual multiplicativo ou Estrutura Multiplicativa, como ficou conhecido esse termo nas publicações iniciais de Vergnaud (1983), resgatamos, a acepção psicológica, presente nessa teoria que abarca, simultaneamente, o desenvolvimento e o funcionamento cognitivos. Trata-se de uma estruturação complexa, dinâmica, envolvendo diferentes esquemas no âmbito do funcionamento cognitivo (que vão dos gestos aos conceitos, sendo essa última, uma explicitação simbólica compartilhável) que estão presentes quando o indivíduo resolve problemas, aprende e se desenvolve (LAUTERT; SCHLIEMANN, 2020).



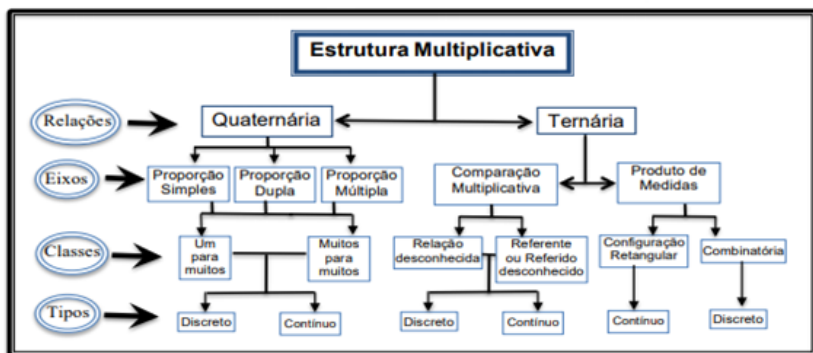
Nesse sentido, a TCC preconiza que os processos cognitivos mobilizados pelos indivíduos estão, intrinsecamente, imbricados com as situações/representações e invariantes operatórios nas quais os indivíduos são confrontados para resolver determinadas situações-problema. Diferentemente do campo aditivo, que pode ser analisado com base na adição e na subtração, o campo conceitual multiplicativo envolve todo o conjunto de situações que requer o uso das operações de multiplicação e/ou divisão, incluindo nesse campo situações que envolvem os conceitos de frações, proporções, números racionais dentre outros (VERGNAUD, 1983, 1988, 1994).

Para diversos pesquisadores (GITIRANA; CAMPOS; MAGINA; SPINILLO, 2014; NUNES; BRYANT, 1997), os conceitos de natureza multiplicativa requerem uma mudança substancial no pensamento dos indivíduos, não podendo ser tratados unicamente com a ideia de adição repetidas. Isso porque, como afirmam Lautert e Schliemann (2020, p. 2), “a compreensão de conceitos e procedimentos envolvendo as estruturas multiplicativas requer a atenção à forma como as grandezas medidas estão interrelacionadas”.

Tanto pesquisadores como educadores que se propõem a compreender o raciocínio mobilizado pelos indivíduos para resolver situações-problema envolvendo o campo multiplicativo são unânimes em afirmar que não basta dominar o cálculo numérico relacionado às operações de multiplicação e de divisão. É preciso que os estudantes durante todo o ensino básico na sala de aula sejam expostos as diferentes situações-problema que envolvam o campo conceitual multiplicativo de forma a propiciar a ampliação conceitual, permitindo, assim, que eles superem as dificuldades que enfrentam ao lidar com esse campo (BORBA; LAUTERT; SILVA, 2021; GITIRANA *et al.*, 2014; MAGINA; LAUTERT; SANTOS, 2020a; MAGINA; SPINILLO; LAUTERT, 2020b; SANTOS; ARAÚJO-GOMES; GOMES, 2021).

Na Figura 5, apresenta-se o esquema construído por Magina, Merlini e Santos (2016) para ilustrar a diversidade de situações multiplicativas propostas por Vergnaud, em diferentes publicações (1983; 1988; 1994; 1998). Magina, Spinillo e Lautert (2020b, p. 81) consideram que tal esquema envolve uma “releitura da classificação dos problemas multiplicativos originalmente proposta por Vergnaud”.

Figura 5 - Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69).

O esquema proposto por Magina, Merlini e Santos (2016) agrupa as situações-problema considerando as duas relações presentes no campo conceitual multiplicativo: (a) as relações quaternárias, também denominada de isomorfismo de medidas, que se caracterizam por relações estabelecidas entre quatro quantidades de duas grandezas distintas, consideradas duas a duas, sendo observados três eixos: proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla e; (b) as relações ternárias que se caracterizam pela relação entre três quantidades, sendo uma delas o produto das outras duas, tanto no plano numérico como dimensional, sendo observados dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas. Na sequência, serão apresentados exemplos de situações multiplicativas propostas em diferentes estudos, que ilustram a diversidade de problemas a serem explorados na sala de aula de forma a garantir a ampliação do campo conceitual, por parte dos aprendizes.

A proporção simples envolve uma relação proporcional entre duas grandezas distintas, por exemplo:

**Exemplo:** Joana sabe que em um pacote há seis biscoitos. Ela tem cinco pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

Essa situação apresenta duas grandezas (quantidade de pacotes e a quantidade de biscoitos, sendo considerada uma situação que envolve a classe um para muitos. Nesse problema, a relação entre as quantidades está explícita, ou seja, um pacote está associado a seis biscoitos, devendo o estudante encontrar

a quantidade total de biscoitos presentes em cinco pacotes. Estudos evidenciam que problemas desse tipo são os mais simples para estudantes, desde o 1º até o 9º ano (GITIRANA *et al.*, 2014; LAUTERT; SANTOS, 2017; SANTANA *et al.*, 2016; MAGINA MERLINI, SANTOS. 2016, MAGINA *et al.*, 2020a,) As crianças dos anos iniciais (1º e 2º anos) tendiam a fazer uso de desenhos (pictográficos ou icônicos), enquanto as crianças do 3º ano adotavam representações simbólicas (números e operações) acompanhadas ou não de representações pictográficas ou simbólicas, como ilustrado nas Figuras 6 e 7 (para a resolução do problema Joana). Já os estudantes dos demais anos escolares faziam o uso da operação de multiplicação.

Figura 6 - Resolução adotada por criança do 1º ano



Fonte: Lautert e Santos (2017, p. 54).

Figura 7 - Resolução adotada por criança do 3º ano



Fonte: Lautert e Santos (2017, p. 57).

Magina *et al.* (2020a, 2020b) chamam atenção sobre o fato de que as situações envolvendo raciocínio proporcional (proporção simples, dupla e múltipla) precisam ser exploradas pelos professores no contexto da sala de aula. Em geral, os estudos apontam que as situações-problema de proporção simples, especialmente as que envolvem a classe um para muitos tendem a ser mais evidenciadas na sala de aula do que as classes muito para muitos. Estudos realizados por Spinillo *et al.* (2017), Souza e Magina (2017), Agranionih, Spinillo e Lautert (2021) solicitaram que professores (dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental) elaborassem problemas multiplicativos. Os resultados mostraram que houve uma tendência dos docentes em formular problemas de proporção simples, um para muitos. Esses estudos também apontaram que houve pouca variabilidade nas situações-problema formuladas. Spinillo *et al.* (2017, p. 942) explicam que a dificuldade dos professores reside em “elaborar problemas que envolvam diferentes relações para um mesmo conceito”.

Magina *et al.* (2020a, p. 7) pontuam, ainda, que na classe muito para muitos “a relação entre o valor da unidade de uma das grandezas em relação à outra grandeza não é explícita”, embora seja possível calcular o valor em algumas situações e em outras o cálculo não faz o menor sentido para responder ao que está sendo solicitado. Vejamos os exemplos apresentados pelos autores.

Quadro 3 - Situações-problema classe muito para muitos

Situação 1: Na barraca do Sr. Manoel, eu compro duas tapiocas com 10 reais. Para comprar seis tapiocas, quanto gastarei?

Situação 2: A barraca do Sr. Manoel está com uma promoção: A cada quatro tapiocas compradas, o freguês ganha dois copos de suco de brinde. Paula e suas amigas compraram 12 tapiocas, quantos copos de suco elas ganharam de brinde?

Fonte: Magina *et al.* (2020a, p. 7).

Como pode ser observado em nem uma das duas situações o valor da unidade (preço da tapioca) está explícito no enunciado, entretanto, em ambas as situações é possível encontrar o valor da tapioca. Entretanto, como afirma Magina *et al.* (2020a, p. 7) “não faz o menor sentido encontrar a relação de ‘um para muitos’, porque a condição do problema informa que a pessoa só ganhará os dois copos de suco, se, e somente se, comprar quatro tapiocas”. Tais problemas precisam ser discutidos no contexto escolar para que os estudantes possam se apropriar da diversidade de situações que envolvem o campo multiplicativo.

Nas discussões anteriores nos pautamos nas situações-problema que caracterizavam por ter uma relação constante entre duas variáveis. Entretanto, as relações quaternárias também precisam ser exploradas na sala de aula, no que diz respeito à proporção dupla, em que duas ou mais relações proporcionais independentes estão ligadas por uma variável comum e a proporção múltipla, onde duas proporções simples estão interligadas, ou seja, existe uma concatenação de várias proporções, como ilustrado no Quadro 4.

#### Quadro 4 - Exemplos de situações-problema de proporção dupla e múltipla

- Um grupo de seis estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em cinco dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?
- Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar dois ovos. Para cada ovo, utiliza-se três xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com três copos de leite?

Fonte: Lautert e Schliemann (2020, p. 8).

Na situação-problema em que os estudantes arrecadam alimentos, (proporção dupla), a quantidade de alimentos arrecadados é proporcional à quantidade de estudantes e a quantidade de dias de arrecadação. No entanto, a quantidade (estudantes e dias) não mantém entre si uma relação de dependência, mas ambos (estudantes e dias) têm relação com a quantidade a ser arrecadada. Em outras palavras, caso aumente o número de estudantes e/ou o número de dias, aumentará proporcionalmente a quantidade arrecada de alimentos.

Na situação-problema em que Marina prepara o bolo (proporção múltipla), a quantidade de copos de leite, ovos e farinha de trigo, mantém entre si relações de dependência, de forma que qualquer alteração em uma das três quantidades, mesmo mantendo-se constantes as taxas de proporcionalidade, produzirá mudança na resolução da situação.

Diferentes estudos têm tecido considerações sobre o grau de dificuldade dessas situações-problema. Levain (1992), por exemplo, identificou que o problema multiplicativo mais difícil para estudantes franceses, correspondente ao 5º ano do Ensino Fundamental, no Brasil, foi o de proporção dupla; enquanto no estudo de Gitirana *et al.* (2014) com estudantes brasileiros (2º ao 9º ano) o problema mais difícil foi de proporção múltipla. A falta de consenso entre os estudos pode residir em muitos fatores, como, por exemplo, a diferença nos currículos entre os países (França e Brasil) e/ou a ênfase nos tipos de problemas multiplicativos trabalhados na escola, de um e outro país, na diferença do nível de escolarização dos estudantes, dos dois estudos (um centrou-se no 5º ano, e o outro em todo o Ensino Fundamental). Questões de ordem social também podem ter interferido nos desempenhos desses dois grupos de estudantes. O que podemos certamente afirmar é a necessidade de se realizar mais investigações que explorem as relações proporcionais dupla e múltipla.

Na relação ternária, como mencionado, são observados dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas. A comparação multiplicativa pode se apresentar na situação-problema de três maneiras, envolvendo uma relação desconhecida, um referido desconhecido ou um referente desconhecido (ver exemplos apresentados no Quadro 5).

Quadro 5 - Exemplos de situações-problema de comparação multiplicativa

João tem 15 figurinhas e Ana tem 60. Quem tem mais figurinhas? Quantas vezes mais? (relação desconhecida)

João tem 15 figurinhas e Ana tem três vezes mais figurinhas que ele. Quantas figurinhas Ana tem? (referido desconhecido)

João e Ana têm figurinhas. Ana tem 45 figurinhas e essa quantidade é três vezes mais que a quantidade de figurinhas de João. Quantas figurinhas tem João? (referente desconhecido)

Fonte: Magina, Spinillo e Lautert (2020, p. 82).

O eixo de produto de medidas envolve duas classes, a configuração retangular e a combinatória. Nas situações-problema de configuração retangular, estamos pensando no conceito de área em que a multiplicação de duas medidas gera um produto multiplicativo delas derivado, como mostra o exemplo presente no Quadro 6.

Quadro 6 - Exemplo de situação-problema envolvendo configuração retangular

Vitória quer colocar papel de parede em uma das paredes em seu quarto. Esta parede tem três metros de largura e cinco metros de comprimento. Quantos metros quadrados de papel de parede Vitória precisa comprar?

Fonte: Santos, Araújo-Gomes e Gomes (2021, p. 274).

Já no que se refere à combinatória, Vergnaud (1983, 1991) tende a relacionar as situações-problema ao produto cartesiano. Assim, se desejamos ampliar a compreensão conceitual sobre o raciocínio combinatório da criança, devemos explorar problemas envolvendo situações para além do produto cartesiano, tais como: arranjo, combinação e permutação (BORBA, 2010).

Borba (2010, p. 3) resumidamente explica que, as situações envolvendo o produto cartesiano, são aquelas que apresentam dois conjuntos disjuntos, combinados dois a dois, resultando em um novo conjunto. Nesse caso, deve-se encontrar a quantidade de conjuntos possíveis sem que exista repetições. Já nas

situações de *arranjos*, parte-se de um conjunto maior em que são “escolhidos elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas”. As situações de *combinações* se “assemelham aos arranjos em termos de escolha de elementos, com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas”. Por fim, nas situações relativas a *permutações*, “todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia”. Borba, Lautert e Silva (2021) defendem que as discussões sobre situações-problema envolvendo raciocínio combinatório podem ser explorados desde a Educação Infantil, a partir do produto cartesiano. E propõem que esse conceito vá sendo aprofundado à medida que os estudantes avancem na escolarização, introduzindo as demais situações. O Quadro 7 apresenta quatro situações-problema que envolvem as quatro situações aqui pontuadas.

Quadro 7 - Exemplos de situações-problema envolvendo combinatória

Em uma corrida temos três carros (amarelo, vermelho e azul). Nessa corrida só podem ganhar dois carros por vez, o campeão e o vice-campeão. De quais maneiras diferentes os carros podem ocupar o lugar de campeão e de vice-campeão na corrida? (Arranjo)

Cinco crianças (Vivi, Caio, Duda, Bete e Samuel) vão brincar no pula-pula. Duas crianças podem brincar de cada vez. De quais maneiras diferentes as crianças podem brincar no pula-pula? (Combinação)

Laura está organizando espaços de dormir para três animais na fazenda de sua tia (um pato, uma galinha e uma ovelha). Esses espaços ficarão um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes animais podem ser organizados? (Permutação)

Carol precisa se arrumar para ir à festa, mas não sabe que roupa usar. Ela tem quatro blusas (lilás, vermelha, amarela e branca) e duas calças (rosa e verde). De quais maneiras diferentes ela pode se vestir para ir à festa? (Produto cartesiano)

Fonte: Borba, Lautert e Silva (2021, p.151).

Ao longo desse tópico chamamos atenção para a diversidade de situações que envolvem o campo conceitual multiplicativo e precisam ser exploradas na sala de aula. Defende-mos que a melhor maneira de explorá-las é por meio de atividades planejadas que contemplem as diferentes relações, eixos e classes. Defendemos, por fim, que o professor possibilite que os estudantes utilizem formas diversificadas de registros para representar as situações propostas.

## O campo conceitual das medidas de tendência central e a sala de aula

Iniciaremos esta seção delimitando o campo conceitual das medidas de tendência central, ou simplesmente as EMTC. Estão no cerne desse campo três conceitos fundamentais, a saber: moda, mediana e média aritmética (simples e ponderada). Mas outros conceitos, tanto matemáticos (ordenação, contagem, multiplicação, divisão e adição), como estatísticos (dados – brutos e agrupados – gráficos – em suas diversas representações – variável – quantitativa e qualitativa – tabela – de uma e de duas entradas – ponto de máximo, de mínimo), também fazem parte desse campo conceitual.

Assim, antes de avançarmos com a discussão desse campo conceitual por meio dos estudos, vamos conceituar cada um dos conceitos estatísticos. Para tanto, iremos recorrer às obras de Cazorla *et al.* (2017, 2020, 2021), para nos ajudar a explicar esses conceitos de maneira simples e com a profundidade que precisamos para este capítulo.

A moda “se refere à categoria da variável qualitativa ou ao valor da variável quantitativa que se repete com mais frequência” (CAZORLA *et al.*, 2017). Dos três conceitos fundamentais da EMTC, este é o mais simples, pois se trata de uma medida intuitiva. De forma breve, podemos dizer que a moda é o valor que mais aparece numa determinada amostra. Esse conceito, de fato, se assemelha ao termo “moda” usado pelas pessoas quando querem se referir que um determinado padrão (de modelo, de cor, de vestuário etc.) tem sido bastante usado pela sociedade. Por exemplo: “carro vermelho está na moda”, ou “está na moda usar calças jeans com rasgões na altura dos joelhos”. Para encontrar a moda em uma amostra basta agrupar as categorias ou os valores pontuais e identificar, por meio de contagem, o valor que mais se repete. Portanto, trata-se de um conceito simples, que pode ser trabalhado com crianças cursando os anos iniciais do Ensino Fundamental, se não já na Educação Infantil.

A mediana é aquela medida usada para dividir um conjunto de dados em duas partes iguais. Cazorla e Oliveira (2010, p. 132) explicam que essa medida pode ser interpretada também de maneira bastante intuitiva. Isto porque se considerarmos um conjunto de dados ordenados a mediana será aquele valor que está relacionando ao dado que se encontra na posição central. Se o conjunto de dados for composto por uma quantidade ímpar de dados, a mediana será identificada sem precisar fazer qualquer cálculo, apenas ter os dados ordenados



e identificar aquele dado que ocupa a posição central desta ordenação, tendo o mesmo número de dados abaixo e acima dele. Já se o conjunto de dados tiver uma quantidade par de elementos, será necessário fazer uma operação na busca de encontrar o ponto médio entre os dois dados que se encontram na posição central desse conjunto. Note que aqui será preciso usar a adição e, ainda, a divisão.

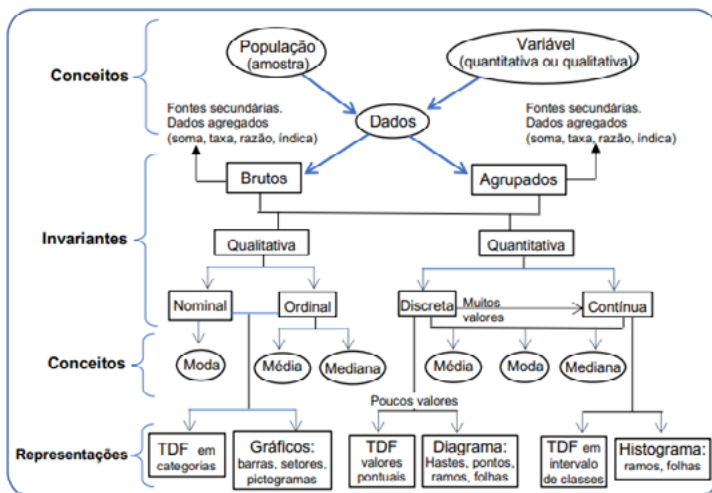
A média aritmética, ou simplesmente média, “é um valor que representa, de forma resumida, os valores da variável  $x$ , levando em consideração todos os elementos da amostra. É definida como a soma de todos os valores da variável ( $\sum x_i$ ) dividida pelo tamanho da amostra” (CAZORLA; OLIVEIRA, 2010, p. 130). É comum as pessoas lidarem com esse conceito em situações corriqueiras de suas vidas, de maneira implícita. Elas costumam fazer, por exemplo, estimativas do tempo médio que gastam na fila do banco ou no deslocamento da residência para a escola ou trabalho. Elas fazem tais estimativas considerando o tempo gasto nas várias idas a esses lugares. Cazorla *et al.* (2017, p. 67) explicam que a média “é uma razão entre duas variáveis”, em que “o numerador temos a soma dos valores da variável em estudo e no denominador o número de parcelas que compõem essa soma”.

Com esta base, a seguir, apresentaremos a nossa primeira aproximação do campo conceitual das MTC, o que faremos de forma restrita aos conteúdos que devem ser ensinados na Educação Básica, em especial, aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

## **O campo conceitual das medidas de tendência central**

As MTC a serem trabalhadas neste artigo são a moda, a mediana e a média as situações que geram sua utilização dependem da natureza das variáveis, de como elas foram operacionalizadas, isto é, dependem da natureza dos dados e de como esses estão disponíveis para seu cálculo.

Figura 8 - Primeira aproximação do campo conceitual das MTC



Fonte: Elaboração das autoras.

Observamos que enquanto as variáveis qualitativas (ou categóricas) podem ser classificadas em nominal (quando as categorias não têm nenhuma ordenação) e ordinal (quando as categorias têm ordenação), as variáveis quantitativas (ou numéricas), classificadas em discretas (resultado de contagem, tomando apenas valores inteiros) ou contínuas (resultado de mensuração tomando qualquer valor real em um intervalo definido). Salientamos ainda que as variáveis podem ser ainda empíricas (que têm referente no mundo real) ou conceituais (que não têm referente no mundo palpável) e precisam de arcabouços teóricos e instrumentos específicos para sua realização, como pode ser visto em Cazorla, Utsumi e Monteiro (2021).

Lembramos que a respeito da natureza da variável, essa pode ser obtida de diversas formas. Por exemplo, a variável idade, que é contínua, pode ser coletada como contínua (data de nascimento) ou como discreta (anos completos). E pode ainda ser coletada por faixas quinquenais de idade, como faz o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para construir as pirâmides de grupos etários (criança, adolescente, adulto e idoso), ou mesmo como uma dicotômica nominal (adulto, não adulto).

Por fim, depende de como os dados estão apresentados, se no seu formato original (dados brutos) ou se esses já sofreram algum tratamento, sendo apresentados de forma agregada (como o valor bruto da produção ou capacidade máxima de um elevador) ou agrupada segundo algum critério, como nas tabelas de distribuição de frequência, por exemplo. A fonte dos dados tem a ver com quem os coletou. Será uma fonte primária se tiver sido o professor, juntamente com os alunos, a fazer a coleta dos dados; já quando os dados foram coletados por outrem e, em geral, esses já sofreram algum tratamento estatístico, então temos uma fonte de dados secundária.

Observamos que as MTC são medidas prioritariamente das variáveis quantitativas ou numéricas. Já as variáveis qualitativas possuem apenas a moda, que é a categoria mais frequente e alguns autores afirmam que a mediana existe para variáveis ordinais, que discutiremos mais adiante quando estivermos detalhando essa MTC.

Mas antes de detalharmos cada uma das MTC (moda, mediana e média), precisamos padronizar a nomenclatura que utilizaremos para situarmos este campo conceitual e alguns pressupostos assumidos. Iniciamos informando que utilizaremos o termo *variável* como sinônimo de *dado*, isto é, quando falarmos, por exemplo, em *variável qualitativa* é porque o dado gerado está em categorias, independentemente da natureza da variável. Também frisaremos o termo genérico *frequência* ( $f_i$ ) para nos referirmos ao número de ocorrências da variável, que, algumas vezes, poderá ser quantidade de estudantes, sementes, pessoas etc.

Quadro 8 - Nomenclaturas adotadas

X: nome genérico da variável em estudo;  
 $x_i$ : designa o  $i$ -ésimo valor da variável;  
 $n$ : tamanho da amostra, quantidade de dados;  
 $f_i$ : frequência absoluta, número de ocorrências da variável na  $i$ -ésima categoria ou  $i$ -ésimo valor;  
 $M$ : Média;  
 $M_o$ : Moda;  
 $M_d$ : Mediana;  
 $X_{\min}$ : valor mínimo;  
 $X_{\max}$ : valor máximo;  
 $k$ : número de classes, ou de valores da variável discreta ou pontuais.

Fonte: Elaboração das autoras.

## Sobre as representações das EMTC

Observamos que a média e a mediana só tomam um único valor dentro de um conjunto de dados, já a moda pode ter dois ou mais valores e até mesmo não existir. Chamamos atenção desse fato, pois a representação de um número só pode ser verbal, numérica ou gráfica. No caso da representação gráfica, para representar a média pode ser utilizada um triângulo (fio da balança) tocando a reta numérica onde está assentado o gráfico, ou uma linha reta quando os dados estão apresentados em gráficos de barras ou linhas. Em alguns casos, tem-se utilizado ícones para representar a média, como o número médio de filhos por mulher, por exemplo (CAZORLA; SANTANA; UTSUMI, 2019).

O que temos como representações é o formato como os dados são apresentados, que podem ser brutos (em listas, planilhas, banco de dados), em tabelas estatísticas ou TDF e em gráficos, desde que esses disponibilizem os dados para seu cálculo. Em geral, os gráficos de setores, barras/colunas, linhas, diagrama de pontos, ramos e folhas e histograma. Já gráficos como o da caixa (box-plot), por exemplo, não permitem o acesso aos dados brutos.

Feitas essas considerações iniciais, discutiremos, a seguir, cada um dos conceitos centrais do campo conceitual das Medidas de Tendências Central (MTC), a começar pela moda.

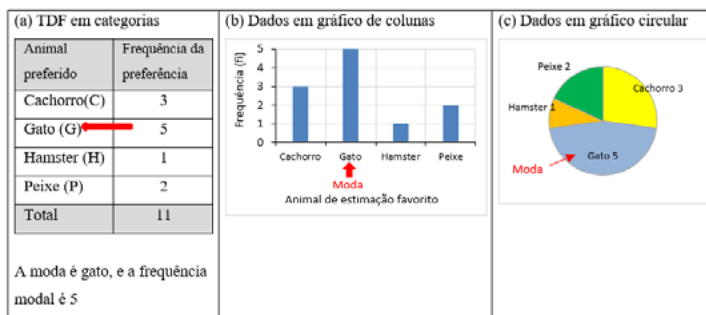
### Moda (Mo)

A moda é a única MTC que existe para todas as variáveis, é aquela que mais ocorre sendo denominada de frequência modal. No caso de uma variável qualitativa, a moda é a categoria que ocorre com maior frequência; no caso de uma variável discreta com valores pontuais, a moda é o valor que mais aparece no conjunto de dados. Se a variável estiver em intervalos de classe (discreta que toma muitos valores ou contínua), a moda é “dada pela densidade de frequência máxima” (ANDRADE, 2013, p. 127). Em todos os casos, procuramos o valor com a maior frequência (altura se estiver no formato gráfico).

Se os dados estão em sua forma bruta, será necessário organizá-los em categorias, valores ou intervalos de classe. A seguir, exemplificaremos duas situações, uma envolvendo uma variável qualitativa (Figura 9) e a outra quantitativa (Figura 10).

**Situação 1:** A professora do 3º ano fez uma pesquisa em sua sala de aula para conhecer a preferência de seus alunos quanto ao animal de estimação. Nesse dia só havia 11 alunos em classe e organizou os dados em uma tabela de frequência (TDF) de uma entrada (Figura 9a), em gráfico de colunas (Figura 9b) e em gráfico circular (Figura 9c). Qual é a moda?

Figura 9 - Representações de dados qualitativos nominais (categorias) e a moda

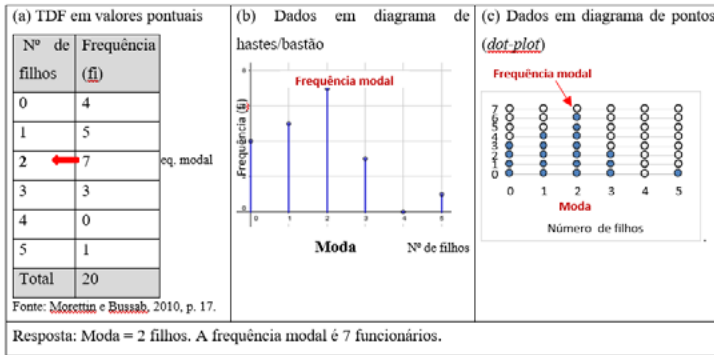


Fonte: Elaboração das autoras, a partir de dados fictícios.

A moda nesta pequena amostra é a categoria “Gato”, pois cinco crianças das 11 escolheram esse animal (frequência modal). Note que cinco não é a maioria absoluta de 11, mas é a mais escolhida entre as quatro categorias. Trata-se de dados advindos de variáveis qualitativas, já que os dados são categorias, não havendo entre eles uma hierarquia ou ordem, sendo que os animais foram ordenados alfabeticamente. Note que é possível apresentar essa amostra por meio de três representações distintas (TDF, gráfico de coluna e gráfico de setores).

**Situação 2:** Foi feita uma pesquisa em uma fábrica para saber o número de filhos que os funcionários tinham. O resultado dessa pesquisa está apresentado na TDF constante, na Figura 10a, em diagrama de hastes/bastão (Figura 10b) e em diagrama de pontos (dotplot) (Figura 10c). Qual é a moda do número de filhos dos funcionários dessa fábrica?

Figura 10 - Representações de valores pontuais e a moda



Fonte: Elaboração das autoras.

Notemos que a maior frequência de funcionários (7) é de dois filhos, portanto, a moda é dois filhos. Aqui, representamos a situação por meio do diagrama de hastes/bastão (Figura 10b) e com o diagrama de pontos ou dotplot (Figura 10c), próprias para representar variáveis discretas, mas que não foram elencadas pela BNCC. O usual é representar esses dados em gráfico de colunas.

Uma das principais dificuldades na compreensão da moda reside na confusão realizada pelos estudantes entre o valor da moda e a frequência modal. Isto decorre pela falta de ênfase que deve ser dada ao reconhecimento dos valores da variável, isto é, as categorias e os valores que tomam, e as MTC têm as mesmas unidades da variável. Por exemplo, se a variável é o animal preferido (Situação 1), a moda será um animal e não a quantidade de crianças que escolheram esse animal. Da mesma forma, se a variável é o número de filhos, a moda será o número de filhos e não o número de empregados. Esta é uma propriedade das MTC que será elencada no final do capítulo

Como já dissemos, a moda é a única medida que pode assumir mais de um valor ou pode não existir. Por exemplo, na Situação 1, se as duas crianças que escolheram peixe tivessem escolhido cachorro. Nesse caso, o cachorro empataria com o gato e teríamos duas modas.

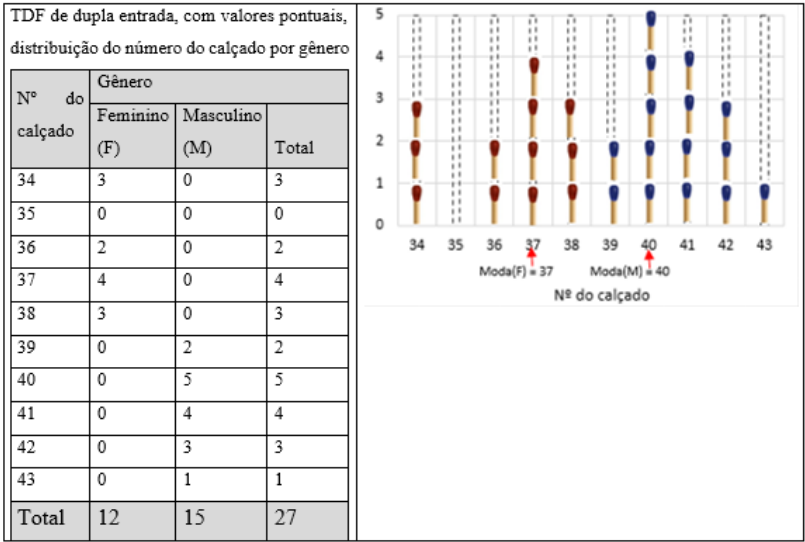
Outro aspecto que deve ser levado em consideração é a compreensão do significado da moda. Para isso, não basta relatar as categorias ou valores que se repetem com maior frequência e concluir que se trata de uma distribuição bimodal ou multimodal. Em geral, a presença de mais de uma moda ocorre pela

existência de uma outra variável que modifica o comportamento da variável em estudo. Por exemplo, se na Situação 1 examinássemos o animal preferido por gênero, pode ser que as meninas preferissem gato, e os meninos, o cachorro.

Deixe-nos oferecer um último exemplo, agora envolvendo uma situação bimodal (com duas modas).

**Situação 3:** foi realizada uma pesquisa no 3º ano do Ensino Médio para saber qual era o número de calçado mais comum entre os alunos e alunas da classe. A Figura 11 apresenta os resultados representados em uma TDF de dupla entrada, juntamente com um gráfico pictórico.

Figura 11 - Exemplo de uma variável com distribuição bimodal



Fonte: Elaboração das autoras.

Neste exemplo, podemos verificar a existência clara de dois grupos distintos, e a moda se constitui na melhor MTC para descrever este tipo de variável, sendo que a média e a mediana não fazem sentido. Por fim, observem que o tipo de gráfico utilizado (hastes/bastão) não tenha sido elencado na BNCC, aqui, podemos ver seu potencial no ensino de variáveis discretas com valores pontuais.

## Mediana (Md)

A mediana divide a quantidade de dados ( $n$ ) em duas partes iguais, sendo que a metade dos dados toma valores menores ou iguais a ela e a outra metade, valores maiores ou iguais. Para isso, os dados devem ser ordenados (crescente/decrecente) e procurar sua localização. É fato que seu cálculo depende de como os dados estão apresentados. Aqui, apresentaremos as situações para as variáveis quantitativas.

Se os dados estão na sua forma bruta, será preciso ordená-los. Eles também podem estar num diagrama de pontos (pictórico ou não) como na Figura 11. Neste caso, basta examinar se o número de dados é ímpar ou par. É desejável colocar a posição de cada valor da variável, pois isso ajuda na localização da posição central.

a) Se  $n$  for ímpar, então a posição central será  $(n + 1) / 2$ , e a mediana tomará o valor que ocupa essa posição:  $Md = X((n+1) / 2)$ ;

b) Se  $n$  for par, então a posição central estará entre as posições  $(n/2)$  e o subsequente  $(n/2)+1$ , e a mediana será a média desses dois valores:  $Md = (X(n/2) + X(n/2) + 1) / 2$ .

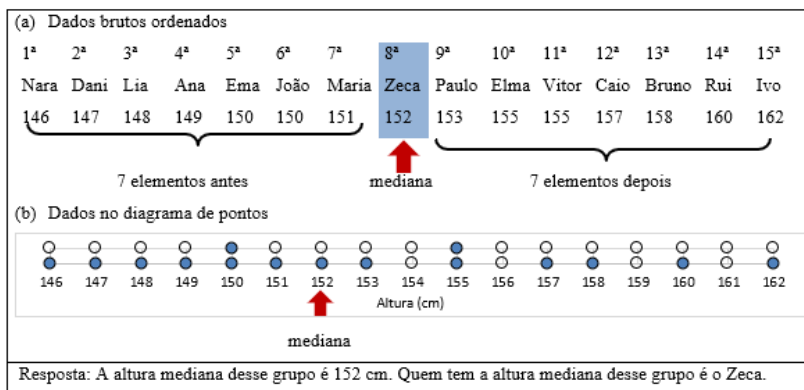
Vejam as duas situações, nas quais apresentaremos um conjunto de dados ímpar (Situação 4) e um conjunto de dados par (Situação 5). A primeira situação refere-se a um conjunto de dados ordinais, nomeadamente as alturas de 15 alunos registradas em centímetros.

**Situação 4:** Na classe do 6º ano, foram medidas as alturas (em centímetros) de 15 estudantes, e os resultados foram: Ana = 149, Nara = 146, Caio = 157, Zeca = 152, Ema = 150, Ivo = 162, Lia = 148, João = 150, Elma = 155, Paulo = 153, Vitor = 155, Maria = 151, Bruno = 158, Dani = 147, Rui = 160. Qual a altura mediana desta amostra?

Para resolver essa situação, devemos inicialmente ordenar os dados, que podem ser de forma crescente ou decrescente, a seguir, examinaremos o tamanho da amostra. Como temos 15 dados ( $n$  ímpar), a posição que a mediana ocupa é a 8ª ( $(n + 1)/2 = 16/2$ ), como podemos acompanhar na Figura 12a.



Figura 12 - Exemplo do cálculo da mediana para o número de dados ímpar



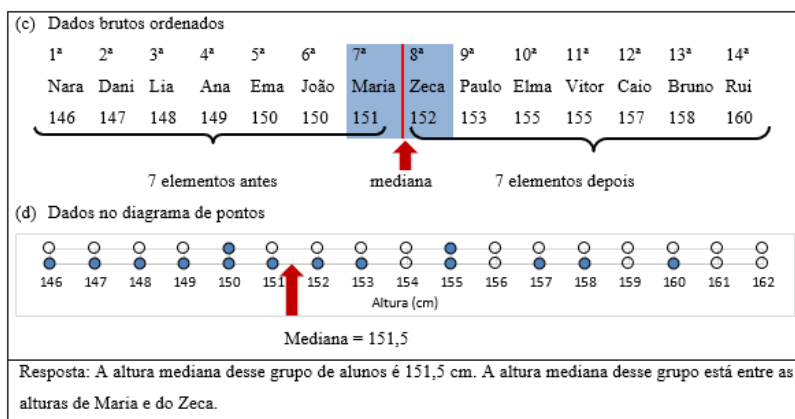
Fonte: Elaboração das autoras.

Quando ensinamos a mediana é importante destacar tanto a posição como os dados na escala numérica, uma vez que quando esses estão ordenados, um ao lado do outro, pode dar a falsa percepção de que a distância entre eles é a mesma (um centímetro), e isso nem sempre é verdadeiro, como podemos ver no diagrama de pontos (Figura 11b).

**Situação 5:** Agora, imaginemos que Ivo (maior altura) saiu da sala na hora da tomada das medidas. Nesse caso, qual será o valor da mediana?

Nessa situação, estaremos diante de uma amostra de tamanho par ( $n = 14$  dados). Logo, as posições centrais serão a 7ª ( $n/2$ ) e a 8ª ( $(n/2) + 1$ ). Logo, a mediana será a média dos valores que ocupam essas posições, como podemos acompanhar na Figura 13.

Figura 13 - Exemplo do cálculo da mediana para o número de dados par



Fonte: Elaboração das autoras.

Observamos que ninguém do grupo tem a altura mediana, pois essa altura está no meio entre as alturas de dois estudantes. Nessa situação, estão envolvidos os conceitos de mediana, de ordenação (crescente), de soma e de divisão, além da média (média dos dois valores centrais). Este último, aliás, trataremos na seção a seguir.

## Média (M)

A média aritmética, ou simplesmente média, além de ser um dos conceitos mais importantes e básicos da Estatística e das ciências experimentais, é também o mais utilizado no cotidiano das pessoas, muitas vezes, sem que essas tenham consciência de tal uso. Esse conceito também serve de base para o cálculo de outras medidas, tais como: a mediana (que mostramos nos exemplos apresentados nas Figuras 12 e 13) ou, ainda o desvio padrão, o coeficiente de correlação, de variação, dentre outras. Cazorla *et al.* (2017, p. 67) esclarecem que “o conceito escolar de média se refere, em geral, ao domínio do algoritmo: a soma dos valores da variável dividida pelo número de dados envolvidos na soma”. Cazorla *et al.* (2019) apresentam uma primeira aproximação para o campo conceitual da média aritmética, em que a média é definida como a razão entre a soma dos valores da variável e o número de dados, cujo algoritmo depende

da natureza dos dados. Esse grupo ainda destaca que a média, graças a sua construção, é o único número que está mais próximo de todos os números de um certo conjunto de dados que ela representa.

A média pode ser simples ou ponderada, a depender dos dados a que ela se refere. Se eles estiverem no seu formato original (dados brutos) ela será simples, mas caso estejam agrupados, ela será “ponderada”<sup>11</sup>. Na Figura 14, apresentaremos a representação algébrica dessas duas médias.

Figura 14 - Representação algébrica das médias simples e ponderada

<p><b>Média simples</b>     <math>\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}</math></p>	<p><b>Média ponderada</b>     <math>\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i X_i}{n}</math></p>
<p><b>onde <math>X_i</math> são valores assumidos pela variável, <math>n</math> é o número de dados e <math>f_i</math> é o peso ou ponderação</b></p>	

Fonte: Magina, Cazorla, Gitirana e Guimarães (2010, p. 62).

A seguir, ofereceremos duas situações-problema para exemplificar um e outro tipo de média. As situações serão inspiradas nas Situações 2 e 5, já apresentadas, sendo que alteramos os valores na Situação 6.

**Situação 6:** Na classe do 6º ano, foram medidas as alturas (em centímetros) de 15 estudantes, e os resultados foram: Ana = 147, Nara = 146, Caio = 154, Zeca = 148, Ema = 146, Ivo = 154, Lia = 145, João = 154, Elma = 148, Paulo = 154, Vitor = 149, Maria = 147, Bruno = 149, Dani = 147, Rui = 176. Qual a altura média dessa amostra?

*Média*

$$= \frac{145 + 146 + 146 + 147 + 147 + 147 + 148 + 148 + 149 + 149 + 154 + 154 + 154 + 155 + 176}{15}$$

$$= \frac{2264}{15} = 150,9 \text{ cm}$$

A altura média desse conjunto de estudantes é 150,9 cm. Note que nem um dos estudantes tem tal altura e, aqui, então está uma de suas propriedades: a média (assim como a mediana) não necessita coincidir com um dos valores do conjunto de dados a partir do qual ela foi calculada. Outra propriedade importante

<sup>11</sup> Cazorla, Santana e Utsumi (2019) explicam que não se trata de uma ponderação genuína, pois a “ponderação” realizada pela frequência com que ocorre aqueles dados. Aqui se trata de uma mera simplificação operacional.

da média é que ela, necessariamente, está entre os valores extremos da amostra (143 e 176). Notamos ainda que a média obtida não se situou entre os valores do meio do conjunto, ela ficou mais à direita do grosso dos dados. Isso se deve a altura do Rui, que se distancia muito das demais alturas, e uma das propriedades da média é que seu cálculo leva em consideração todos os valores da amostra.

Voltemos à Situação 2, a partir da qual podemos muito bem discutir a média ponderada.

**Situação 2:** Foi feita uma pesquisa em uma fábrica para saber o número de filhos que os funcionários tinham. O resultado desta pesquisa está apresentado na TDF que consta na Figura 10a. Qual é o número médio de filhos dos funcionários dessa fábrica?

Figura 15 - Procedimento para calcular a média para dados agrupados em uma TDF de valores pontuais

Nº de filhos ( $x_i$ )	Frequência de funcionários ( $f_i$ )	Total parcial do número de filhos ( $x_i * f_i$ )
0	4	$4 * 0 = 0$
1	5	$5 * 1 = 5$
2	7	$7 * 2 = 14$
3	3	$3 * 3 = 9$
4	0	$0 * 4 = 0$
5	1	$1 * 5 = 5$
Total de funcionários: 20		Total de filhos: 33

Fonte: Elaboração das autoras, a partir dos dados utilizados no estudo de Morettin e Bussab (2010, p. 16).

Note que a primeira linha da TDF presente na Figura 15 há quatro funcionários que não têm filhos. Por isso, multiplicamos quatro (funcionários) por zero (filhos), que é igual a zero. Já a quinta linha dessa TDF, informa que nem um funcionário tem quatro filhos, mas a sexta linha nos diz que há um funcionário que tem cinco filhos. A terceira linha informa que há sete funcionários que têm dois filhos cada, o que resulta em 14 filhos. A média de filhos dessa amostra será 33 (total de filhos) dividido por 20 (total de funcionários). A média de filhos desse

grupo é 1,65 filhos por funcionário.

Ora, no mundo real não existe a possibilidade de alguém ter 1,65 filho, mas outra propriedade da média é que ela pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, como neste caso.

No Quadro 9, resumiremos as propriedades das MTC, que é uma composição das propriedades elencadas por Cazorla, Santana e Utsumi (2019) para a média aritmética, complementada pelas propriedades das MTC elencadas por Mayén *et al.* (2017) e Andrade (2013).

Quadro 9 - Propriedades (invariantes) das MTC restrita ao uso potencial nos anos iniciais

Propriedades	Média	Mediana	Moda
1 - Está localizada entre os valores extremos ( $X_{\min} \leq MTC \leq X_{\max}$ )	Sim	Sim	Sim
2 - É influenciada por cada um e por todos os valores (ou é influenciada pelos valores extremos)	Sim	Não	Não
3 - Coincide com um dos valores que a compõem	Às vezes	Às vezes	Sim
4 - Pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física	Às vezes	Às vezes	Não
5 - Seu cálculo leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos	Sim	Não	Não
6 - É um valor representativo dos dados a partir do qual foi calculada	Sim	Sim	Sim
7 - É o ponto de equilíbrio (centro de gravidade)	Sim	Não	Não
8 - Está mais próxima de todos os valores	Sim	Não*	Não*
9 - Pode ser calculada a partir de resultados parciais	Sim	Não	Não
10 - A soma dos valores pode ser obtida multiplicando a MTC pelo número de dados	Sim	Não	Não

Nota: \* a menos que coincida com a média, como no caso de distribuições simétricas.

Fonte: Elaboração das autoras.

Finalizamos esta seção informando que as propriedades indicadas no Quadro 9 são alguns dos invariantes que, nessa nossa primeira aproximação das EMTC, já se encontram identificados. Sabemos, contudo, que a delimitação desse campo conceitual está apenas começando e, por isso, precisamos ler o Quadro 9 a luz dos conceitos apresentados na Figura 8, pois são eles que, juntos, nos oferecem subsídios para dar início da construção desse novo campo.

Na Figura 8, encontramos alguns conceitos já pertencentes a este novo campo, quais sejam, média, moda, mediana, população, variável (discreta e contínua), dados (brutos e agrupados). Notemos que o conceito de variável não pertence unicamente a este campo, o campo conceitual algébrico (Vergnaud, 1998 e Da Rocha Falcão, 2003, fizeram importantes considerações na direção de sua construção) também tem a variável como um de seus conceitos. A Figura 8 ainda aponta alguns invariantes (propriedades) que se pode extrair do conceito de dados – se qualitativo ou quantitativo e, ainda, se os dados qualitativos têm características nominais ou ordinais, bem como se os dados quantitativos têm propriedade de seus dados, serem discretos ou contínuos.

Se olharmos para o Quadro 9, identificamos mais alguns dos invariantes já detectados, os quais estão presentes nos conceitos média, moda e mediana. É importante ter em mente que não raro os estudantes constroem falsos teoremas-emação, tais como: (a) agrupar todos os números de uma amostra (por exemplo, altura ou notas) e achar que sua soma é a média; (b) considerar que para que uma amostra tenha moda, ela tem que se referir a um valor que se repete por pelo menos a metade da amostra mais um; (c) que o valor mediano de uma amostra é o valor do meio e no caso de uma amostra cuja quantidade de valores resulta em um número par, então tem-se duas medianas; (d) independentemente dos números de valores de uma amostra, a sua média é calculada pela soma de todos os valores e sua divisão por dois.

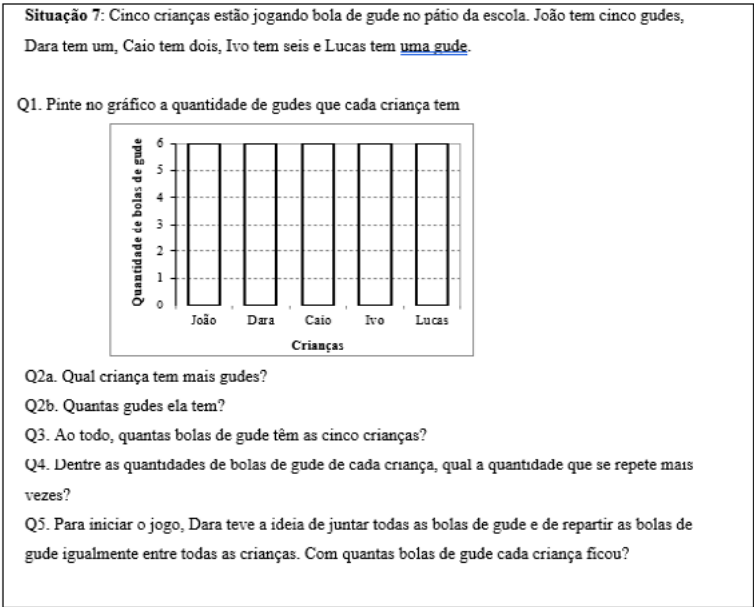
## **Pensando as EMTC na sala de aula, dos anos iniciais**

A Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017) não propõe qualquer atividade no âmbito das MTC para os anos iniciais do Ensino Fundamental. O mesmo não ocorria com o documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998). A partir dessa ausência, entendemos que a BNCC deve ter considerado precoce a introdução de tal campo nesse ciclo de estudo. Todavia, acreditamos que, como todo campo conceitual, este se desenvolve por um longo período de tempo, assim como é preciso interagir com conceitos pertencentes a um campo para, paulatinamente, nos apropriarmos desse campo, por meio dos conceitos que o formam. Nessa direção, ao iniciar o trabalho com as MTC, a partir de situações não formais, que permitam que os estudantes lancem mão de esquemas e teoremas-em-ação implícitos, já nos anos iniciais, permitiria que noções intuitivas emergissem das experiências com tais conceitos. Certamente, isso

traria boas contribuições para o momento em que as MTC fossem efetivamente ensinadas.

É nessa perspectiva que fecharemos este capítulo oferecendo uma atividade (Figura 16) a ser trabalhada nos anos iniciais, a partir da qual os três conceitos centrais da EMTC podem ser tratados dentro de uma mesma situação.

Figura 16 - Situação-problema com conceitos básicos das EMTC, nos anos iniciais do Ensino Fundamental

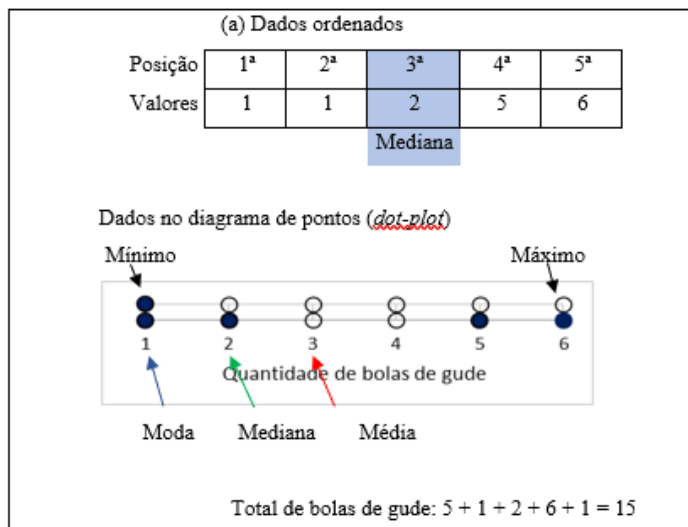


Fonte: Cazorla, Utsumi e Santana (2020, p. 9).

Note que as autoras solicitam que as crianças encontrem o valor máximo, o valor que se repete (moda) e a distribuição em partes iguais (média). Observe, ainda, que elas solicitam as crianças representarem a variável utilizando um gráfico de barras, que é muito utilizado nos anos iniciais. Nesse tipo de gráfico, a variável em estudo se encontra na ordenada e a média, mediana e moda também se encontram na ordenada.

Uma possibilidade de representação dessa situação pode ser o diagrama de pontos. Defendemos ser bastante possível e produtivo trabalhar com ele, já desde o início da escolarização, pois o consideramos esse diagrama muito intuitivo e de fácil interpretação. Assim, os dados da Situação 7 poderiam ser representados tal como está na Figura 17 a seguir:

Figura 17 - Representações referentes à Situação 7



Fonte: Elaboração das autoras.

Observe que a Figura 17 apresenta um diagrama de pontos para representar adequadamente os dados da tabela. Esse diagrama de pontos não está presente na BNCC (BRASIL, 2017), mas advogamos seu ensino desde os anos iniciais, pois é salutar que as crianças desde cedo trabalhem com a reta numérica. Outro aspecto importante do trabalho precoce com esse diagrama é que esse tipo de diagrama oportuniza as crianças trabalharem simultaneamente com duas variáveis, as quais estão representadas iconicamente (pontos cheios e vazados), permitindo a contagem, além de uma representação mais próxima do mundo tangível delas.



## Considerações Finais

Ao término deste capítulo, gostaríamos de nos posicionar sobre a possibilidade de iniciar um trabalho pedagógico de ensino desses três campos conceituais nos primeiros anos de escolarização. Ousamos propor que tal abordagem pedagógica comece antes mesmo do Ensino Fundamental, já nos dois últimos anos da Educação Infantil (4 e 5 anos). Defendemos, por exemplo, a construção, em sala de aula, de diagrama de pontos, traçando uma linha reta no chão, com marcadores nessa linha e posicionando as crianças na linha segundo suas alturas ou o número do sapato que calçam. Dessa forma, cada criança representaria um ponto do diagrama. De fato, concordamos com Vergnaud de que os campos conceituais necessitam de um longo período de tempo para serem apropriados e expandidos. E, para tal, é preciso que o aprendiz tenha várias experiências (interações) com situações que tragam, em seu bojo, conceitos pertencentes a esses campos.

Por fim, sabemos que, embora os campos conceituais sejam independentes uns dos outros, é perfeitamente possível que alguns conceitos pertencentes a um campo sejam utilizados em outros. Este é o caso do conceito de multiplicação que além de ser um dos conceitos centrais nas estruturas multiplicativas, é, muitas vezes, utilizado nas estruturas das medidas de tendências centrais. Igualmente, podemos pensar nas diversas representações que podem ser usadas nas três estruturas, como é o caso, por exemplo, da representação tabular (em especial, a TDF) ou, ainda, os gráficos de coluna.

## Referências

AGRANIONIH, Neila; SPINILLO, Alina; LAUTERT, Síntria. Characteristics of Mathematical Problems Posed by Teachers. **Revista Acta Scientiae**, v. 23, p. 233-264, 2021.

ANDRADE, Vladimir. **Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na formação estatística no Ensino Médio no Brasil e na França**. Abordagem exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais. 315f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC/SEF, 2017.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: **Anais... X Encontro Nacional de Educação Matemática**, v. 1, p. 1-16, 2010.

BORBA, Rute; LAUTERT, Síntria; SILVA, Ariedja. How do Kindergarten children deal with possibilities in combinatorial problems? In: SPINILLO, Alina; LAUTERT, Síntria; BORBA, Rute (Eds.). **Mathematical Reasoning of Children and Adults**. Teaching and Learning from an Interdisciplinary Perspective. Spring, 2021.

CAZORLA, Irene; OLIVEIRA, Marcelo. Para saber mais. In: CAZORLA, Irene; SANTANA, Eurivalda (Orgs.) **Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico**. Itabuna: Via Litterarum Ed. 2010.

CAZORLA, Irene; MAGINA, Sandra; GITIRANA, Verônica; GUIMARÃES, Gilda. **Estatística para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Ed. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 1, 2017.

CAZORLA, Irene; SANTANA, Eurivalda; UTSUMI, Mirian. O Campo Conceitual da Média Aritmética: uma primeira aproximação conceitual. **REVEMAT**, Florianópolis, Edição Especial Educação Estatística, v. 14, p. 1-21, 2019.

CAZORLA, Irene; UTSUMI, Mirian; SANTANA, Eurivalda. Desempenho em Estatística de estudantes do Ensino Fundamental, no contexto do D-Estat. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 28, p.1-25, 2020.

CAZORLA, Irene; UTSUMI, Mirian; MONTEIRO, Carlos. Eduardo Ferreira. Variáveis estatísticas e suas representações em gráficos: reflexões para seu ensino. **Números: Revista de didática de las matematicas**, v. 106, p. 23-32, 2021.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. **Psicologia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; SPINILLO, Alina. **Repensando Multiplicação e Divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM Editora, 2014.

LAUTERT, Síntria; SANTOS, Ernani. Estudantes do 1º ano ao 3º ano resolvem situações multiplicativas. In: LAUTERT, Síntria Labres; CASTRO-FILHO, José Aires; SANTANA, Eurivalda (Orgs.). **Ensinando multiplicação e divisão do 1º ao 3º ano**. Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica. Coletânea Cadernos E-Mult. Itabuna: Via Litterarum, v. 1, 2017.

LAUTERT, Síntria; SCHLIEMANN, Analúcia. Using and Understanding Algorithms to Solve Double and Multiple Proportionality Problems. **International Journal of Science and mathematics Education**, 2020.

LEVAIN, Jean. La Résolution De Problèmes Multiplicatifs A La Fin Du Cycle Primaire. **Educational Studies In Mathematics**, v. 23, n. 2, p. 139-161, 1992.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia; NUNES, Terezinha; GITIRANA, Verônica. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 1ª Ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia. As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 53-71, 2004.

MAGINA, Sandra; CAZORLA, Irene; GITIRANA, Verônica; GUIMARÃES, Gilda. Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamenta. **Educar em Revista**. Curitiba: UFPR, nº especial 2, 2010

MAGINA, Sandra; MERLINI, Vera; SANTOS, Aparecido dos. A Estrutura Multiplicativa à luz de Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO-FILHO, Aires *et al.* **Matemática, Cultura e Tecnologia: Perspectivas internacionais**. Curitiba: CRV Editora, 2016.

MAGINA, Sandra; LAUTERT, Síntria; SANTOS, Ernani. Estratégias Exitosas de Alunos dos Anos Iniciais em Situações de Proporção, **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 45, n. 4, 2020a.

MAGINA, Sandra; SPINILLO, Alina; LAUTERT, Síntria. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 15, p. 78-94, 2020b.

MAYÉN, Silvia; COBO, Belen; BATANERO, Carmen; BALDERAS, P. Comprensión de las medidas de posición central em estudiantes mexicanos de bachillerado. Unión: **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 9, 2017, p. 187-201.

MORETTIN, Pedro; BUSSAB, Wilton. **Estatística Básica**. 6. Ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel. **A Psicologia da Criança**. 14. Ed. Tradução Octávio Cajado. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil Ed., 1995.

SANTANA, Eurivalda; LAUTERT, Síntria; CASTRO-FILHO, José; SANTOS, Ernani dos. Observatório da Educação em rede: as estruturas multiplicativas e a formação continuada. **Educação Matemática em Foco**, v. 5, p. 77-96, 2016.

SANTOS, Ernani dos; ARAÚJO-GOMES, Claudia; GOMES, Alex. The posing of mathematical problems by university students of mathematics. In: SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Síntria Labres; BORBA, Rute (Eds.). **Mathematical Reasoning of Children and Adults**. Teaching and Learning from an Interdisciplinary Perspective. Spring, 2021.

SOUZA, Emília; MAGINA, Sandra. Concepção do Professor do Ensino Fundamental sobre Estruturas Multiplicativas. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 24, p. 797- 815. 2017

SPINILLO, Alina; LAUTERT, Síntria; BORBA, Rute; SANTOS, Ernani dos; SILVA, Juliana. Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do ensino fundamental. **Bolema**, v. 31, n. 59, p. 928-946, 2017.

VERGNAUD, Gérard. A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In: In: CARPENTER, T. P. ; MOSER, J. M. ; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Addition and Subtraction: a cognitive Perspective**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1982.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structures. In: HIEBERT, H; BEHR, M. (Eds). **Research agenda in Mathematics education: number and operations in middle grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1988a, p. 141-161.

VERGNAUD, Gérard. Theoretical Frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. **ICME VI**, Budapest, 1988b.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSON, H. e CONFREY, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, p. 41-59, 1994.

VERGNAUD, Gérard. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Eds.) **Learning and Teaching Mathematics: an international perspective**. Psychology Press/Erlbaum, 1997.

VERGNAUD, Gérard. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematics Behavior**, v. 2, n. 17, p. 167-181, 1998.

## Autoras

### Sandra Maria Pinto Magina

Universidade Estadual de Santa Cruz

E-mail: smpmagina@uesc.br

### Síntria Labres Lautert

Universidade Federal de Pernambuco

E-mail: sintria.lautert@ufpe.br

### Irene Mauricio Cazorla

Universidade Estadual de Santa Cruz

E-mail: icazorla@uol.com.br

## Capítulo 3

# O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS: TEORIZAÇÃO E DESDOBRAMENTOS PARA A PESQUISA E PARA O ENSINO

*Amarildo Melchiades da Silva  
Viviane Cristina Almada de Oliveira  
Vitor Rezende Almeida*

Este capítulo apresenta os pressupostos de uma teorização em Educação Matemática intitulada Modelo dos Campos Semânticos (MCS), desenvolvido pelo educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins (1955-2017). Compartilhando ideias com outros pensadores, como Vigotski, Leontiev e Nelson Goodman, o MCS caracteriza-se como um modelo epistemológico que possibilita uma análise da enunciação dos participantes de uma de pesquisa ou de estudantes em uma sala de aula quando se encontram frente a uma demanda de produção de significados para a matemática. Seus constructos oferecem a pesquisadores e professores condições de entenderem a partir de que “lugar” seus informantes estão falando e, desse modo, auxiliam em processos investigativos ou educativos. As principais noções do MCS serão apresentadas e discutidas ao longo do texto, bem como explicitadas suas potencialidades para a pesquisa e o ensino.

*Palavras-chave:* Educação Matemática. Modelo dos Campos Semânticos. Conhecimento. Produção de Significados. Ensino e Aprendizagem.

## Introdução

O propósito deste capítulo é apresentar o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), um modelo epistemológico desenvolvido pelo educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins, no período de 1993 a 2012, a partir de suas principais noções constitutivas.

Ao longo de sua carreira como professor e pesquisador, Lins buscou incessantemente entender o que seus alunos estavam dizendo e por que estavam dizendo, ou seja, ele queria entender com que objetos estavam pensando e operando no interior de uma atividade em que acontecia uma demanda de produção de significados. Por exemplo, uma das questões que influenciou toda a sua perspectiva como pesquisador, envolvia responder o que estaria acontecendo quando uma criança escreve:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}.$$

Ao invés de olhar para o erro, ele questionou: por que essa criança fez o que fez? O efeito dessa perspectiva foi expresso em suas próprias palavras:

Para explicar a relevância deste exemplo em minha trajetória intelectual, basta dizer que foi exatamente ele que se tornou paradigmático do que eu queria realizar em meus estudos de doutorado: ao invés de apenas caracterizar o erro, a falta, eu queria mostrar que existe ali a possibilidade e a necessidade do que hoje chamo de uma leitura positiva do que o aluno fez/disse, que consiste em saber do que, de que objetos, ele estava efetivamente falando. E mais, desenvolver um referencial teórico que permitisse fazer esta leitura positiva. (LINS, 2002, p. 18)

A partir desses questionamentos, Lins desenvolveu um modelo epistemológico que permitiu uma leitura do que os participantes de uma pesquisa ou estudantes em sala de aula estavam potencialmente dizendo quando produziam significados. Sua intenção original era que, a partir das premissas do MCS e com as chamadas noções-categorias que descreveremos adiante, tanto o professor em sua sala de aula quanto o pesquisador em entrevistas pudessem ler o que seus alunos e informantes estavam dizendo.

Com a defesa de sua tese de doutorado intitulada "A framework for understanding what algebraic thinking is" (Um quadro de referência para entender-se o que é pensamento algébrico), elaborada no Shell Centre for Mathematical Education em Nottingham na Inglaterra, Lins (1992) dá o passo inicial na elaboração de seu modelo teórico. A gênese do que viria a ser o MCS já se encontrava na tese, mas uma elaboração sistemática elaboração sistemática teve início a partir de 1993.

Seu primeiro artigo sobre o assunto foi intitulado Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais sólidas as Bases da Pesquisa. Nesse artigo, sua elaboração teórica foi denominada de Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) e, mais tarde, teve seu nome alterado para Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Segundo o autor, a primeira vez em que as ideias centrais do MCS foram apresentadas à comunidade internacional foi na 18th Annual Conference Psychology of Mathematics Education (PME), realizada em 1994, em uma comunicação científica intitulada Eliciting the meanings for algebra produced by students: knowledge, justifications and semantics fields (Trazendo à tona os significados para a álgebra produzidos pelos alunos: conhecimento, justificação e Campos Semânticos). Ao longo dos anos, o desenvolvimento do MCS foi apresentado nos artigos e livro publicados por Lins. (LINS, 1994b)

Na seção seguinte, apresentaremos as principais noções do Modelo dos Campos Semânticos.

## **O Quadro Teórico**

É comum observarmos que muitos artigos em Educação Matemática trazem frases envolvendo termos como “conhecimento do aluno”, “conhecimento matemático”, sem que seus autores deixem claro o que esses termos querem dizer ou apresentem uma indicação de teorias que o leitor pode consultar de modo a compreender de que lugar esses autores estão falando.

Uma das principais preocupações de Lins, com respeito à pesquisa em Educação Matemática, era a de que os investigadores deveriam manter sempre explícitas suas posições epistemológicas e que suas pesquisas incluindo as perguntas diretrizes, as perguntas diretrizes, os resultados e mesmo os métodos, deveriam ser discutidas à luz de posições epistemológicas. (LINS, 1993, p. 75)

Para Lins (1993, p.77), Epistemologia é entendida como “a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento? (ii) como é que o conhecimento é produzido? e (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?” E respostas a essas questões caracterizam posições epistemológicas; assim sendo, toda pesquisa que envolve questões relativas à aprendizagem está inevitavelmente ligada às respostas que um pesquisador dá a elas.



Tal caracterização buscou contrapor a visão sobre Epistemologia que entende o termo como sinônimo de teoria da ciência:

Se a Epistemologia quer poder dizer alguma coisa sobre o conhecimento de, por exemplo, tribos indígenas, marceneiros ou crianças, é claro que não pode caracterizar-se como “teoria da ciência”, expressão que deve ser lida “teoria da ciência ocidental pós-newtoniana”, pois a redundância é menos importante que o alerta; este alerta é uma preocupação central na elaboração da Etnomatemática, que permite que a Matemática e o conhecimento matemático possam ser examinados desde o ponto de vista da cultura onde acontecem (ou reconhecer que não acontecem...). (LINS, 1993, p. 77).

Em Filosofia, no ramo denominado Epistemologia ou Teoria do Conhecimento, o conhecimento é entendido como sendo a relação entre o sujeito (a consciência) e o objeto (independente da consciência cognoscente). Mas, por vários e importantes motivos que não encontram espaço para discussão neste texto, as concepções de conhecimento advindas da Epistemologia não atendiam/em aos pressupostos do MCS. Lins (1993, p.86) então propôs a seguinte formulação para conhecimento:

*Conhecimento* é entendido como uma crença - algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma *afirmação* – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua *crença-afirmação*. (grifos do autor)

Assim, os três aspectos chave para conhecimento, segundo o MCS, são: a crença, a afirmação e a justificação; que são esclarecidos por Lins (2001, p. 42, tradução nossa), nos seguintes termos:

Primeiro, a pessoa deve acreditar em algo para constituir parte de um conhecimento que ela/ele produz, e isso implica que ela/ele está ciente de manter essa crença. Segundo, a única maneira de termos certeza dessa conscientização é se a pessoa afirma, e aqui estou usando o termo ‘afirma’ livremente, significando alguma forma de comunicação aceita por um interlocutor; não precisa ser de forma linguística. Terceiro, não é suficiente considerar o que a pessoa acredita e afirma, pois diferentes justificações com a mesma crença-afirmação correspondem a conhecimentos diferentes. Além disso, as justificações estão relacionadas ao que pode ser feito com os objetos que um conhecimento tem a ver; no caso da criança dizer que  $2 + 3 = 5$ , por exemplo,  $2 + 3$  é o mesmo que  $3 + 2$ ,

uma vez que o arranjo dos dedos não faz diferença. Do ponto de vista de uma justificação baseada na teoria dos conjuntos, arranjos espaciais não têm nada a ver com '2' e '3' ou com sua adição. As justificações, portanto, desempenham um papel duplo em relação ao conhecimento. Primeiro, elas estão realmente relacionadas à concessão do direito de conhecer, e essa concessão é sempre feita por um interlocutor para quem esse conhecimento está sendo enunciado. Segundo, elas estão relacionados à constituição de objetos.

Em suma, conhecimento é sempre uma enunciação de uma crença-afirmação - de um sujeito - para a qual ela/ele tem uma justificação. (LINS, 1994a, p.43) E, desse modo, a produção de conhecimento deve ser entendida como a enunciação de crenças-afirmações e de suas respectivas justificações.

Outra noção central no MCS é significado, que é descrito nos seguintes termos: significado é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade<sup>9</sup>. Assim, "dizer que um sujeito produziu significados é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade". (SILVA, 2003, p. 9).

Além disso, produzir significados não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto e sim o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade. Assim, os objetos são constituídos enquanto tais a partir do que o sujeito diz que eles são. Como observa Lins (1996, p. 5), "o ponto chave é que produzimos significados para pertencer a uma prática social ou, em escala maior, a uma cultura, tanto quanto produzimos enunciações pela mesma razão". E a importância de se investigar a produção de significados é expressa por Lins (1999, p. 86) quando diz: "Para mim, o aspecto central de toda aprendizagem humana – em verdade, o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados".

Uma outra noção central do MCS é a noção de comunicação. A questão que introduz a caracterização que apresentaremos a seguir poderia ser: é possível a comunicação no sentido da transmissão de uma mensagem de uma pessoa para outra? Para Lins (1999, p. 80) existem duas visões que respondem positivamente a essa questão e, como ele observa, "são dominantes, tanto no mundo acadêmico quanto no senso comum". Tanto a noção tradicional, vinda da teoria da informação, como a visão objetivista "assumem a existência de uma comunicação efetiva, no sentido da transmissão de uma mensagem" (LINS, 1999,

---

<sup>9</sup> O termo atividade é tomado no MCS no sentido proposto por Leontiev (sd).

p. 80).

Para ele, esses dois modos de compreender o processo comunicativo entendem a não efetivação da comunicação como um acidente e sua efetivação como natural. Uma oposição a esse ponto de vista é representada pelo filósofo franco-argelino Jacques Derrida, para quem a comunicação, por exemplo, entre duas pessoas seria um acidente, pois a norma seria a nãocomunicação.

Na visão de Lins (1999, p. 81), essas duas posições divergentes são ainda problemáticas: uma, por acreditar na comunicação efetiva e a outra, por não explicar “por que os processos comunicativos não são tão divergentes que simplesmente se desfazem à primeira tentativa de contato”. Segundo ele, seria então necessário formular uma terceira explicação sobre o processo comunicativo que evitasse as limitações das duas posições anteriores.

Ele observa que, em processos comunicativos,

(...) temos a sensação de que está ocorrendo algo que nos conecta, algo que nos dá razão para permanecer neste processo. É disto que precisamos dar conta, em primeiro lugar, mas penso que não precisamos, para resolver este problema, postular a existência de comunicação no sentido tradicional, de transmissão” (LINS, 1999, p. 81).

A partir desta perspectiva, Lins formula uma nova proposta para o processo comunicativo cujos elementos constitutivos são: autor, texto e leitor. O autor é aquele que, nesse processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, ainda nesse processo, se propõe a produzir significados para os resíduos das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo à aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte que analisa a obra de um artista plástico ou uma pessoa que leia um romance buscando entender a história do autor. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado. De acordo com Lins (2001, p. 59):

Por um texto [...] entenderei não somente o texto escrito, mas qualquer resíduo de uma enunciação: sons (resíduos de elocução), desenhos e diagramas, gestos e todos os sinais do corpo. O que faz do texto o que ele é, é a crença do leitor que ele é, de fato, resíduo de uma enunciação, ou seja, um texto

é delimitado pelo leitor; além disso, ele é sempre delimitado no contexto de uma demanda de que algum significado seja produzido para ele.

Ao olharmos para o processo de comunicação, inicialmente, pela perspectiva do autor, entendemos que:

Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém. Porém, por mais que um autor esteja diante de uma plateia, este alguém não corresponde a indivíduos, pessoas nessa plateia e, sim, ao leitor que o autor constitui: é para este 'um leitor' que 'o autor' fala (LINS, 1999, p.81).

A este "um leitor" chamaremos de interlocutor. O interlocutor deve ser identificado como sendo uma direção na qual o autor fala e não com pessoas, com "rostos" com quem falamos; mas com modos de produzir significados.

Por outro lado, em processos comunicativos, na perspectiva do leitor, ele "sempre constitui um autor, e é em relação ao que este 'um autor' diria que o leitor produz significado para o resíduo de enunciação e que neste momento se constitui (ou transforma) em texto". (LINS, 1999, p. 82) Além disso, "é apenas na medida que o leitor fala, isto é, produz significados para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor" (LINS, 1999, p. 82).

Sendo assim, poderíamos dizer que em situação de diálogo entre duas pessoas, por exemplo, o processo comunicativo ficaria: o autor produz uma enunciação a partir da qual, um leitor produziria significados. O leitor, através de uma outra enunciação, constitui aquilo que um autor diria em texto, produzindo uma nova enunciação na direção desse um autor, e assim sucessivamente.

Neste processo, não ocorre o que alguns diriam ser a transmissão de uma mensagem; o que ocorre é que nos colocamos incessante e alternadamente na posição de o autor e de o leitor em cada um destes processos, restando a sensação psicológica de comunicação efetiva. (LINS, 1999, p.82). Logo, esse sentimento de comunicação efetiva é fruto apenas de uma sensação psicológica. Porém, o que ocorre, então, para que entendamos uns aos outros? A resposta é apresentada novamente por Lins (1999, p. 82) nos seguintes termos:

A convergência se estabelece apenas na medida que [autor e leitor] compartilham interlocutores, na medida que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um espaço comunicativo: não é necessária a transmissão para que se evite a divergência.

Assim, seu entendimento de espaço comunicativo, vai alterar a noção de comunicação tradicional, como ele mesmo observa:

No MCS a noção de comunicação é substituída pela noção de espaço comunicativo, que é um processo de interação no qual (dizer isto, para o MCS é redundante) interlocutores são compartilhados. Numa inversão conceitual, “comunicação” não corresponde mais a algo do tipo “duas pessoas falando uma para a outra”, e sim a “dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor. (LINS, 2012, p. 24)

Com base na visão de processo comunicativo do MCS, a leitura feita por um pesquisador a partir de processos de produção de significados ocorre da seguinte maneira: as ações enunciativas dos participantes (os autores), chegam até os pesquisadores (os leitores) como resíduos de enunciações, que se constituem em texto a partir de sua produção de significado. Assim, a(s) leitura(s) constituída(s) a partir da autoria desse pesquisador (com seus recortes das ações enunciativas, sua leitura positiva e/ou plausível, sua fala para interlocutores, ...) resulta, novamente, em resíduo de enunciação (por exemplo, um artigo, uma tese), para o qual os leitores produzirão (seus) significados. (SILVA, 2003, p. 52)

Na continuação de nossa apresentação do MCS apresentaremos dois outros termos: a noção de estipulação local e de núcleo. No processo de produção de significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justificá-las. A essas crenças-afirmações, Lins denominou de estipulações locais e, ao conjunto de estipulações locais constituídas no interior de uma atividade chamou de núcleo. Para Lins e Gimenez (1997, p. 144):

Os elementos de um núcleo funcionam como estipulações locais: localmente são “verdades absolutas”, coisas que assumimos sem que haja a necessidade de uma infinita cadeia regressiva de justificações. O que é importante e revelador é que esse “localmente” se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode se alterar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas.

Ainda na direção de esclarecer a noção de núcleo, Lins e Gimenez (1997, p. 144) pontuam que:

Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação “realista” ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for. Núcleos não se referem especificamente a “conteúdos” ou “áreas de conhecimento”: em relação ao mesmo núcleo de balança de dois pratos, é possível produzir significado para uma equação, para a noção de justiça ou para fenómenos físicos diversos.

É importante ter em mente que núcleo, no sentido proposto no MCS, não se refere a algo estático, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de atividades. Em uma outra atividade, novo núcleo se constitui e esse é o processo.

Na observação dos núcleos, numa dada atividade, podemos identificar a maneira de operar dos sujeitos bem como a lógica das operações ligadas ao processo de produção de significados para um texto. Segundo Lins e Gimenez (1997, p.114), “toda operação é realizada segundo uma lógica”, sendo assim, é essencial a investigação dessas lógicas se queremos entender as formas de pensar de nossos alunos ou dos participantes de uma pesquisa. E a lógica das operações se referem exatamente a um conjunto de estipulações locais, aquilo que pode ser feito com os objetos, no interior de um núcleo (LINS, 1997b, p. 145).

A partir da noção de núcleo, chegamos à noção central que dá nome ao MCS: campos semânticos. Contrariamente à aceção que vem da Linguística ou aquela proposta em Educação Matemática, por exemplo, por Paolo Boero (BOERO, 1982), Lins apresentou uma caracterização própria para campo semântico nos seguintes termos: “Campo semântico é um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade”. (LINS, 2012, p. 17). Nesse sentido, Lins afirma que uma pessoa está operando em um Campo Semântico toda vez que ela estiver produzindo significado em relação a um núcleo no interior de uma atividade.

Vale ressaltar que a noção de campo semântico também não é estática; não é um “campo” cheio de coisas, “na cabeça da pessoa, e que quando ela for resolver um problema pode “chamar”, “invocar”. (LINS, 2002, p. 46). Uma das importantes funções dessa noção no MCS é:

(...) articular “produção de conhecimento”, “significado”, “produção de significados” e “objeto”. A referência a “no interior de uma atividade” serve para evitar o caso em que se

esteja falando de futebol e de equações “ao mesmo tempo” e terminemos fazendo referência a um campo semântico no qual pareça que se está produzindo significado para gol em relação a uma balança de dois pratos. Não que isto não possa acontecer, mas é melhor ter a possibilidade da leitura mais fina. É isto que o MCS oferece: um quadro de referência para que se possa produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significados. (LINS, 2012, p. 18)

Outra importante função da noção de campo semântico – a de ser entendida como unidade de análise do MCS – será discutida na seção seguinte.

## **O Modelo dos Campos Semânticos em ação na pesquisa e na sala de aula**

As pesquisas desenvolvidas usando os pressupostos teóricos do MCS têm sido, ao longo dos anos, e em sua totalidade, de natureza qualitativa, no sentido proposto, por exemplo, por Bogdan e Biklen (2013, p. 47). As investigações, a partir desse constructo teórico, têm as características sugeridas por estes autores, que sugerem a importância de pressupostos teóricos, nos seguintes termos: “Os bons investigadores estão conscientes dos seus fundamentos teóricos, servindo-se deles para recolher e analisar dados. A teoria ajuda à coerência dos dados e permite ao investigador ir além de um amontoado pouco sistemático e arbitrário de acontecimentos” (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 52).

Muitas dessas investigações têm sido desenvolvidas, em salas de aula de escolas e de universidades, com escolares e estudantes universitários, ou fora desses espaços, nas chamadas entrevistas clínicas, em que o pesquisador entrevista um ou mais estudantes fora do ambiente de sala de aula, mas com o objetivo de que os “resultados” qualitativos da pesquisa retornem para aqueles espaços institucionais. O foco dos pesquisadores que adotam o MCS tem sido, em geral, na compreensão do processo de produção de significados de seus informantes e da dinâmica desse processo. Portanto, uma das principais características das pesquisas com base no MCS é o interesse em olhar para processos, em oposição a olhar para estados ou produtos.

As investigações com base no MCS têm sido de natureza descritiva e analítica, isto é, os pesquisadores fazem uso de grande quantidade de dados descritivos, depoimentos, diálogos; e em grande parte dos estudos, são coletadas

as ações enunciativas dos estudantes. De posse do material, uma análise é desenvolvida a partir do que se chamamos noções-categorias do MCS, algumas já referidas anteriormente e outras que serão descritas a seguir. Ao pesquisador cabe a tarefa de reunião e análise das informações, que são entendidas como resíduos de enunciação para os quais o pesquisador produzirá significados (os seus significados).

Uma boa parte dessas pesquisas envolve um trabalho de campo. Nesse tipo de pesquisa, a coleta de informações é feita de diferentes maneiras. O que muitas delas têm em comum é uma descrição minuciosa das ações enunciativas dos sujeitos envolvidos em atividades de produção de significados para a Matemática. Um recurso frequente tem sido o uso de filmagens dos estudantes resolvendo tarefas – tomadas como demanda de produção de significados – ou, respondendo questões de uma entrevista tem sido uma ferramenta útil na reunião das informações de interesse do pesquisador. Assim, a videografia, isto é, o registro em vídeo, tem sido um aliado no armazenamento de informações para posterior análise.

De maneira complementar as filmagens de sessões de entrevistas, a observação participante acompanhada de um caderno ou tablet para anotações, tem sido outra maneira de coleta de informações e registro frequentemente adotados. A coleta de informações a partir da gravação de áudio e/ou do registro escrito dos estudantes em situação de investigação também foram utilizadas e possibilitaram uma análise das ações enunciativas dos sujeitos.

As investigações que visam aos processos de ensino e de aprendizagem têm seguido a direção de participar da proposta original de Lins de entender por que os estudantes dizem o que dizem. Com isso, tem sido possível ampliar a compreensão da maneira de operar daqueles a quem queremos ensinar e, em maior escala, possibilitado repensar as estruturas dos currículos, metodologias de ensino e formas de avaliação.

Outra característica metodológica do MCS foi designada por Lins como leitura positiva teve origem na leitura de Lins sobre o desenvolvimento cognitivo segundo Piaget e a partir da análise da situação descrita na introdução quando uma criança ao somar as frações opera somando os respectivos numeradores e denominadores. Diferentemente da concepção piagetiana, de olhar para o que falta à criança que assim opera com essas frações e, desse modo, alocá-la em um determinado estágio de desenvolvimento cognitivo, Lins questiona-se sobre o porquê a criança operou daquele modo. Esta outra perspectiva, é expressa, nas



palavras de Lins (2002, p. 18) da seguinte maneira:

[...] ao invés de apenas caracterizar o erro, a falta, eu queria mostrar que existe ali a possibilidade e a necessidade do que hoje chamo de uma leitura positiva do que o aluno fez/disse, que consiste em saber do que, de que objetos, ele estava efetivamente falando.

Esse olhar correspondeu ao afastamento de Lins das ideias de Piaget e a uma aproximação gradual das ideias de Vygotsky. Ele observou, por exemplo, que “enquanto em Piaget o olhar se dirige para estágios e mecanismos de passagem entre estágios, em Vygotsky o olhar se dirige a processos que uma vez postos em marcha são a causa de sua própria mudança” (LINS, 1999, p. 79).

Assim, em sua origem, o que estamos chamando de leitura positiva é uma oposição a esse ponto de vista de leitura do outro pela falta e, desse modo, o objetivo da leitura proposta pelo MCS não é olhar para o erro quando as pessoas realizam uma tarefa, ou para o que lhes falta para resolvê-la corretamente. O foco do pesquisador e do professor, nesse momento, está em entender por que ele/ela fez o que fez na tarefa. Com isso estamos também dizendo, como consequência, que leitura positiva não é juízo de valor. Uma premissa dessa postura é acreditar que, quando as pessoas produzem significados, seja a partir de qual texto for, elas o fazem por inteiro, isto é, o que dizem/fazem é sempre o que elas podem dizer/fazer no interior daquela atividade. Em termos teóricos, o caminho para uma leitura positiva é buscar fazer uma leitura do outro a partir de suas legitimidades, seus interlocutores, buscando compartilhar o mesmo espaço comunicativo.

Por outro lado, um novo termo foi cunhado por Lins para a leitura da produção de significados, ao que ele denominou de leitura plausível. E a indagação de pesquisadores sobre semelhanças e diferenças entre leitura plausível e leitura positiva, Lins (2012, p. 23) esclarece que:

A leitura plausível se aplica de modo geral aos processos de produção de conhecimento e significado; ela indica um processo no qual o todo do que eu acredito que foi dito faz sentido. Outra maneira de dizer que faz sentido em seu todo, é dizer que o todo é coerente (nos termos de quem eu constituo como um autor do que estou lendo). (...) Nesse sentido, podemos dizer que é uma leitura positiva e não pela falta. (...) Por outro lado, o uso da “leitura positiva” é útil nas situações de interação (grifos do autor).

Outra característica metodológica do MCS é a sua unidade de análise entendida como sendo o campo semântico. Isto quer dizer que quando um pesquisador desenvolve sua análise do processo de produção de significado, não é possível olhar para “menos do que” um campo semântico, isto é, o campo semântico é considerado como um todo mínimo a partir do qual a análise acontece. Esse ponto é expresso por Lins (2012, p. 18) nos seguintes termos:

É no interior de campos semânticos que se produz conhecimento e significado, que objetos são constituídos. Do ponto de vista da produção de conhecimento e significado, e da constituição de objetos, campo semântico é, como atividade de Leontiev (no caso da análise da atividade humana), a unidade de análise adequada.

Em linhas gerais, segundo Silva (2003, p. 66) uma proposta de leitura da produção de significados parte da consideração de que quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação, observamos da perspectiva do MCS o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve as seguintes noções-categorias:

- i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;
- ii) A constituição e a transformação de um núcleo (processo de nucleação): suas estipulações locais, as operações e sua lógica;
- iii) A produção de conhecimento: enunciação de crenças-afirmação e suas respectivas justificações;
- iv) A fala para os interlocutores;
- v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade.

Silva (2003, p. 66) ainda chama a atenção para o fato de que:

(...) quando apresentamos esta lista de elementos – que usualmente chamamos de noções-categorias – em uma determinada ordem, não estamos querendo dizer que há uma sequência de procedimentos, uma ordem de leitura, mas queremos dizer que é o conjunto dessas coisas que estaremos considerando quando estivermos fazendo nossa leitura.

Recordamos que da perspectiva do MCS, o pensamento não se organiza por conceitos e nem a partir deles, mas a partir de objetos; e que estes são

constituídos propriamente apenas no interior de atividades. Como observou Lins (2012): “Nós constituímos objetos (instituímos, criamos, inventamos, reinventamos...) produzindo significados. Nós pensamos com e sobre objetos. São os objetos que estruturam nossa cognição (que é, portanto, situada, no sentido técnico do termo” (LINS, 2012, p. 29).

Como sabemos, um *núcleo*, no sentido proposto no MCS, não se refere a algo estático, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de atividades a partir das estipulações locais. Como veremos no exemplo seguinte, ele pode sofrer transformações como foi observado quando do estudo da sua dinâmica (SILVA, 2013).

Na observação do núcleo constituído, numa dada atividade, identificamos a maneira de operar dos sujeitos. Isto é feito considerando as *operações* que ele faz, isto é, o que ele faz com os objetos e a *lógica das operações*, que é o que garante que ele pode fazer aquela operação.

A identificação da direção em que o sujeito de pesquisa fala - que são seus interlocutores - é de suma importância para entender à sua maneira de operar. Além disso, no processo de produção de significados dos sujeitos, podemos identificar em suas ações enunciativas suas legitimidades, isto é, aquilo que para o sujeito, pode ser dito.

Outro processo que podemos identificar na produção de significados é o que chamamos de impermeabilização, entendido como a situação em que um aprendiz em uma sala de aula, fica impermeável a tudo o que se diz ali, não mudando à sua maneira de operar. Muitas vezes, isso acontece porque ele/ela acredita na legitimidade do que diz e entende que não há por que dizer de outro jeito – o jeito do professor, por exemplo. Ou ainda, por não poder produzir significados em outra direção (SILVA, 2012).

Um exemplo desse processo foi observado em uma turma de Álgebra Linear, na universidade, em que o professor ensinava o método de Gauss para resolução de sistemas lineares gerais. Por várias aulas, o docente discutiu a fundamentação teórica do método, resolveu exercícios com os alunos e sugeriu a importância do método. Na prova, vários alunos tentaram resolver os sistemas lineares usando o método de substituição; um método possivelmente apresentado a eles no Ensino Fundamental. As evidências sugeriram, naquela ocasião, que alunos não mudaram à sua maneira de operar e se tornaram impermeáveis a tudo o que foi dito naquela sala de aula.

O processo de impermeabilização foi identificado pela primeira vez numa investigação, no estudo intitulado “Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática” (SILVA, 2003; SILVA; LINS, 2013) e motivou o questionamento de se não há outras situações em que nossos alunos se tornam impermeáveis a tudo o que nós, professores, estamos dizendo em sala de aula. Sugerindo a importância da identificação desse processo por outras pesquisas ou pela observação, identificação e relato dos professores quando ocorrer em sala de aula.

Outros dois movimentos imbricados em práticas educativas são denominados no MCS de estranhamento e descentramento. Para Lins, o estranhamento é o processo no qual o sujeito, identifica a enunciação do outro como algo que não possa ser dito, como algo que não seja legítimo. O estranhamento foi vivenciado em vários momentos na história da matemática, quando matemáticos estiveram frente a alguns textos. Podemos citar o exemplo dos algebristas do século XVI, que segundo Caraça (2010, p. 155), não atribuíam o status de número aos números complexos, sendo então utilizados apenas como mero expediente de cálculo, sem lhe conferir, em seus termos, dignidade numérica.

O descentramento, conforme presente em Oliveira (2011, p. 144) é o exercício “que passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo”. A importância desses dois movimentos – estranhamento e descentramento – na formação de professores é comentada por Lins (2005, p. 121):

[...] a matemática do matemático oferece uma oportunidade única de viver o estranhamento peculiar ao encontro com noções que contrariam em tudo o senso comum do cotidiano, da rua (...) É apenas ao se tornar sensível a este estranhamento, por tê-lo vivido como aluno-futuro-professor, que o professor poderá ser sensibilizado para a necessidade de ler seus alunos, ao invés de apenas compará-lo contra um mapa do que de deveria ser.

Tendo apresentado alguns dos pressupostos teóricos do MCS, indicamos agora um instrumento que compreendemos, tem auxiliado como resíduo de enunciação a partir do qual se deflagra o processo de produção de significados dos estudantes ou participantes de uma pesquisa: as tarefas.

Observando as pesquisas já desenvolvidas desde a tese de Lins (1992) acreditamos, que as tarefas<sup>10</sup>, entendidas como qualquer situação problema apresentada aos sujeitos de pesquisa como demanda à produção de significado, têm sido um caminho frutífero utilizado por pesquisadores para saber o que esses informantes podem dizer de uma noção matemática ou, investigar os significados matemáticos ou não-matemáticos que surgem a partir das ações enunciativas desses sujeitos, ou ainda, investigar o próprio processo de produção de significado e sua dinâmica. Assim, uma tarefa pode ser, por exemplo, um texto escrito, uma questão para discussão ou um problema matemático.

Uma “boa” tarefa, para a finalidade a qual se destina, precisa ter potencialidade para que o pesquisador possa observar a maneira de operar dos sujeitos. Ela é um elemento mediador entre o pesquisador e o informante. Da experiência de Lins em suas pesquisas, duas características foram identificadas como promissoras em uma tarefa para a observação da produção de significados de uma pessoa que se propõe a falar a partir daquele enunciado; são elas: ser familiar e não-usual. Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-la. É importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não-usual está presente apenas nas expectativas do pesquisador, fruto do seu entendimento dos sujeitos envolvidos e da atividade em que estão inseridos, pois, não há nada que garanta tal crença.

Como consequência das características metodológicas do MCS um pesquisador em suas investigações (e um professor em sala de aula) não tem como antecipar o que pode acontecer quando os informantes/participantes da pesquisa (ou os alunos em sala de aula) estão envolvidos, por exemplo, na resolução de uma tarefa. Após a enunciação dos sujeitos é que a leitura da produção de significados é desenvolvida a partir das noções- categorias.

Lins (2012, p. 11) acreditava que o MCS só existe em ação e sobre isso ele afirmava: “Ele não é uma teoria para ser estudada, é uma teorização para ser usada”. Com essa visão em mente, colocaremos a seguir um exemplo que ele considerava “exemplar” e que pode ser considerado uma situação aparentemente corriqueira de sala de aula para sugerir como uma leitura referenciada teoricamente do professor – neste caso, referenciada no MCS - pode mudar completamente o entendimento da situação.

---

<sup>10</sup> No MCS evitamos utilizar o termo atividade para tarefa - como usualmente é utilizada em pesquisas com outros referenciais teóricos - para reservar o termo para o sentido proposto por Leontiev.

## Uma leitura da produção de significados em sala de aula

A situação “ficcional” que apresentaremos a seguir foi reelaborada a partir do que Lins apresentou em algumas de suas produções para esclarecer a sua audiência sobre os pressupostos do MCS. Originalmente foi apresentado em um contexto de ensino no qual os alunos poderiam ser de uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, envolvidos na atividade de resolver equações. Considerando que os alunos daquela turma já tinham estudado números negativos; a professora Tânia propõe, inicialmente, que os alunos resolvam a seguinte equação:  $3x + 10 = 100$ .

Sem maiores dificuldades os alunos apresentam a solução:  $x = 30$ . Mesmo assim, a professora vai ao quadro para resolver a equação e diz:

**Professora Tânia:** *Eu tenho 3 vezes  $x$  mais 10 igual a 100. Eu sei que  $x$  é a incógnita. Somando a ambos os lados da igualdade -10, a igualdade continua verdadeira, porque esta é uma propriedade da igualdade numérica. Então ficamos com  $3x = 90$ . E multiplicando a igualdade por  $1/3$  para isolar  $x$ , obtemos como resposta  $x = 30$ .*

Feliz com o êxito da turma, a professora propõe outra equação, apenas para a fixação do conteúdo estudado, como de praxe. A equação cuja solução deve agora ser encontrada é:  $3x + 100 = 10$ . Ao observar a turma, a experiente professora percebe que algo estranho está acontecendo e ao abordar alguns alunos, ela constata que, da perspectiva dela, eles nem sequer parecem estar diante de uma equação idêntica à anterior. Vários alunos dizem não saber resolver aquela equação. Ela ainda ouve o sussurro de Daniel conversando com Ana:

**Daniel:** *Isto não faz sentido... A professora enlouqueceu?*

**Ana:** *O quê? O que não faz sentido?*

A questão que se coloca é: o que pode estar acontecendo? Como entender as dificuldades dos alunos? Do nosso ponto de vista, um dos maiores desafios da profissão de professor é identificar e agir no momento em que dificuldades de aprendizagem são explicitadas pelos alunos. Nesse momento, existem dois caminhos possíveis e divergentes que gostaríamos de discutir para atacar o problema didático que se instalou.

O primeiro caminho, tomado em salas de aula desde os anos finais do Ensino Fundamental até a universidade, parte do princípio que o professor é o detentor do conhecimento e quem tem como incumbência transmitir seus conhecimentos aos alunos que, passivamente aprendem ouvindo. Assim,

considerando a situação acima, o possível “problema de aprendizagem”, se for considerado, será debitado na conta do aluno por não ter pré-requisito, ou por ser fraco ou por estar desatento. Mas se o aluno não entendeu, cabe ao professor explicar, repetir a explicação, convencer, mostrar ao aluno o caminho para resolver a equação proposta. Ao aluno que tem dúvidas resta a incumbência de ouvir, prestar mais a atenção, buscar entender a explicação dada, se esforçar!

A professora Tânia ao tomar esse caminho apresentará ao aluno a resolução da equação e, se ele ainda não entender, com muita boa vontade, ela apagará o quadro e repetirá o que havia dito da maneira mais clara e pausada possível. Sim ... da mesma maneira, dizendo:

**Professora Tânia:** *Eu tenho 3 vezes  $x$ , mais 100 igual a 10. Eu sei que  $x$  é a incógnita. Somando ambos os lados da igualdade por  $-100$ , a igualdade continua verdadeira porque esta é uma propriedade da igualdade numérica. Então ficamos com  $3x = -90$ . E multiplicando a igualdade por  $1/3$  para isolar  $x$ , obtemos como resposta  $x = -30$ .*

Chamamos a atenção para o fato de que numa sala de aula real se os alunos que não entendem a explicação do professor e sugerissem que a aula não deveria continuar sem que todos entendessem, o caos se instalaria. Pois para essa professora, além de novamente repetir a explicação, não haveria mais o que fazer e dizer.

Para ilustrarmos o segundo caminho, entrará em cena o Professor Romulo que tem à sua disposição o MCS para entender o que está acontecendo. Ele entende, por exemplo, estar frente a um problema didático e epistemológico, apontado nas seguintes perguntas: por que alguns alunos resolvem a primeira equação e não conseguem resolver a segunda? Por que alguns alunos produzem significados para o texto “ $3x + 10 = 100$ ” e não produzem para “ $3x + 100 = 10$ ”? Colocado o problema, surge uma nova questão: por onde começar nossa investigação sobre o que está acontecendo?

Com vistas a saber o que seus alunos conhecem sobre equações, a estratégia do Professor Romulo será deixá-los falar sobre equações a fim de analisar suas produções de significados. Porém, ele observa que de nada adiantaria questionar os alunos sobre a resolução da equação  $3x + 100 = 10$ , pois eles teriam pouco ou nada a dizer. Assim, sua estratégia será saber de alguns deles, como resolveram a primeira equação e, com base em suas justificações, buscar encontrar evidências de suas maneiras de operar a partir dos significados

produzidos, observando os objetos que estão sendo constituídos, suas crenças-afirmações, o núcleo a partir do qual eles estão operando, suas falas na direção de interlocutores. Ele então pergunta:

**Professor Romulo:** *Pessoal, quem pode me dizer como resolveu a equação  $3x + 10 = 100$ ?*

Ao serem questionados, Daniel e Cláudio pedem para falar. Eles então dizem:

**Daniel:** *Ora professor, de um lado tem  $3x$  mais 10 quilos e do outro tem 100 quilos, então tá equilibrado. Se eu tirar 10 quilos de cada lado, continua equilibrado. Daí, sobra  $3x = 90$ . Se eu divido 90 quilos em 3 partes iguais, continua equilibrado, e uma parte é 30 quilos. A resposta é  $x$  igual a 30.*

Enquanto Daniel falava o Professor Romulo observou que ele fazia gestos com as mãos que sugeriam uma balança de dois pratos. Por sua vez, Cláudio diz:

**Cláudio:** *Eu pensei assim:  $x$  é um número secreto. Multiplico por 3 e somo 10 ao resultado da multiplicação. O resultado é 100. Então eu tenho  $3x + 10 = 100$ , desfazendo isso fica  $3x = 100 - 10$  e  $3x = 90$  e desfazendo e de novo, fico com  $x = 30$ .*

O Professor Romulo constata, de imediato, que os dois alunos produziram diferentes significados a partir do mesmo resíduo de enunciação " $3x + 10 = 100$ ". Isto é, este texto foi constituído em objeto de dois modos diferentes por esses alunos e, para cada um deles, as transformações efetuadas na equação foram distintas. Conhecendo as justificações de cada um dos alunos é possível supor quais deles teriam dificuldade em resolver a segunda equação?

Observando as justificações de Daniel, seus gestos e sua fala, o Professor Romulo entende que os significados produzidos por aquele aluno estão relacionados ao fato de que se retirar dez quilos de cada lado de uma balança de dois pratos, ainda assim, continua equilibrada. Nesse caso a igualdade para Daniel tem o significado de equilíbrio. Essa era a maneira como ele operava. Assim, podemos dizer que a ideia de equação para esse aluno está associada à ideia da balança e isso explica porque ele incorporou o termo quilo a sua enunciação. Por isso, ele constitui números como pesos (10 quilos, 100 quilos).



O que acontece com Daniel pode ser compreendido ao retomarmos a pontuação feita por Lins (1994b, p. 37), de que “quando se encontram com textos do matemático (...) as pessoas de fato produzem significados que não são os do matemático, mas que as tornam capazes de falar a partir daquele texto”.

Ao observar o modo como Daniel opera, o professor Romulo entende que esse aluno poderia não produzir significados a partir da equação  $3x + 100 = 10$ . O aluno poderia questionar o fato de que se de um lado da balança há  $3x + 100$  (quilos) e do outro há 10 (quilos), a balança não poderia estar equilibrada. Por isso, não seria possível produzir significado a partir daquela equação.

Os significados produzidos por Cláudio sugerem que ele opera da seguinte maneira:  $x$  é um número que eu multiplico por 3 e somo 10, obtendo 100, isto é,  $3x + 10 = 100$ . Agora, desfazendo o efeito de somar 10, se eu subtrair 10 obtenho  $3x = 90$ . Se multiplico por 3, agora divido por 3 e obtenho  $x = 30$ . Nesse caso a igualdade tem outro significado, o de indicar um resultado. A maneira de operar de Cláudio lembra a ideia de máquina estado-operador.

Após ouvir as justificações de Daniel e de Cláudio, o Professor Romulo então pergunta à turma: quem não conseguiu resolver a equação  $3x + 100 = 10$ . Assim, ele tem como objetivo verificar suas suspeitas sobre quem teve dificuldade em resolver a segunda equação operando como resolveu a primeira equação. Dentre as respostas dadas pelos alunos estavam as de Daniel e de Cláudio:

**Daniel:** *Professor, não sei fazer! Essa equação está certa?*

**Cláudio:** *Eu também não consegui.*

O Professor Romulo então recorda a concepção de dificuldade proposta pelo MCS: Para Lins (1993b), uma dificuldade deve ser entendida de duas maneiras excludentes: ou ela caracteriza-se como um obstáculo epistemológico ou como um limite epistemológico. Um Obstáculo Epistemológico seria o processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado a partir de uma afirmação, mas não produz.

Já um Limite Epistemológico seria a impossibilidade de um aluno produzir significado a partir de uma afirmação, muitas vezes, decorrente de sua maneira de operar. Esse é o caso de Daniel que; ao se defrontar com a equação  $3x + 100 = 10$ , não produz significado a partir desse texto. A dificuldade para ele, pode ser: como de um lado há  $3x + 100$  (quilos), do outro tem 10 (quilos) e a balança está equilibrada? A ideia de balança não se aplica a esta equação! Caso Daniel não mude o seu modo de operar, ele não conseguirá resolver esta

equação, o que caracterizaria um limite epistemológico.

O caso de Cláudio é diferente, pois se ele reproduzisse a maneira como resolveu a equação  $3x + 10 = 100$  para resolver a equação  $3x + 100 = 10$ , não deveria, potencialmente, encontrar dificuldades; ele precisaria considerar que deveria desfazer o efeito de somar 100, como ele fez na primeira equação. O fato de Cláudio não conseguir resolver a segunda equação, considerando ter ele conseguido resolver a primeira do modo como fez, caracteriza essa dificuldade como um obstáculo epistemológico.

Vale destacar nessa altura que as dificuldades, no sentido que descrevemos acima, podem ser identificadas no momento que observamos a maneira de operar de nossos alunos tendo como referência os constructos apresentados pelo MCS. Eles tornam possível a leitura “fina” que Lins procurou estabelecer em sua construção teórica.

Para concluir nossa análise da resolução das equações, observamos que se retornássemos para a sala de aula da professora Tânia, para a observação da sua enunciação na tentativa de transmissão de conhecimento para os alunos Daniel e Cláudio, seria muito pouco provável que alguma aprendizagem ocorresse. Enquanto a professora falava na direção de um interlocutor, dos modos de produção de significado matemáticos - somar a ambos os membros da equação pelo simétrico de 10, multiplicar o resultado por  $1/3$  para obter a resposta, e operar com a ideia de igualdade numérica - os alunos falavam em outras direções, constituindo outros objetos.

Essa consideração tem o objetivo de chamar a atenção para a importância da compreensão do processo comunicativo como proposto pelo MCS e, em contrapartida, as limitações que se impõem à leitura do professor quando ele entende o processo comunicativo como transmissão de conhecimento.

## **Considerações Finais**

As pesquisas desenvolvidas tendo como referencial teórico o MCS e o relato de professores que o utilizam para ler seus alunos em sala de aula tem indicado sua potencialidade para o qual ele foi elaborado por Lins: ler, na medida do possível, “ao vivo” os significados produzidos pelos participantes de uma pesquisa ou os estudantes em uma sala de aula.

Entendemos que o MCS possui quatro palavras-chave centrais que o caracteriza, a saber: processo, dinâmica, interação e intervenção. De fato, todas as noções categorias como, por exemplo, conhecimento, núcleo, campo semântico... são processos. Como dizia Lins, inspirado por Vygotsky, “sendo um processo, ao ser colocado em marcha cria as condições para sua própria transformação”. (LINS, 2012, p.17)

Por ser processo possui uma dinâmica, ou dinâmicas próprias de cada sujeito da enunciação identificadas, por exemplo, pela história dos objetos – isto é, o processo de constituição e mudança dos objetos –; a fala na direção de interlocutores e possíveis mudanças de direção; o processo de impermeabilização, quando esse ocorre; o processo de nucleação – isto é, constituição e transformação de um núcleo –, tudo isso acontecendo de maneiras peculiares a cada um dos sujeitos quando buscam produzir significados para um texto como, por exemplo, resolver uma equação. E como observou Silva (2003, p. 135), “todos os elementos que constituem o processo de produção de significados – a constituição e transformação dos objetos, o processo de nucleação, a fala na direção de interlocutores, as legitimidades – estão interligados, e são interdependentes, de modo que mudanças ocorridas em um deles provocariam transformações em todos os outros. E são essas transformações que caracterizam a dinâmica do processo”.

A essa altura já deve ser possível afirmar que não se observa a dinâmica do processo de produção de significados se não ocorre a interação com aqueles a quem queremos entender. Para Lins (1999, p.85) ensinar é sugerir modos de produção de significados e aprender é internalizar modos legítimos de produção de significados. Com isso em mente, ele propôs a interação da seguinte maneira:

Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a novos lugares.

A ideia presente nessa citação sugere fortemente a interação e o fato de levar o outro a sério, cabendo assim ao professor uma busca por promover o diálogo. Pois, o monólogo já não é mais possível porque o processo comunicativo, como o entendemos, é outro; a transmissão de conhecimento não é o melhor caminho. E como vimos na seção anterior, professor e alunos podem estar falando para interlocutores distintos.

A interação possibilita a intervenção, por exemplo, nas dificuldades de aprendizagem de nossos alunos e a própria percepção da sua existência, só acontece a partir da interação com os estudantes, quando se dá espaço para que digam o que sabem. Nesse momento, entra no processo o exercício do estranhamento e do descentramento e a intervenção encontra um ambiente propício para acontecer. Assim, a escuta ativa do professor, tendo como referencial o MCS deve buscar identificar objetos sendo constituídos, estipulações locais, o núcleo que está constituído, a fala para interlocutores... Nesse momento, os processos de ensino e de aprendizagem se tornam interdependentes e com grande possibilidade de efetivação. É também para esta direção que o pesquisador interessado nesses processos deve estar voltado.

## Referências

BOERO, Paolo. The crucial role of semantic fields in the development of problems solving skills in the school environment. In: PONTE J. P. et al. (Eds.). **Mathematical Problem Solving and New Information Technologies**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, p. 77-91, 1992.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução a teoria e métodos. Porto: Porto Editora, 2013.

GOODMAN, Nelson. **Of mind and other matters**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1984.

LEONTIEV, A. N. **O Desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Editora Moraes, sd.

LINS, Romulo C. **A Framework for understanding what algebraic thinking is**. 330p. Phd Thesis (Doctorate in Mathematics Education) – Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, England, 1992.

LINS, Romulo C. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática**. SBEM – São Paulo, Campinas, SP, Ano 1, n 1, p.75-91, set., 1993.

LINS, Romulo C. Campos semânticos y el problema del significado em álgebra. UNO - **Revista de Didáctica de las Matemáticas**. Barcelona, Espanha, n. 1, p.45-56, julio, 1994a.

LINS, R. C. Eliciting the meanings for algebra produced by students: Knowledge, justification and Semantic Fields. In: PONTE, J.P; MATOS, J. P. (Eds.). **Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education** /PME – XVIII, v. 3, p.184-191, Lisbon, Portugal, 1994b.

LINS, Romulo C. Struggling for survival: the production of meaning. In: BSRLM, 1996, Sheffield (UK). **Anais ....** Sheffield (UK): BSRLM, February, 1996.

LINS, Romulo C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4. Ed. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção perspectivas em Educação Matemática)

LINS, Romulo C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, p. 75-94, 1999.

LINS, Romulo C. The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of semantic fields. In: SUTHERLAND, R. et al. (Eds.). **Perspectives on school álgebra**. London: Kluwer Academic Publishers, p.37- 60, 2001.

LINS, Romulo C. **Análise sistemática e crítica da produção acadêmica e da trajetória profissional**. 87p. Tese (Livre Docência) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2002.

LINS, Romulo C. O Modelo dos campos semânticos: estabelecimentos de notas e de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, p.110-128, 2012.

OLIVEIRA, Viviane C.A. **Uma Leitura sobre a formação continuada de professores de Matemática fundamentada em uma categoria de vida cotidiana**. Rio Claro: 2011, 204p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2011.

SILVA, Amarildo M. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática**. Rio Claro. 243p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2003.

SILVA, Amarildo M; LINS, Romulo C. Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática. **JIEEM- Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. v. 6, n. 2, 2013, p.1-30.

VIGOTSKII, Lev Semenovich.; LURIA, Alexander Romanovich.; LEONTIEV, Alex N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 7ª ed. São Paulo: Ícone, 2001.

## **Autores**

### **Amarildo Melchiades da Silva**

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

E-mail: XAMCOELHO@terra.com

### **Viviane Cristina Almada de Oliveira**

Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ

E-mail: viviane@ufsj.edu.br

### **Vitor Rezende Almeida**

E. M. Dante Jaime Brochado - SME de Juiz de Fora

E-mail: xyvitor@gmail.com

## Capítulo 4

# DOIS OLHARES SOBRE A APRENDIZAGEM DE UM FUTURO PROFESSOR DO CAMPO

*Airton Carrião  
Vanessa Sena Tomaz*

Este capítulo discute as aprendizagens de um futuro professor na Licenciatura do Campo, quando desenvolve a pesquisa para o Trabalho de Conclusão de Curso. Toma-se duas lentes teóricas que comungam da mesma raiz sociocultural, porém utilizam ferramentas de análise diferentes: a Teoria das Zonas e a Teoria da Aprendizagem Expansiva. A análise foca na forma como o próprio licenciando narra e interpreta suas ações na pesquisa sobre saberes matemáticos nas práticas de silagem em sua comunidade. Ao longo de sua trajetória acadêmica, participando de diferentes espaços de discussão, o licenciando reflete sobre suas experiências escolares, o que o permitiu identificar saberes matemáticos nas práticas de silagem e propor atividades escolares que dialogam com as questões do campo. O licenciando demonstra consciência do seu papel como professor que promove uma Educação Matemática do, e não no, Campo.

*Palavras-Chave:* Perspectiva sociocultural. Aprendizagem Expansiva. Teoria das Zonas. Educação do Campo. Educação Matemática.

## Introdução

A aprendizagem sempre foi uma questão presente na Educação, sendo abordada por diversas perspectivas teóricas desde o final do século XIX que, em linhas gerais, podem ser descritas como correntes estruturalistas, como nas teorias behavioristas (Skinner e Watson) e as construtivistas (Piaget e Ausubel) e as correntes das teorias sócio-histórico-culturais. Um ponto em comum entre as correntes estruturalistas é que a aprendizagem é vista como uma aquisição individual, os conceitos são internalizados pelo sujeito. Assim, o aprender é da

responsabilidade do sujeito, e o professor é um mediador e/ou facilitador nesse processo (SFARD, 1998). Já as teorias socioculturais enraizadas nos estudos de Vigotski e Leontiev focalizam o homem como um indivíduo social, segundo o qual as condições socioculturais são constitutivas da sua forma de ser e agir no mundo.

Apesar de apresentar as limitações que qualquer forma de agrupamento está sujeita, do ponto de vista das pesquisas, reunir as teorias sobre aprendizagem nessas duas grandes correntes nos ajuda a entender os papéis do sujeito e do contexto em cada teoria, tendo como objeto comum a aprendizagem. Os trabalhos no GT 9 da SBEM, por sua vez, concentram estudos em duas dessas teorias, as construtivistas e as socioculturais, tendo, em geral, como foco a aprendizagem do aluno em contextos formais de escolarização, como pode ser verificado em Carrião, Lautert e Spinillo (2016).

A maior parte dos estudos sobre aprendizagem dentro das perspectivas socioculturais ainda está centrada na aprendizagem da criança e do adolescente, porém nos últimos anos percebe-se um crescimento dos estudos sobre a aprendizagem do adulto, em particular do estudante universitário, dos jovens, adultos e idosos e dos professores. Também está cada vez mais em voga estudos de aprendizagens em outros espaços e contextos sociais, como hospitais, fábricas e movimentos sociais. Na Educação Matemática, o estudo da aprendizagem do professor tem sido uma questão cada vez mais presente no cenário internacional, em particular, depois das reformas educacionais do século XXI que ocorreram em vários países, como Estados Unidos, Austrália e Brasil (JAWORSKI & TERRY, 2008).

Neste capítulo, alinhados com as correntes das teorias socioculturais, situamos duas perspectivas de aprendizagem que focam nos aspectos socioculturais da experiência humana, destacando a dimensão social, cultural e histórica da aprendizagem - Teoria da Aprendizagem Expansiva (ENGSTRÖM, 1987) e Teoria das Zonas (GOOS, 2013) -, para analisar aprendizagens de um futuro professor em seu processo formativo na Licenciatura em Educação do Campo, ofertada pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), sendo ele mesmo um sujeito do Campo.

Adotamos essas teorias porque elas nos permitem compreender as aprendizagens desse licenciando por diferentes ângulos, utilizando ferramentas de análise diferentes. Por estarem enraizadas nos estudos de Vigotski, focam na ação dos sujeitos mediada por artefatos culturais e utilizam o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), definida por Vigotski (2007, p. 97) como,



distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.

Na perspectiva da Teoria da Aprendizagem expansiva, a ZDP foi redefinida como o espaço para transição expansiva da ação para atividade (ENGESTRÖM, 2000), ou seja, como a distância entre as ações diárias dos sujeitos e a forma historicamente nova da atividade social que pode ser gerada coletivamente, a partir de um *double bind* – dilemas sociais que não podem ser resolvidos por ações individuais. Na Teoria das Zonas, a ZDP é um conjunto de possibilidades de desenvolvimento que estão em processo de realização à medida que os indivíduos negociam sua relação com o ambiente de aprendizagem e as pessoas nele presentes (GOOS, 2013).

Antes de entrar na análise propriamente dita, nas próximas seções, faremos uma apresentação sucinta do contexto da Educação do Campo e da proposta de formação de professores na Licenciatura em Educação do Campo, da UFMG. Também de alguns aspectos das duas teorias socioculturais que suportarão nossa análise.

## **A Educação do Campo**

Na última década, ganham força demandas específicas para educação de grupos sociais vulnerabilizados ou historicamente subalternizados, entre eles aqueles que vivem no e do Campo, impulsionando políticas educacionais atentas às especificidades desses grupos. Destacamos entre elas, os programas de licenciaturas do Campo, especificamente criados para a formação de professores que atuam ou vão atuar nas escolas de suas comunidades. Ofertadas em grande maioria pelas universidades públicas, essas licenciaturas chegam a desestabilizar as práticas de formação de professores vigentes nas instituições, demandando mudanças nos currículos de formação correntes, e ampliam as concepções de escola e sua função social.

As escolas do Campo, em geral, são estruturadas a partir da proposta de uma educação territorializada, em sintonia com as pautas dos movimentos sociais. Para os movimentos sociais do Campo, “terra é mais do que terra”, pois reivindicar terra inclui confrontar relações produtivas, culturais, modos de vida,

modelos de desenvolvimento econômico, social e ambiental. A Educação do Campo sempre esteve presente nas lutas por, e na defesa de uma educação igualitária para todos, buscando ter legitimadas e reconhecidas as práticas do cotidiano e as tradições do Campo nos currículos escolares, consequentemente, na formação dos professores.

Desde a Lei das diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), lei 9394/96, quando se promoveu a desvinculação da escola rural dos meios e da performance escolar urbana, chancela-se uma escola do Campo ligada à vida rural e não urbanizada, coerente com um conjunto de relações produtivas, culturais, modo de vida, projeto de desenvolvimento econômico, social, cultural e ambiental, em substituição a uma escola para o campo. Nessa perspectiva, ela é um território de conhecimentos, de socialização de saberes, portanto, de disputas políticas.

A área de Educação Matemática não se omitiu diante das demandas educacionais das populações do Campo, pois estas, segundo Fernandes (2018, p. 31), trazem questões que problematizam modos pelos quais o “conhecimento pode romper com as lógicas urbanocêntrica e do ruralismo pedagógico que permeiam a educação escolar” acerca da matemática. Busca-se incluir práticas sociais da comunidade nos currículos, valorizando “os modos de produzir conhecimentos, compreender o mundo e dar significado às experiências da vida cotidiana de outros povos (como, não europeus, não brancos, não urbanos)” (KNIJNIK, 2004, p. 22). Dessa forma, as propostas de formação de professores do Campo que buscam atender essas demandas tensionam os cenários formativos que historicamente legitimam modelos centrados em conhecimentos disciplinares e metodologias que negligenciam ou subjugam saberes e práticas produzidos no e pelo Campo.

Na UFMG, a proposta de formação de professores do Campo é desenvolvida em estreito diálogo com os movimentos sociais camponeses e inclui um curso de Licenciatura do Campo que compõe o rol de cursos de graduação da universidade. São ofertadas 35 vagas anuais, alternadamente para as quatro habilitações: Ciências Sociais e Humanidades; Ciências da Vida e da Natureza; Línguas, Artes e Literatura e Matemática. A Licenciatura do Campo se estrutura a partir da “pedagogia da alternância”, demarcando momentos em que os estudantes estão na UFMG (Tempo Escola) e os que estão no campo (Tempo Comunidade). Um dos componentes curriculares desse curso, envolvendo todas as habilitações, é a obrigatoriedade da pesquisa com referência em questões

socioculturais e ambientais do Campo para a produção de um trabalho de conclusão de curso (TCC), um dos requisitos para concluir o curso.

Na análise que propomos neste capítulo, utilizamos os relatos do próprio licenciando em seu TCC para discutir como as questões que emergem do Campo dão significado aos saberes matemáticos identificados como tais pelo licenciando, no contexto da Educação do Campo.

## **Um breve panorama teórico**

Segundo Goos (2012), as teorias socioculturais têm sido usadas de forma mais eficaz para aumentar a compreensão sobre a aprendizagem dos professores do que para mudar a prática de sala de aula, porém ela defende que essas perspectivas podem, além de explicar a prática observada, contribuir com as pesquisas que buscam ter impacto nas salas de aula. Neste capítulo, buscamos compreender a aprendizagem de um futuro professor do Campo, porém sem perder de vista as mudanças que ela poderá desencadear na sala de aula na escola da sua comunidade.

Para essas teorias, o indivíduo é percebido como ser social, portanto, sua aprendizagem é resultado das relações sociais em que os sujeitos estão inseridos e, assim, a aprendizagem não se separa do desenvolvimento humano (VIGOTSKI, 2008). Nesse sentido, para estudar a aprendizagem deve-se levar em conta, além do indivíduo, o seu meio social e os meios de mediação, pois o pensamento humano é essencialmente social na sua origem. A aprendizagem, portanto, não é uma aquisição pessoal, mas sim um processo de tornar-se um participante de uma atividade social.

O indivíduo, porém, não desaparece, é a noção de individualidade que deve ser reinterpretada como a interseção única das identidades sociais e culturais de cada pessoa. O desenvolvimento humano só se torna possível a partir de inter-relações dinâmicas e dramáticas entre os sujeitos concretos e a sociedade e não se reduzem às suas interações externas. Segundo Dafermos (2015), dentro da perspectiva vigotskiana, esse desenvolvimento não se dá de forma linear com acúmulo de mudanças quantitativas, mas sim em uma forma contraditória de progressão e regressão, integração e desintegração.

Lerman (2013) aponta também a existência de uma grande variedade de teorias sob esse guarda-chuva das teorias socioculturais, porém neste capítulo, utilizamos duas delas, uma centrada na expansão da ideia de Zona de Desenvolvimento Proximal (Teoria das Zonas) e outra nos processos de aprendizado nos quais o próprio sujeito da aprendizagem é transformado de indivíduo isolado em coletivos e em redes que começa a questionar a lógica e a ordem das suas atividades (Teoria da Aprendizagem Expansiva). Ambas têm origem nos trabalhos de Vigotski, mas, como vimos acima, trilharam caminhos distintos no estudo da aprendizagem.

Ainda para o que é proposto neste capítulo, nos é útil estruturar nossa unidade de análise. Conforme aponta Lerman (2013), o conhecimento está primeiro no plano intersubjetivo e, posteriormente, no plano intrassubjetivo, de modo que a unidade de análise;

deve incluir, portanto, o sujeito, a situação, a tarefa, a atividade, o professor e os alunos, senão também fora da sala de aula, pois estes constituem o plano intersubjetivo. Para fins de pesquisa, podemos escolher um foco particular, mas isso significa apenas que os outros elementos do contexto intersubjetivo e histórico-cultural estão fora de foco, ou em segundo plano, não ausentes (LERMAN, 2013, p. 629).

Entendemos que mesmo sendo muito difícil, ou impossível, analisar todos os aspectos envolvidos em uma atividade, como alerta Lerman (2013), não podemos perder de vista que em nossa análise sempre estamos deixando de considerar elementos que influenciam o aprendizado.

## **Teoria das Zonas**

Ao fundamentar suas ferramentas teóricas, Goos (2013) aponta para uma complexa unidade de análise para as pesquisas na perspectiva sociocultural que pretendem apreender a dinâmica das interações. Baseada em Lerman, Goos observa que

Ele identificou a necessidade de pesquisas em Educação Matemática para desenvolver relatos de aprendizagem que explicam como a individualidade e a agência<sup>11</sup> podem ser entendidas no contexto das experiências sociais e culturais de uma pessoa, e sugeriu que uma unidade de análise apropriada pode ser a pessoa-na-prática-na-pessoa. A primeira parte dessa unidade, pessoa na prática, reconhece que o objeto de estudo é mais do que a cognição ou afeto individual, pois destaca a noção de aprendizagem por meio da participação social. A segunda parte, prática em pessoa, implica que a participação desenvolve identidades à medida que a prática se torna parte do indivíduo (GOOS, 2013, p. 522).

Neste sentido, usando a analogia de Lerman, estaremos aqui tomando como unidade de análise o licenciando do campo-na-prática de pesquisa do TCC-no-licenciando do campo.

A lente de análise da Teoria das Zonas apresentada por Goos (2013), que é uma adaptação dos trabalhos da teoria das Zonas do desenvolvimento infantil de Valsiner (1997), foi desenvolvida para a pesquisa sobre ensino e a formação de professores (GOOS, 2010). De fato, a teoria das Zonas é uma reinterpretação do conceito de Vigotski de zona de desenvolvimento proximal (ZDP) que busca incorporar o ambiente social, os objetivos e as ações dos participantes. Nessa extensão da ZDP são incluídas duas novas zonas, a Zona de Livre Movimento (ZLM) e a Zona de Ação Promovida (ZAP), que definiremos a frente. Segundo Goos (2013), a ZLM e a ZAP são dinâmicas e interrelacionadas, formando um complexo ZLM/ZAP que é constantemente reorganizado pelas interações. Nesta teoria, a ZDP é criada e subserviente a essas duas zonas, sendo o complexo ZLM/ZAP que caracteriza as oportunidades de aprendizagem (GOOS, 2010).

À luz dessa perspectiva teórica, neste trabalho, direcionados à nossa unidade, entendemos como Goos (2013, p. 521), que “a aprendizagem do professor como uma mudança na participação nas práticas sociais que desenvolvem suas identidades profissionais, e não como a aquisição de novos conhecimentos ou crenças internas ao indivíduo.”

---

<sup>11</sup> Estamos traduzindo o termo *agency* por agência, usando o sentido dado por Houaiss on-line, que é: Capacidade de agir, de se desincumbir de uma tarefa; diligência, atividade, indústria.

## Teoria da Aprendizagem Expansiva

A outra perspectiva de aprendizagem que adotamos como lente análise neste capítulo é a Teoria da Aprendizagem Expansiva (ENGESTRÖM, 1987), que por sua vez, se fundamenta na Teoria Histórico-Cultural da Atividade (CHAT) (ENGESTRÖM, 1987; LEONTEV, 1978) e nos trabalhos de Bateson (1972).

Os estudos acerca do conceito de Atividade foram iniciados na década de 1920 União Soviética, com base na Psicologia Histórico-Cultural, apoiados inicialmente nas contribuições de Vigostki. O conceito de atividade, de acordo com Leontiev (1978), representa uma forma específica de existência social que inclui mudanças cruciais da realidade social. Assim, uma atividade consiste em um grupo de pessoas (sujeitos) engajadas em um mesmo propósito, com uma direção para o seu trabalho (objeto). O que distingue uma atividade de outra é seu objeto, uma vez que ele dá a cada atividade uma direção específica. Na perspectiva da CHAT, como proposta por Engeström (1987) há um universo mais amplo de vozes, incorporando questões de diversidade e diálogos entre diferentes tradições e perspectivas culturais. Nessa perspectiva, o conceito de aprendizagem expansiva está relacionado à compreensão do “homem” como ser histórico e social – ao mesmo tempo que ele é resultado e promotor da sua própria história por meio das interações sociais.

A aprendizagem expansiva, desenvolvida pelo pesquisador Yrjö Engeström, também utiliza as categorias lógicas de aprendizagem propostas por Bateson (1972), segundo o qual há três níveis de aprendizagem, sendo o terceiro aquele que depende das contradições na atividade humana. Quando essas contradições são percebidas pelos sujeitos no curso de suas ações, eles começam a questionar a prática vigente, promovendo mudanças, o que caracteriza um tipo de aprendizagem que é essencialmente um empreendimento coletivo (ENGESTRÖM, 1987). Neste nível de aprendizagem, associado por Engeström (2001) como aquele que caracteriza a aprendizagem expansiva, aprende-se sobre as/acerca das aprendizagens dos níveis anteriores (BATESON, 1972, p. 304). A perspectiva de aprendizagem expansiva não se separa de desenvolvimento humano, e dialeticamente possibilita que novas aprendizagens aconteçam, de modo que as relações sociais, o conhecimento sistematizado e as práticas culturais são essenciais (VIGOTSKI, 2008).

Como em ambas as teorias aqui adotadas a análise envolve elementos que estão em processo, é necessário se reconstruir a trajetória de ação do sujeito,

para tanto, adotamos uma abordagem interpretativa das ações de formação do licenciando, desde a sua escolarização básica ao processo de produção do TCC na licenciatura.

Nosso material de análise compreende os relatos das experiências vividas pelo licenciando no seu percurso formativo presente no texto do seu TCC. O contexto de formação também é descrito a partir do documento da proposta pedagógica do curso e dos relatos do licenciando em seu TCC. Buscamos nesses relatos reconstruir a trajetória de ações de pesquisa e, assim como Vargas e Nicolaide (2019), direcionamos nossa análise para a forma como o próprio licenciando interpreta suas experiências de pesquisa e estrutura o mundo social do qual faz parte. Isso inclui detalhes sobre sentimentos, tais como, pensamento e emoções, sendo esta uma abordagem metodológica que nos permite desvelar conceitos e organizá-los de forma explicativa, ampliando as possibilidades de compreensão das aprendizagens. Entendemos ser este um bom exercício de análise à luz de duas lentes teóricas que comungam da mesma raiz, mas que utilizam de ferramentas diferentes.

## **O TCC: Pesquisa sobre saberes matemáticos na prática de silagem da fazenda Santa Helena - Icarai de Minas**

O autor do trabalho é Cleuves Samuel Alves da Rocha, que chamaremos Samuel. Ele cursou a licenciatura em Educação do Campo na UFMG, tendo estudado toda a sua vida em uma escola do Campo. É um jovem que participa da sua comunidade, engajado em grupos religiosos e outras atividades sociais. Filho de um trabalhador do campo, ajuda a família no plantio e em outras atividades. Ingressou no curso de licenciatura do Campo, na habilitação em Matemática, em 2016, juntamente com 35 estudantes de diferentes regiões de Minas Gerais, todos com vínculo com o campo.

Além de temáticas sobre políticas para Educação do Campo, currículo e práticas educativas da Educação Matemática, incluindo os conteúdos da educação básica, um eixo estruturador da formação nessa licenciatura é o desenvolvimento de uma pesquisa, ao longo dos quatro anos de curso, que investiga questões relacionadas às práticas sociais das comunidades, essa sistematizada em um TCC. Inicialmente, Samuel propôs pesquisar as práticas matemáticas que os agricultores desenvolvem nas etapas da silagem, uma atividade importante

na sua comunidade que vive da pecuária leiteira. Planejava acompanhar os agricultores em um ciclo de produção de silagem em uma fazenda onde seu pai trabalha. Devido às mudanças no cronograma de plantio, Samuel teve de rever os procedimentos de pesquisa, optando por entrevistas com os donos e funcionários da fazenda.

Além disso, ao iniciar a análise das entrevistas e frente às discussões que surgiram nas interlocuções com as disciplinas do curso e nos momentos individuais e coletivos de orientação, o foco da investigação foi mudando em direção aos saberes matemáticos que circulam nas práticas dos trabalhadores do campo. De acordo com seu relato, o tema de pesquisa resulta de sua trajetória pessoal, do uso do território onde vive, bem como de questões da Educação Matemática na escola do Campo, levantadas durante as disciplinas que cursou na licenciatura.

O TCC tem 69 páginas, divididas em oito seções, além da introdução, referências e anexos. Nessas seções, o autor contextualiza o tema de pesquisa nos estudos sobre a Educação do Campo e da Educação Matemática; apresenta o contexto territorial da região onde vive e descreve a abordagem metodológica que adota na pesquisa. Detalha passo a passo a atividade de silagem na fazenda, baseando-se em entrevistas com um dos proprietários e com os agricultores; identifica os saberes matemáticos que ele reconhece em cada etapa da prática de silagem, a partir da descrição feita pelos agricultores; reflete sobre a inclusão desses saberes e da própria prática de silagem no currículo da escola do Campo, fundamentando-se em abordagens etnomatemáticas. Finaliza o texto propondo atividades didáticas que possam servir de referência a professores do Campo que optem por trabalhar práticas socioculturais da comunidade para ensinar matemática na escola do Campo.

Durante as sessões de orientação, individual e coletiva<sup>12</sup>, o licenciando enfatiza que a silagem é uma atividade muito importante economicamente dentro da sua comunidade, que está em uma região de tradição de pecuária leiteira. O termo silagem é usado para descrever o processo de produção de matéria verde para alimentação de rebanho bovino, prática muito comum em sua região, envolvendo basicamente cinco etapas: preparação do solo, o plantio do sorgo, a pulverização para combate das pragas; colheita e ensilagem do material,

---

<sup>12</sup> Cada estudante tem um orientador e a cada semestre há momentos coletivos de orientação, quando há socialização do trabalho e discussão sobre o mesmo. Nesses momentos, os estudantes recebem contribuições de outros professores e dos colegas de turma. Os temas de pesquisa também são chamados nas discussões dentro das disciplinas.



etapa em que o silo é construído.

No TCC, o licenciando também reflete sobre seu percurso de formação no curso, acessando sua memória escolar e problematizando o ensino de matemática durante sua educação básica. Ele justifica suas escolhas para o tema de pesquisa e enfatiza mudanças na sua relação com a matemática, a partir das discussões que fez nas disciplinas. Ele cita particularmente as disciplinas de Processos de Ensino e Aprendizagem no Lecampo (ROCHA, 2020, p. 10). Portanto, em seu relato, o licenciando expressa de diversas formas suas próprias reflexões sobre a importância desses saberes do Campo que foram socializados durante a licenciatura. Ele reforça em diferentes partes do texto como compartilhar as experiências na licenciatura o permitiu olhar para a escola do Campo de um novo modo (ROCHA, 2020, p.11 e 62). Assim, analisar como ocorrem essas aprendizagens é a contribuição que este capítulo pode dar para o campo da Educação Matemática, particularmente, para refletir sobre processos de aprendizagem que relativizam/questionam teorias que consideram aprendizagem humana como exercício cognitivo individual.

### **Um sistema de atividades ‘Saberes matemáticos na prática de silagem’: revelando aprendizagens expansivas**

Quando analisamos as aprendizagens de Samuel, um licenciando da Educação do Campo, à luz da Teoria da Aprendizagem Expansiva (ENGESTRÖM, 1987), buscamos também tensionar paradigmas e modelos que têm servido a políticas de formação de professores que negligenciam ou subjugam as especificidades de grupos sociais com seus saberes e práticas sociais no ensino de matemática nas suas escolas.

Ao se engajar em uma atividade de pesquisa, Samuel tinha o firme propósito de envolver os agricultores da fazenda, pois, para ele, são estes os que realmente têm autoridade para fazer e falar sobre a prática de silagem. Ele compartilha cada passo do seu percurso investigativo nas sessões de orientação e nas discussões com os colegas de turma e outros professores. Dessa forma, a produção de um TCC no contexto da Licenciatura do Campo não é um trabalho individualizado, ou mesmo solitário, como todos os alunos vêm do Campo, a forma como a pesquisa é desenvolvida favorece a troca de experiências e o aprendizado a cada nova fase da pesquisa.

Nesse sentido, temos um grupo de pessoas que se engajam na atividade de pesquisa e articulam ideias sobre seus temas. No caso do Samuel, o foco da investigação foi sendo direcionado para identificar saberes matemáticos que circulam nas práticas dos trabalhadores do campo. Nos momentos de discussão do tema da pesquisa, o grupo de estudantes e professores indica referências sobre a silagem, ressalta diferenças dessa prática em suas comunidades, compartilha experiências de trabalho e problematiza visões e compreensões sobre os temas de pesquisa de todos os participantes. Assim, a atividade de pesquisa de Samuel está entrelaçada à atividade dos outros colegas, da mesma forma, atrela-se ao trabalho dos agricultores, na medida em que, de algum modo, ao explicar para o Samuel a prática de silagem também os agricultores refletem sobre ela.

Após um tempo tentando identificar a matemática dos agricultores nas práticas de silagem e participar de discussões com os colegas, orientadora e outros professores, Samuel reorienta suas ações de pesquisa direcionando-as para identificar os saberes que ele considera como matemáticos na prática de silagem percebendo ser possível estabelecer relação entre o cotidiano do trabalho no campo e a formação matemática em uma escola que é do Campo.

Com essa nova configuração, compreendemos que, ao investigar e refletir sobre os saberes matemáticos em uma prática social, levantando questões socioculturais e ambientais de sua comunidade, o estudante Samuel engaja-se, em uma 'Atividade' específica de formação de professores do Campo que se situa em uma "zona de fronteira entre o trabalho e a vida" (CUNHA, 2009). Samuel direciona sua atividade de pesquisa com referência em uma comunidade formada por diferentes grupos: os agricultores, os colegas de turma e sua orientadora. Pela orientadora, ele faz a ponte com o mundo acadêmico potencializando experiência na sua área de formação (Educação Matemática); por meio dos agricultores, ele mantém o vínculo com sua origem e com as questões que permitem a permanência dessas pessoas no campo. Estar na licenciatura do Campo na UFMG, cuja proposta é estreitamente ligada aos movimentos sociais dos povos camponeses, o possibilita experiências com outros grupos que também militam no campo e dele sobrevivem, fortalecendo os vínculos com o campo.

Segundo Engeström (1987), uma atividade é sempre entendida como um fenômeno coletivo em uma comunidade, os indivíduos só podem realizar ações dentro de um sistema mais amplo de atividades coletivas que interagem. Com seus modos próprios de estar, de conhecer e de ser dos camponeses de sua comunidade, Samuel se engaja em um sistema de atividade mais amplo de

formação docente que, por sua vez, está conectado a outros sistemas.

Ainda segundo Engeström (1987), qualquer sistema de atividades é caracterizado pelo seu objeto que pode ser expresso como preocupação, motivação, esforço e significado. A motivação de Samuel é identificar os saberes matemáticos na prática de silagem, uma forma de valorização práticas de sua comunidade, como também promover transformações na atividade da própria escola do Campo. Ele é enfático ao relatar, em seu TCC, sua experiência como estudante da escola do campo, trazendo a historicidade<sup>13</sup> da atividade que desenvolve no momento: “As aulas que relacionavam os conteúdos com a nossa realidade, ainda que não eram constantes, foram importantes para que eu pudesse aprender matemática.” (ROCHA, 2020, p.10).

Assim, apoiados em Engeström (1987), pela trajetória de ações do licenciando, a partir do seu TCC, é possível descrever a Atividade de pesquisa sobre saberes matemáticos na prática de silagem como um fenômeno coletivo com referência em uma comunidade do campo. Como pudemos extrair dos relatos contidos no TCC, no decorrer da pesquisa, a experiência formativa por meio da pesquisa vai deixando de ser um empreendimento individual do licenciando, um trabalho solo, passando a ser uma produção coletiva que articula diferentes comunidades, sujeitos e seus modos próprios de dar sentido às suas ações. Portanto, para a análise consideramos todo o percurso da pesquisa e não somente o produto (texto final do TCC), pois na perspectiva que adotamos, os critérios e padrões de aprendizagem são construídos por meio de análise histórica.

No sistema de atividades em discussão, temos um licenciando da Educação do Campo (sujeito da atividade), filho de agricultores, desenvolvendo ações de pesquisa sobre saberes matemáticos (objeto da atividade) por meio das práticas de silagem na sua comunidade (artefato de mediação), buscando elaborar propostas de abordagem da matemática nas escolas do Campo que estejam sintonizadas com as práticas socioculturais da comunidade (resultado/produto da atividade). É nesse contexto sociocultural que o licenciando, Individual e coletivamente, desenvolve a Atividade de pesquisa, possibilitando-nos identificar aprendizagens.

Pela historicidade dessa atividade de pesquisa, percebemos que as relações que Samuel estabelece com os agricultores e as práticas de silagem que esses desenvolvem são atravessadas pela sua história de vida pois, além de filho

---

<sup>13</sup> Engeström (1991) se refere ao princípio da historicidade para dizer que uma atividade se transforma ao longo de um período de tempo.

de agricultor, é alguém que conviveu desde criança na fazenda onde trabalham. A proximidade com os membros da comunidade lhe possibilita dialogar com os agricultores, trazendo suas vozes para a pesquisa. As vivências em outros espaços formativos (licenciatura), onde dialogava com outros colegas, professores e líderes comunitários, lhes convocam a refletir sobre as práticas produtivas e sociais de sua comunidade e o seu papel nos movimentos sociais como um jovem do Campo. Nesses diferentes espaços formativos, ele vai construindo uma compreensão do Campo que problematiza o sentido de uma escola que não seja verdadeiramente do Campo e o papel sociopolítico da matemática na formação escolar dessas pessoas.

Por muito tempo, o espaço rural foi visto como lugar de atraso, que não havia pessoas capazes de desenvolver conhecimento e assim repassar aos demais daquela localidade, ou seja, não havia necessidade de escolarização. O estado brasileiro não olhava para o meio rural como lugar propício em conhecimento, mas sim como um lugar que não havia fundamentos nem condições de desenvolvimento. (ROCHA, 2020, p. 14)

Quando refletimos sobre a formação do professor de matemática que atuará no campo, percebemos que as práticas de formação ainda não observam todos os princípios de uma Educação do Campo. Por isso, é preciso se adequar as propostas de curso, tendo um olhar para as especificidades dos alunos e do território em que eles vivem. (ROCHA, 2020, p. 16)

Não obstante seu engajamento nas lutas pelos direitos dessa população e por relações menos exploratórias no Campo, seu olhar para as relações de trabalho forjadas na prática de silagem é atravessado pelas relações afetivas de amizade que ele e sua família possuem com os donos da fazenda e com o território onde ela está localizada.

Assim, as ações de pesquisa que resultaram no TCC seguem *regras*, implícitas e explícitas, referenciadas em uma *comunidade* que inclui tanto os agricultores da fazenda e outros trabalhadores do campo, as famílias, os líderes de movimentos campesinos, gestores públicos, os líderes do setor produtivo da agropecuária que controlam os insumos para a produção de silagem, entre outros; como também os professores e pesquisadores da Educação do Campo e da Educação Matemática (os professores do curso, incluindo sua orientadora, e outros estudantes, os professores e pais das escolas do Campo na sua cidade, os formuladores de currículo escolar).

Acompanhando as ações coletivas e individuais de Samuel, por meio da descrição que ele faz de seu percurso formativo, percebemos que ele se depara com forças opostas que evidenciam tensões, conflitos e dilemas à sua formação em Educação Matemática que influenciam a direção tomada para a pesquisa: O que ele busca na pesquisa são as práticas de silagem ou as práticas matemáticas? Ao produzir a silagem, os agricultores desenvolvem intencionalmente práticas matemáticas OU são as experiências e intencionalidades do licenciando que podem identificar os saberes matemáticos que circulam ou são mobilizados na prática de silagem? Os saberes matemáticos são mobilizados na prática de silagem dos agricultores OU os saberes matemáticos escolares são meios para descrever/ desenvolver a prática de silagem? Como se dão as relações de trabalho entre os agricultores, o que inclui sua família, e os donos da fazenda, considerando os fortes laços de amizade?

Analizando os dilemas vividos pelo estudante, podemos perceber que ele está diante de uma contradição que se manifesta na atividade de formação do professor do Campo na área de Educação Matemática: compreender as práticas de silagem da sua comunidade para inclusão no currículo da escola do Campo, tendo os saberes matemáticos como ferramentas para revelar as relações de trabalho e os processos tecnológicos que fortalecem as práticas campesinas *versus* compreender as práticas de silagem da sua comunidade para identificar os saberes matemáticos que podem ser trabalhados na escola do Campo, tendo esses saberes matemáticos meramente como conteúdos disciplinares. Ou seja, está entre uma investigação que se sustenta por uma visão empirista da Etnomatemática<sup>14</sup> que centra nas discussões sobre a matemática praticada pelos diferentes povos e culturas, que às vezes compartilham de uma mesma prática, mas que não necessariamente, sejam iguais na forma de ser realizada *versus* uma investigação com viés mais político e social que problematiza práticas escolares disciplinares, a individualização do pensamento, a hegemonia de certos saberes e a adaptação da lógica da vida capitalista à escola, em tempos e espaços.

Analizando os relatos, registrados no seu TCC e com as observações durante as sessões de orientação, percebemos que, ao se adentrar nos estudos sobre Etnomatemática, Samuel passa a olhar para a silagem pelo seu potencial

---

<sup>14</sup> Knijnik (2004) propõe uma organização de temáticas que reúnem trabalho dentro da Etnomatemática, sendo uma delas, que abarcaria o foco da pesquisa de Samuel, Etnomatemática e Educação Rural ou Etnomatemática e formação de professores. Por sua vez, em um levantamento da produção brasileira sobre Etnomatemática, realizado por Alengui e Rosa (2016), indica seis dimensões da Etnomatemática, sendo que a pesquisa do Samuel poderia ser englobada nas dimensões educacional e política.

pedagógico, explorando saberes matemáticos que podem ser socializados na escola do Campo. A decisão de compreender mais a fundo a prática silagem exigiu um refinamento dessa prática que trouxe à tona os saberes matemáticos com referência nos estudos do campo da Educação Matemática. Dessa forma, o compartilhamento da prática de silagem com os donos e funcionários da fazenda ganha uma dimensão acadêmica e pedagógica, o que gera tensão na atividade de pesquisa: os funcionários e os donos da fazenda descrevem a prática de silagem, porém para fins da pesquisa é preciso ‘falar’ sobre a matemática nessa prática. São por meio dos conhecedores (agricultores) da prática de silagem que ele, como licenciando, pode identificar esses saberes para os propósitos aos quais ele necessita. Portanto, metodologicamente, não seria o caso de compartilhar a prática de silagem com os agricultores, mas de entender como opera o discurso da matemática nessas práticas. Enfrentar essa tensão é transpor abordagens etnomatemáticas de uma visão mais empirista para uma visão crítica e sociopolítica.

No andamento da atividade de pesquisa, analisando as entrevistas com os próprios agricultores e confrontando-as com outras perspectivas de Etnomatemática, como as apresentadas nos estudos de Knijnik (2003), Samuel percebe que o interesse em explicitar os saberes matemáticos nas práticas é dele não dos agricultores, portanto, qualquer tentativa de descrever uma matemática dos agricultores nessa prática seria inadequada.

A partir da descrição do processo de silagem, fui identificando saberes que eu reconheço como matemáticos, isto é, saberes mobilizados em práticas que envolvem medição, cálculos de valores e outros, porcentagens, visualização e representação do espaço. Identificados os saberes, eu discuto abordagens etnomatemáticas para elas e levanto algumas ideias que podem compor atividades que me parecem ser interessantes para o ensino de matemática na escola da minha comunidade. (ROCHA, 2020, p. 28)

Na perspectiva da CHAT, utilizada por Engeström e Sannino (2010, p. 5), dar voz aos agricultores na atividade de pesquisa, inclui a multivocalidade bakhtiniana para uma multiplicidade de vozes e contextos. A aplicação dessas ideias na pesquisa da aprendizagem expansiva significa que todos os conflitos e vozes contemporâneas de vários grupos e estratos no sistema de atividade devem ser envolvidos e utilizados. Como mostra Bakthin, definitivamente, o trabalho de Samuel inclui as vozes e gêneros não acadêmicos das pessoas da sua

comunidade. No texto, o estudante inclui a explicação do tratorista sobre como faz a medida do terreno para preparar a terra para o plantio

Tratorista: Isso aí é o seguinte. A terra, a terra que, se ocê não tiver nada pa medir, né que tem que ter né, vamos supor cê tem que ter alguma coisa pra medir a terra pro cê saber o tanto que cê gasta. Mas se ocê não tiver nada pa medir e for querer saber for no trator, cê sabe pela hora do trator, vamo supor se é 3 hectare se o cê gastar, vamos supor, se é 3 hectare cê vai gastar ai 10 hora de serviço, cê vai gastar 3 hora e pouco por hectare, 3:20, 3:30 por hectare, o que cê gasta pa gradiar, mas aí tal, cê vem, que a terra precisa de nivelar, precisa desse trem tudo, se ocê for querer saber isso tudo também, é pelas hora do trator; que 10 hora que cê faz num trator gradiano, cê gasta 5 nivelano. Se for pa plantar no lugar que cê gasta é 10 hora do trator gradiano e 5 nivelano, cê vai gastar 3:30 plantando, e é desse jeito, o sistema é esse, se ocê não tiver nada pa medir, que é pa medir, tem que ter as coisas pa medir né (ROCHA, 2020, p. 31).

Samuel se engaja em uma atividade de pesquisa sobre a silagem para identificar saberes matemáticos 'no dizer dos agricultores'. Ele direciona suas ações para a silagem como campo de pesquisa para identificar saberes matemáticos que vão compor as atividades escolares, não mais como filho de agricultor que auxilia o pai. Ou seja, envolve movimentar-se, individual e coletivamente, em uma zona de desenvolvimento que o direciona para o objeto da atividade: os saberes matemáticos. Ele se movimenta em uma zona coletiva de desenvolvimento proximal em que a aprendizagem e o desenvolvimento estão no nível de atividades coletivas (ENGSTRÖM, 1987).

Assim, à luz da historicidade dessa atividade de pesquisa, fazemos referência às relações dinâmicas internas e às mudanças históricas que precisam ser consideradas na análise do Sistema de Atividades da pesquisa de Samuel, bem como dos seus componentes, percebemos como ele enfrenta as tensões, dilemas e conflitos. Inicialmente, o licenciando buscava participar de práticas matemáticas na silagem, almejava perceber como os agricultores as desenvolvem, apoiando em uma abordagem da Etnomatemática que o possibilita dar visibilidade e descrever a matemática praticada pelos agricultores ao fazer a silagem. Dessa forma, ele acreditava que, ao ressaltar a matemática dos agricultores, ela poderia ser utilizada para o ensino na escola.

No andamento da atividade, ele percebe que valorizar as práticas da sua comunidade e problematizar as práticas escolares para a escola do Campo exige expressar as inter-relações entre os saberes populares das práticas da silagem e os saberes acadêmicos, incluindo os saberes matemáticos. Dessa forma, ele acredita que os jovens e adultos da comunidade que estão na escola do Campo poderão compreender, de modo mais aprofundado, sua própria cultura, sem deixar de ter acesso à produção científica e tecnológica contemporânea. Ele então enfrenta a tensão e assume ele mesmo, apoiado na sua formação matemática no curso, reconhecer esses saberes e seguir em sua atividade de pesquisa que deveria resultar na formulação de proposta de ensino de matemática para a escola do Campo, ou seja, transformar a realidade escolar.

Dentro da minha comunidade, a silagem é uma atividade muito presente, portanto, acho importante que ela esteja presente nas práticas escolares. Reconheço que é na matemática a área em que ela pode ter grande espaço porque possibilitará aos estudantes conhecer e participar de práticas em que saberes matemáticos ligados à silagem estarão presentes, apropriar da linguagem utilizada pelos produtores, ampliando seu repertório linguístico e conceitual situado nas práticas culturais de sua comunidade. (ROCHA, 2020, p. 62)

Assim, baseados na historicidade da atividade, captamos os espaços e tempos formativos da trajetória da pesquisa, identificando os problemas enfrentados pelo licenciando, as tensões vividas e as novas ferramentas que foram criadas para resolver as tensões. Como esclarecem Engeström e Sannino (2010), ao identificar as tensões na atividade e as formas como os sujeitos as enfrentam, possibilita perceber as formas eficazes de articular e descrever as possíveis zonas de desenvolvimento proximal trilhadas pelo estudante no percurso formativo que é coletivo.

Samuel redireciona suas ações e percebe que, ao optar por compreender melhor a prática de silagem da sua comunidade, tendo como foco principal as conexões entre a Educação Popular e a vertente da Educação Matemática, se aproxima de uma outra abordagem etnomatemática, mais política que busca entender e explicitar as inter-relações entre o conhecimento popular e o conhecimento acadêmico no contexto das práticas específicas do grupo de camponeses, legitimando esses últimos (KNIJNIK, 2003). Nessa perspectiva etnomatemática, Samuel deveria, ele mesmo, como futuro professor do campo, identificar os saberes matemáticos relacionados às práticas do campo, ou seja,



à silagem e aos sujeitos que a praticam, para que eles sejam valorizados e problematizados.

Aprendi também o quão importante é valorizar essa atividade, por ser também uma prática em que meu pai está presente, pude também compreender como é realizada a prática na fazenda e pude identificar vários saberes matemáticos que, se trabalhados na escola, podem favorecer a formação matemática dos estudantes do campo, valorizando as práticas da comunidade. (ROCHA, 2020, p. 45)

Assim, ao aprofundar seus estudos no campo da Educação Matemática, particularmente da Etnomatemática, ele começou a questionar pesquisas que se limitam a descrever práticas específicas de grupos minoritarizados que, de alguma forma, impõem um modo externo de olhar para as práticas daquele grupo. Ele entende que o foco da atividade do pesquisador e dos agricultores ao desenvolver/participar da silagem são diferentes, ainda que estejam interligadas: o licenciando busca compreender e transformar práticas matemáticas escolares na escola do Campo, enquanto os agricultores buscam uma maior produção para garantir a alimentação do rebanho e aumentar a produtividade. Toda a tecnologia e o conhecimento que os agricultores usam são para produzir um bom silo e ter uma boa entressafra, sem se envolver em questões ligadas ao ensino da matemática.

Desde o início de sua pesquisa, Samuel não tinha a intenção de construir um silo, e sim contribuir com a escola do campo, pois vê “a importância de a escola estar sintonizada com as práticas da comunidade, e para tanto, decidiu compreender melhor o processo de silagem, buscando encontrar possibilidades de práticas matemáticas na escola contextualizadas nas práticas da comunidade.” (ROCHA, 2020, p. 9).

No que diz respeito às aprendizagens, o licenciando torna-se consciente dos problemas do ensino de uma matemática que não dialoga com as questões do campo.

Ele também tem a compreensão da atividade de silagem como um todo, a ponto de ele mesmo argumentar sobre os saberes que ele identifica na prática. Podemos dizer que esse foi um modo como Samuel enfrentou as tensões na sua atividade de pesquisa, assumindo o protagonismo na identificação de saberes matemáticos na prática de silagem, a partir do relato da prática pelos agricultores.

Consideramos que ao compreender que o foco de sua atividade de pesquisa era diferente da dos agricultores, chamando para si a responsabilidade de identificar os saberes matemáticos na prática de silagem, ele mostra ganho de poder de ação (agência), o que pode ser visto como uma expansão na atividade de pesquisa. Samuel reflete sobre seus processos formativos no curso e, diante de seus novos aprendizados, busca promover mudanças na prática matemática escolar do Campo. Ele então, expressa o quê e como aprende acerca da sua pesquisa para o TCC, como parte do seu percurso de formação como professor do Campo na licenciatura.

## **Aprendizagem sob a lente da Teoria das Zonas**

Vamos agora analisar as aprendizagens de Samuel que ocorrem no processo de produção do TCC a partir das extensões da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) apresentadas por Merrillyn Goos, baseada na Teoria das Zonas criadas por Valsiner.

Para Vigotski (2007), a pessoa não nasce com características pré-determinadas; estas se constituem a partir da interação com o outro, influenciadas pelo meio cultural, e de seu processo interno. As interações é que possibilitam o desenvolvimento das funções psicológicas superiores e da ZDP

Como dissemos, Valsiner incorporou a ZDP dois outros conceitos de zonas por ele elaborados, a Zona de Livre Movimento (ZLM) e a Zona de Ação Promovida (ZAP), formando um sistema ZLM/ZAP usado para explicar o desenvolvimento infantil. Nessa teoria, a ZDP é criada e fica condicionada pelas duas outras zonas.

Para Valsiner (1987, p. 97), “no contexto das relações criança-ambiente, a liberdade da criança, a escolha da ação (e do pensamento) é limitada por um conjunto de restrições, que definem a ZLM da criança no momento e no ambiente particular.” A ZLM provoca ou controla intencionalmente o acesso do indivíduo aos meios disponíveis podendo facilitar, ou não, sua aprendizagem. Já a ZAP compreende a promoção de novas habilidades e isso envolve, em geral, a relação entre o outro mais experiente, o aprendiz e o meio. Ela se estabelece na troca de experiências, na intermediação, na motivação do educador em gerar ou aumentar o interesse e o envolvimento na tarefa, e isso, não pode ser imposto, mas incentivado, pois o aprendiz pode ou não se interessar, ou se envolver, pelo

que está sendo proposto mostrando assim sua escolha (VALSINER, 1987).

Tanto a ZLM quanto a ZAP são dinâmicas e se interrelacionam, e estão em constante mudança, sempre se reorganizando pela influência do aprendiz e dos outros envolvidos. O educador usa a ZLM para controlar as ações dentro do planejado e a ZAP é usada para orientar, mediar e ensinar o educando em busca de promover as novas habilidades (VALSINER, 1987).

Goos (2013) ampliou a teoria das Zonas de Valsiner (1987), estudando a aprendizagem de professores. Em sua abordagem, a autora considera o professor como aprendiz. Desta forma, “a ZDP do professor torna-se um conjunto de possibilidades para o desenvolvimento de novos conhecimentos, crenças, objetivos e práticas criadas pela interação do professor com o ambiente, as pessoas e os recursos” (GOOS, 2013, p. 523). Para ela, a ZLM estrutura o acesso de um indivíduo a diferentes áreas do ambiente, a disponibilidade de diferentes objetos e as maneiras como o indivíduo pode agir com eles. A ZLM estrutura o ambiente de atuação do professor, sugerindo quais ações são permitidas. São elementos dessa zona, por exemplo, a percepção do background social dos alunos, acesso a recursos, estrutura organizacional da escola e currículo. Já ZAP é por ela associada às atividades oferecidas por meio de programas de formação de professores, ou interação com colegas que promovem certas abordagens de ensino.

Na análise da trajetória escolar e da pesquisa, como apresentadas no TCC de Samuel, utilizaremos a abordagem de Goss sobre a teoria das zonas, estruturando-a como fazem Goos (2013) e Herthel e Carrião (2018), para reconstruir suas ações, a partir do TCC e das observações de sua orientadora, uma das autoras.

Primeiro tentamos identificar no texto informações sobre as práticas de formação que o licenciando participou ao longo de sua trajetória escolar e acadêmica, de modo a descrever/caracterizar as suas ZDP, ZLM e ZAP. Focamos principalmente nos trechos do texto que trazem comentários, memórias e reflexões de Samuel, observando como ele se apoiou em outras pessoas ou na bibliografia para produzir aquela narrativa.

Identificados esses trechos, criamos categorias que serviram como referência de análise para caracterizar cada uma das zonas: ZDP, ZLM e ZAP. Essa caracterização baseou-se em Goos (2013), capturando aspectos que consideramos importantes para um ensino de matemática voltado para a Educação do Campo e para a formação de um professor do Campo. As categorias

criadas são as seguintes: para caracterizar a ZLM, “Estrutura e organização do curso de licenciatura do campo” e “Percepções sobre o aluno do Campo”; para a ZAP, “Ambiente de formação acadêmica” e “Interação com colegas e professores de curso e com a comunidade”. Sendo estas caracterizadas, utilizamos para a ZDP, as categorias: “Conhecimento pedagógico do conteúdo matemático para o contexto do campo”, “Habilidade/sensibilidade em trabalhar com o contexto do campo” e “Crenças sobre matemática, ensino e aprendizagem para o campo”. Na apresentação da análise, optamos por discutir as categorias conjuntamente em cada uma das zonas ZLM e ZAP, retomando o que foi analisado nessas duas, quando discutimos a ZDP.

### *Zona de livre Movimento (ZLM)*

Como já dissemos, o curso de Licenciatura do Campo tem uma proposta sintonizada com as pautas dos movimentos sociais, relacionando objetos de conhecimento escolar com as questões que atravessam os modos de vida do homem do campo. Samuel deixa claro como cursar disciplinas ao longo do curso influenciou suas concepções sobre Educação do Campo e Educação Matemática para o Campo.

Apoiado em estudos do campo da Educação do Campo e da Educação Matemática, pude identificar os saberes matemáticos e pensar em práticas escolares valorizem a identidade da escola do campo, pelo trabalho com práticas socioculturais da região, por meio de metodologias que considero mais adequadas aos estudantes do campo. (ROCHA, 2020, p. 62)

A descrição do caminho metodológico para elaboração da pesquisa para seu TCC, que é um eixo estruturador do currículo do curso, nos permite dizer que o aluno reflete sobre questões relevantes de sua comunidade. Samuel reconhece o papel central da pesquisa para o TCC “para a preparação e formação para atuar em sala, não somente na Educação do Campo, mas de uma maneira geral, melhorando a forma de atuação do professor” (ROCHA, 2020, p. 62).

É importante enfatizar que os estudantes desse curso são oriundos do campo, muitos participam ativamente dos movimentos sociais ligados às questões de terra. Além disso, como o curso se organiza a partir do uso da pedagogia da alternância pela qual o aluno realiza parte das atividades na UFMG e parte na própria comunidade de origem, o estudante não perde o contato com

o Campo. Não há dúvida que o perfil dos estudantes e o formato do próprio curso alimentam e intensificam a discussão sobre as práticas e as lutas do povo campestre no curso, contudo é a imersão do estudante do campo na vida acadêmica que parece possibilitar a valorização e compreensão mais profunda dos saberes do Campo.

Particularmente para Samuel, foi a partir das discussões do curso que passou a reconhecer a importância dos saberes de sua comunidade e o papel da escola do Campo. Segundo ele

A partir de várias discussões que participei ao cursar as Disciplinas de Processos de Ensino e Aprendizagem no Lecampo, pude observar e dar mais valor ao lugar onde moro e as práticas que ocorrem lá. Também me ajudaram a refletir como a escola do Campo pode contribuir para os seus alunos entenderem as práticas locais e atuar mais intensamente na comunidade onde eles vivem. (ROCHA, 2020, p. 10)

Percebemos que a participação nas disciplinas do curso, a interação com os colegas e o percurso de investigação que gerou seu TCC são elementos fundamentais na estruturação do contexto de formação docente de Samuel, eles vão, de certa forma, delimitar as possibilidades de acesso a certos conhecimentos, bem como as maneiras com que ele pode agir em relação a eles. De acordo com Goos (2013), esses são aspectos importantes da conformação da ZLM de Samuel.

Outro aspecto, Samuel é levado a refletir sobre o que é ser um aluno do campo, a partir de suas próprias memórias, impulsionado também pelas leituras realizadas nas disciplinas e na elaboração do TCC. Nesse percurso, constrói uma percepção sobre si mesmo. Segundo Goos (2013), a percepção da origem social dos alunos, suas motivações, crenças e atitudes, comportamento e desempenho em matemática são elementos importantes que orientam a ação do professor. A percepção dos alunos pode limitar, ou ampliar, os objetivos e as estratégias didáticas escolhidas pelo professor (ZLM). Goos e Geiger (2010) apontam o exemplo de Moana, uma professora que ao ensinar os alunos de sua etnia adapta os objetivos pedagógicos ao contexto social dos alunos, promovendo formas de comunicação culturalmente apropriadas. Para eles, esse exemplo mostra que as percepções do professor sobre os estudantes não precisam perpetuar estereótipos culturais que limitam seu aprendizado, podem, ao contrário, facilitá-lo.

Assim como fez Moana, Samuel também compartilha experiências como estudante de escola do Campo e projeta práticas pedagógicas para

outros alunos, que compartilham a mesma cultura, tenham um estudo de matemática que dialogue com as questões do campo. Ele deixa claro no TCC que conhece as dificuldades que os alunos do Campo têm no cotidiano da escola, desde o transporte e alimentação, passando pelos livros didáticos e currículos inadequados. Tem consciência de que é preciso combater o discurso de desqualificação dominante entre os que vivem na cidade, de que os alunos do Campo são culturalmente e intelectualmente inferiores. Essa percepção se revela ao afirmar que a Educação do Campo deve buscar caracterizar esse sujeito do campo, reconhecendo-o como ser de produção em conhecimento, com características e demandas próprias, necessitando assim uma forma de ensino específico.

Apesar de parecer ter bastante convicção sobre a importância de reforçar a identidade do aluno do campo, a reflexão que ele faz parece ser recente e ainda em alguns momentos muito apoiada na bibliografia utilizada no TCC. Ela é, porém, um dos elementos importantes que norteará sua atuação docente. Segundo ele

Com esta pesquisa e toda a formação que tive na Licenciatura em Educação do Campo, concluo que para atuar como professor em uma escola do Campo, o olhar para os alunos em formação é muito importante. (ROCHA, 2020, p. 62)

Pode-se notar que a participação de Samuel nas discussões promovidas no curso sobre o que é ser aluno do campo criou uma ZLM que modulou o desenvolvimento da sua percepção sobre o que é ser professor do campo. Essa percepção, como apontou Goos (2013), terá um papel importante em sua atuação futura.

### *Zona de Ação Promovida (ZAP)*

As discussões ao longo do curso incentivaram uma visão crítica de Samuel sobre as relações e os saberes do Campo, de modo que ele assume uma postura reflexiva sobre os saberes de sua comunidade e sobre a matemática ensinada na escola. A necessidade de fazer uma pesquisa e elaborar um trabalho (TCC) é uma oportunidade de registro e sistematização dessa mudança. Nele, ele registra as interações com as pessoas no curso, o acesso à bibliografia do tema e como é a convivência na comunidade, mostrando como fazer a pesquisa mostrou possibilidades de trabalhar a matemática na escola do campo em interlocução

com as práticas da comunidade.

A proposta de formação docente do curso favoreceu o desenvolvimento de sua capacidade de identificar saberes matemáticos nas práticas cotidianas de sua comunidade e desenvolver atividades didáticas nelas contextualizadas (ZAP), podendo resultar em uma atuação docente mais sintonizada com as questões que vivencia um aluno do Campo.

### *Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)*

Sobre sua trajetória de escolarização básica, Samuel relata que teve pouco contato com um conhecimento matemático que considera adequado ao contexto do campo: “as aulas que relacionavam os conteúdos com a nossa realidade, ainda que não eram constantes” (ROCHA, 2020, p.10). Nesse sentido, outro aspecto importante por ele apontado é que o livro didático, mesmo não sendo específico para a escola do Campo, era muito usado pelos professores. Percebe-se que em sua escolarização básica, ele foi apresentado à mesma matemática ensinada nas escolas urbanas, centrada em atividades de baixa complexidade, contextualizada na própria Matemática ou na semirrealidade, como é visto nos livros didáticos (ABREU; CARRIÃO, 2020).

Durante o curso de licenciatura, Samuel passa a questionar a formação que teve na escola básica que era do Campo:

Hoje, cursando o Lecampo na UFMG, faço a análise de que pelo fato de a escola ser reconhecida como uma escola do campo, segundo afirma o diretor, em algumas aulas, as metodologias não contemplavam o público ali presente, agricultores ou filhos de agricultores. Percebo que ainda faltava desenvolver um olhar específico para o contexto de uma Educação do Campo. (ROCHA, 2020, p. 46)

Esse questionamento o mobiliza a desenvolver a pesquisa que gerou seu TCC, onde inclui atividades didáticas voltadas para o aluno do campo. Como já foi dito, o processo de elaboração do TCC e as interações ao longo curso (ZLM/ZAP) contribuem para um olhar para o campo, em particular para a vivência de sua comunidade como fonte de informações para construir uma proposta de ensino. Segundo ele, a pesquisa fez com que pudesse “identificar vários saberes matemáticos que, se trabalhados na escola, podem favorecer a formação

matemática dos estudantes do campo, valorizando as práticas da comunidade” (ROCHA, 2020, p.45). Por exemplo, na prática de silagem, na etapa de realização do plantio ele percebe que “há saberes importantes para a tomada de decisão nesta etapa, seria a pessoa saber ler e interpretar os rótulos das embalagens das sementes e do adubo” e conclui que a “discussão desses rótulos pode ser uma grande contribuição para atividades escolares com os jovens do Ensino Médio” (ROCHA, 2020, p. 34). De forma análoga, Samuel identifica em cada uma das demais etapas do processo de silagem, saberes que podem ser trabalhados em sala de aula.

Samuel muda sua forma de entender o ensino de matemática para a escola do Campo, passando a perceber a necessidade de sua adequação ao seu contexto.

é possível com um olhar para as práticas culturais da minha comunidade, elaborar sugestões de atividades para usá-las no ensino de matemática na escola do Campo, por meio das inter-relações entre os saberes locais e os escolares do currículo de matemática. (ROCHA, 2020, p. 19)

Ele também reconhece o papel de uma Educação Matemática voltada para o campo, quando afirma que pode “identificar vários saberes matemáticos que, se trabalhados na escola, podem favorecer a formação matemática dos estudantes do campo, valorizando as práticas da comunidade” (ROCHA, 2020, p. 44).

As disciplinas e outros componentes curriculares cursados por ele ao longo do curso, bem como o próprio processo de escrita do seu TCC, tiveram o suporte de professores e, no caso do TCC, da orientadora. Essas interações também foram mediadas por leituras e troca de experiências, assim, a ideia de um ensino de matemática contextualizado no campo já faz parte de sua ZDP. Porém, foi o acompanhamento de seu trabalho de pesquisa, que atravessou todo o tempo do curso, que mostrou uma efetiva mudança na sua percepção sobre a Educação Matemática para o Campo.

Percebemos que as mudanças da ZDP de Samuel são influenciadas pelas ZLM criada no curso, que discutimos acima; e a ZAP, com o incentivo à reflexão sobre a educação no campo e à produção de materiais contextualizados. Essas mudanças indicam a possibilidade de Samuel desenvolver uma forma, ainda que incipiente, de conhecimento pedagógico do conteúdo matemático (SHULMAN, 1987), com adequação ao contexto do campo.



Apesar de ainda estar em processo de formação, devido sua trajetória de jovem do campo, Samuel mostrou sensibilidade para identificar em sua comunidade questões do cotidiano que podem ser usadas para desenvolver atividades de Educação Matemática, como ele mesmo reconhece

A partir da descrição do processo de silagem, fui identificando saberes que eu reconheço como matemáticos, isto é, saberes mobilizados em práticas que envolvem medição, cálculos de valores e outros, porcentagens, visualização e representação do espaço. Identificados os saberes, eu discuto abordagens etnomatemáticas para elas e levanto algumas ideias que podem compor atividades que me parecem ser interessantes para o ensino de matemática na escola da minha comunidade. (ROCHA, 2020, p. 28)

A busca pelos saberes que ele reconhece como matemáticos nas atividades cotidianas do campo é orientada por uma perspectiva etnomatemática, em particular baseada em Knijnik (2003), onde buscou sustentação para desenvolver as atividades adequadas ao contexto do campo. Para ele

Uma abordagem etnomatemática situada nas práticas de silagem busca trazer um olhar para o local onde os alunos vivem, para a sua comunidade, e suas atividades do dia a dia, que consistem em muito aprendizado. Muitas e muitas vezes, quem as realiza não percebe que existem nelas saberes e que esses saberes poderiam ser repassados para outras pessoas na escola, em outro lugar e ajudá-las a aprender a matemática em diálogo com suas práticas cotidianas e comunitárias. (ROCHA, 2020, p. 48)

A necessidade de produzir um TCC, que é um dos requisitos para conclusão do curso, relacionando saberes matemáticos como saberes do campo, criou uma ZLM que favorece fortemente essa mudança na ZDP. O incentivo para investigar os saberes de sua comunidade cria um ambiente (ZAP) que promove seu interesse em identificar neles conhecimentos matemáticos e transformá-los em atividades escolares. Mesmo que a realização da pesquisa e a elaboração da proposta de atividades didáticas ainda estejam muito apoiadas na interação com a orientadora e na própria bibliografia consultada, fica claro que Samuel já consegue desenvolvê-las, mostrando estar trabalhando em sua ZDP.

Um outro elemento importante na forma de agir do futuro professor são suas crenças sobre matemática, ensino e aprendizagem para os que vivem no campo. Observa-se no relato da experiência de pesquisa, extraído da escrita

do TCC, que Samuel está em um processo de mudança, a partir das discussões sobre esses temas no curso como um todo. Um exemplo dessa mudança é o reconhecimento da especificidade da Escola do Campo, Samuel aponta que foi na licenciatura que passou a perceber que a escola que estudou ainda precisa “desenvolver um olhar específico para o contexto de uma Educação do Campo” (ROCHA, 2020, p. 46). Hoje ele considera que a escola deve estar sintonizada com as práticas da comunidade, trazendo questões que emergem do campo, rompendo com os modelos hegemônicos que valorizam determinados modos de organização de saberes. Como já apontamos anteriormente sua percepção sobre o ensino de matemática para o aluno do campo teve uma grande mudança, propondo um ensino de Matemática contextualizado no Campo, orientado pela Etnomatemática.

Pode-se considerar que foram as experiências vividas nas atividades curriculares e nos diferentes espaços de discussão da licenciatura (ZLM) que proporcionaram que Samuel mudasse suas concepções, ou tomasse consciência, sobre uma Educação Matemática do Campo e não no Campo. Nota-se que essa mudança de concepção ainda está na ZDP de Samuel, pois além do contato com elas ser recente, seu texto é ainda fortemente marcado pela bibliografia e pelos discursos presentes no curso.

## **Sobre as relações educativas na escola do Campo**

Gostaríamos de destacar que mesmo que as teorias aqui utilizadas consigam mostrar as aprendizagens que ocorrem ao descrever mudanças na atividade do licenciando, não podemos afirmar sobre a ocorrência de mudança do sujeito, no que diz respeito a sua percepção como homem do campo, prestando serviço em uma fazenda. No caso de Samuel, percebe-se resistência, ou reticências, em relação a crítica à estrutura de poder nas relações produtivas do campo, como a posição de meeiro que ocupa o seu pai. Apesar das fortes discussões sobre a estrutura agrária do Brasil dentro do currículo do curso e da visibilidade que essas questões têm nas pautas dos movimentos sociais, Samuel não incorpora esse discurso no seu TCC, mantendo-se em uma dualidade entre sua formação familiar e na comunidade e o que vivenciou no curso.

Ele não problematiza a dependência dos meiros, nem reconhece a relação encontrada na seção 6 do TCC, quando relata o processo de silagem na

fazenda Santa Helena, evidencia que ele não vê como problemática a relação estabelecida entre os donos da fazenda e os meeiros. Segundo ele, “Essa atividade surge como um meio de subsistência de algumas famílias, pois no período de silagem são envolvidos no serviço em várias propriedades e com isso conseguem uma quantia satisfatória para se manterem” (ROCHA, 2020, p. 30). Ele não problematiza a dependência dos meeiros, nem parece reconhecer a relação de trabalho existente, para ele trata-se de uma relação estabelecida pela amizade. Muito menos, Samuel questiona a predominância da pecuária leiteira como atividade econômica e os impactos ambientais que ela traz e que reverberam na própria agricultura familiar.

Contudo, ele não estava alheio a tudo isso, pois alerta para a exploração do trabalho no campo, quando justifica as atividades didáticas que ele propõe no TCC que ele propõe no TCC, que segundo ele,

seria uma contribuição para o esclarecimento dos adolescentes e jovens da nossa comunidade, o que alcança as famílias e a comunidade em geral, sobre o tipo de trabalho que é feito na silagem do ponto de vista econômico e das relações de trabalho. Também para problematizar os efeitos dessa prática no meio ambiente e na manutenção de práticas exploratórias do trabalho no Campo (ROCHA, 2020, p. 62).

Concluimos que mesmo que o contexto de formação do curso o leve a ter um olhar crítico sobre as relações de poder, devido a sua participação em diferentes discussões, a análise do seu percurso formativo, à luz da Teoria das Zonas (ZLM) nos permite afirmar que ele ainda percebe, orientado por seu ambiente familiar (ZAP), que a relação entre o dono da fazenda e seu pai é de amizade e que todos se beneficiam dela. Ele ainda alterna momentos de crítica e de aceitação em uma posição dual.

À luz da Teoria da Aprendizagem Expansiva, poderíamos dizer que no posicionamento de Samuel frente às relações de trabalho na prática de silagem, questões de subjetividade, sentido pessoal, emoção e identidade contribuem para que o objeto da atividade seja percebido por ele como uma contradição na atividade matemática na escola do campo. De fato, esse objeto carrega dentro dele a contradição fundamental do *capitalismo* tão questionada pelo movimento campesino, entre o valor de troca versus o valor de uso (mais valia). Desse modo, se se esvaziar dos saberes das práticas do campo, o ensino de matemática reproduziria a lógica da vida capitalista na escola do Campo. Ele desenvolve uma

visão mais crítica da matemática na escola do Campo e das próprias abordagens etnomatemáticas, mas não transcende sua percepção para questões de relações sociais mais amplas, como é a exploração do trabalho no campo.

Sob ambas as lentes de análise, ressaltamos aprendizagens possibilitadas pela atividade de formação docente dentro desse eixo curricular da pesquisa. Elas dizem respeito à mudança em relação a percepção da Etnomatemática como referência para abordagens educativas da matemática na escola do campo. Por meio de sua pesquisa, Samuel reconhece que a abordagem etnomatemática deve buscar um “olhar para o local onde os alunos vivem, para a sua comunidade, e suas atividades do dia a dia, que consistem em muito aprendizado” (ROCHA, 2020, p. 48).

Mas, ele também tem clareza de que o fato de pesquisar uma prática da comunidade por si só não garante que, ao abordá-la na escola, pode-se criar condições mais favoráveis para a aprendizagem matemática dos alunos. Para ele “Muitas e muitas vezes, quem as realiza não percebe que existem nelas saberes e que esses saberes poderiam ser repassados para outras pessoas na escola, em outro lugar e ajudá-las a aprender a matemática em diálogo com suas práticas cotidianas.” (ibid, p. 48). Consciente dessa limitação, expressa sua percepção sobre qual será o seu lugar como professor do Campo, indo além de investigar práticas e identificar saberes matemáticos, ele é propositivo de atividades matemáticas escolares que considera potentes para serem trabalhadas, na perspectiva etnomatemática na escola do Campo.

Dessa forma, consideramos que Samuel não só questiona uma prática escolar, ele aprende sobre essa prática e sobre sua trajetória de formação escolar, movendo-se em zonas de desenvolvimento coletivas, mostrando como aprendeu acerca das suas próprias aprendizagens ao longo do seu percurso formativo, ou seja, ele aprende como se aprende a ser professor do campo, enquanto licenciando desse curso.

*Agradecimentos:* Nossos mais sinceros agradecimentos à Samuel pela parceria na elaboração da pesquisa que resultou em seu TCC e pela disponibilidade em contribuir para a reflexão proposta neste capítulo.

## Referências

ABREU, Marcio L.; CARRIÃO, Airton. A contextualização das atividades nos livros de matemática. **Revista Brasileira de Educação Básica**. v. 4, n.15, Out-Dez 2019.

CARRIÃO, Airton; LAUTERT, Sintria Labres.; SPINILLO, Alina Galvão. Cognitive and Linguistic Processes in Brazilian Mathematics Education: Theoretical Considerations and Educational Implications. In: RIBEIRO, Alessandro Jacques; Healy, Lulu; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ALI FERNANDES, Solange Hassan Ahmad. **Mathematics Education in Brazil: Panorama of Current Research**. Switzerland: Springer International Publishing, p. 193-209, 2018.

CUNHA, Daisy. Atividade docente. [Verbete] In: OLIVEIRA, D.A.; DUARTE, A.M.C.; VIEIRA, L.M.F. (Org.). **Dicionário: trabalho, profissão e condição docente**. Belo Horizonte: FMG/Faculdade de Educação, 2010. Disponível em: <https://www.gestrado.net.br/?pg=dicionario-verbetes&id=39>. Acesso em: 12 abr. 2020

DAFERMOS, Manolis. Reflection on the Relationship between Cultural-historical Theory and Dialectics. **Psychological Science & Education**, v. 20, n. 3, 2015.

DAVID, Maria Manuela; TOMAZ, Vanessa Sena. Aprendizagens Expansivas Reveladas pela Pesquisa sobre a Atividade Matemática na Sala de Aula. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1287-1308, dez. 2015.

ENGESTRÖM, Yrjö. **Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research**. Helsinki: Orienta-Konsultit, 1987. Versão online disponível em: [lhc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm](http://lhc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm). Acesso em: 15 ago. 2017.

ENGESTRÖM, Yrjö. Non scolae sed vitae discimus: Toward overcoming the encapsulation of school learning. **Learning and instruction**, v. 1, n. 3, p. 243-259, 1991.

ENGESTRÖM, Yrjö. From individual action to collective activity and back: Developmental work research as an interventionist methodology. In: LUFF, P.; HINDMARSH, J.; HEATH, C. (Eds.). **Workplace Studies: Recovering Work Practice and Informing System Design**. Cambridge: Cambridge University Press, p. 150-166, 2000.

ENGESTRÖM, Yrjö. Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. **Journal of Education and work**, v.14, n.1, p. 133-156, 2001.

ENGESTRÖM, Yrjö; SANNINO, A. Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. **Educational Research Review**, v. 5, n. 1, p. 1-24, 2010.

FERNANDES, Filipe Santos. Formação de Professores de Matemática em Licenciaturas em Educação do Campo: entre cartas, epistemologias e currículos. **Bolema**. Rio Claro/SP. v. 33, n. 63, p. 27-44, abr. 2019. Junho de 2018.

GOOS, Merrilyn. Sociocultural perspectives in research on and with mathematics teachers: a zone theory approach. **ZDM Mathematics Education**, v. 45, 2013.

GOOS, Merrilyn; GEIGER, Vince. Theoretical perspectives on mathematics teacher change. **Journal Mathematics Teacher Education**. v. 13, 2010.

JAWORSKI, Barbara; TERRY, Wood (Eds). **The International Handbook of Mathematics Teacher Education**: the Mathematics teacher educator as a developing professional, v.4. USA: Sense Publisher, 2008

HERTHEL, Cláudia, C. T.; CARRIÃO, Airton. A criança com síndrome de down e o número: uma proposta de atividades inclusivas de contagem. **Anais... VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Foz do Iguaçu. 2018

ILIENKOV, E. V. **Dialectical logic**: Essays in its history and theory. Moscow: Progress, 1977.

KNIJNIK, Gelsa. Currículo, Etnomatemática e Educação Popular: um estudo em um assentamento do movimento sem-terra. **Currículo sem Fronteiras**. São Leopoldo. v.3, n.1, p.96-110, Jan/Jun. 2003.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LERMAN, Stephen. Theories in practice: mathematics teaching and mathematics teacher education **ZDM Mathematics Education**, v. 45, 2013.

ROCHA, Cleuves Samuel Alves da. **Saberes matemáticos na prática de silagem da fazenda Santa Helena - Icarai de Minas**. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Educação do Campo) – Faculdade de Educação, UFMG, Belo Horizonte, 2020.

SFARD, Anna. When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning from a Commognitive Standpoint. **The Journal of the Learning Sciences**, v.16, n. 4, p.567–615, 2007.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v.57, n. 1, p. 1–22, 1987.

VALSINER, Jaan. **Culture and the development of children's actions**: A cultural-historical theory of developmental psychology. New York: John Wiley & Sons, 1987.

VARGAS, Bruna Quartarolo; NICOLAIDES, Christine. Aulas online e o conflito como instrumento de aprendizado e transformação. **The specialist**. v. 40, n. 1, 2019, p. 1-14.

VIGOTSKI, Lev. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

VIGOTSKI, Lev. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores, 7ªed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

## **Autores**

### **Airton Carrião Machado**

Universidade Federal de Minas Gerais

E-mail: airtoncarriao@gmail.com

### **Vanessa Sena Tomaz**

Universidade Federal de Minas Gerais

E-mail: vanessastomaz@gmail.com

## Capítulo 5

# AS RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E LINGUAGEM DISCUTIDAS A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

*Alina Galvão Spinillo  
Leidy Johana Peralta Marín*

O capítulo tem por objetivo apresentar e discutir algumas das possíveis articulações entre matemática e linguagem. De maneira específica, essa relação é discutida à luz da resolução de problemas, em que a ideia central é que o enunciado do problema matemático é um tipo de texto com características particulares que precisa ser compreendido para ser resolvido. A partir de resultados de pesquisas com crianças que examinam a compreensão do enunciado de problemas matemáticos e sua relação com a capacidade de resolver problemas, é conduzida uma reflexão crítica que propõe uma aproximação com a linguística textual. Esta aproximação aponta a relevância de se investigar a compreensão do enunciado de problemas por meio de recursos metodológicos oriundos da pesquisa no campo da linguística textual. Este paradigma analítico-metodológico, ainda pouco explorado na pesquisa na área, pode contribuir para esclarecer muitas das dificuldades das crianças na compreensão do enunciado de problemas matemáticos e suas consequências sobre a resolução de problemas.

*Palavras-chave:* Matemática. Linguagem. Compreensão do Enunciado de Problemas. Resolução de Problemas. Crianças.

## Introdução

As relações entre a matemática e a linguagem há muito têm interessado estudiosos da educação matemática, sendo abordadas a partir de diferentes perspectivas. O que se observa é que muitas das discussões acerca deste tema são conduzidas com base em reflexões teóricas e dados de pesquisas que envolvem a



compreensão e a resolução de problemas matemáticos. Uma possível explicação para isso é que os problemas matemáticos, sobretudo no contexto escolar, se materializam a partir da linguagem, sob a forma de enunciados verbais.

Polya (1978) afirma que a resolução de um problema matemático é um processo complexo que envolve diferentes etapas ou níveis de processamento que requer a compreensão do enunciado do problema e planejamento para sua resolução (identificar o que precisa ser encontrado, identificar as informações relevantes, definir uma estratégia de resolução e revisar o que foi feito). Nessa mesma direção, Nesher, Hershkovitz e Hovotna (2003) comentam que solucionar um problema implica deduzir novas informações a partir dos dados presentes no texto (informações conhecidas), selecionando as informações léxicas e numéricas relevantes para sua solução. No enunciado, as informações são expressas por meio de números e seus referentes, termos que indicam relações (a mais, a menos, vezes, em cada etc.) e de uma pergunta relativa a uma informação desconhecida que precisa ser gerada.

Muitas das dificuldades das crianças na resolução de problemas estão associadas a dificuldades em compreender os textos matemáticos, em particular, o enunciado dos problemas, como enfatiza Curi (2009). Segundo a autora, é comum observar que os estudantes iniciam a resolução sem sequer entender o enunciado do problema, o que gera erros diversos. As dificuldades podem ser devido a limitações na decodificação das palavras no momento da leitura ou a limitações no vocabulário que dificultam atribuir significado aos termos presentes no enunciado. Em vista disso, é frequente ouvir dos estudantes perguntas como: "O que é para fazer?", "Assim está certo?"; ou perguntas em que procuram adivinhar a operação que precisa ser aplicada para solucionar o problema. Spinillo e Magina (2004) comentam que é comum os alunos perguntarem: "É para fazer conta de mais ou de menos?", ou ainda, afirmarem que "Este problema é de menos", "Este problema é de vezes", tomando por base a presença de termos como "a menos" e "vezes".

Tal cenário tem motivado pesquisadores a investigar como se caracterizam as possíveis articulações entre a matemática e a linguagem. De forma geral, identifica-se na literatura na área quatro perspectivas que são brevemente apresentadas a seguir:

- (i) Matemática e linguagem são entendidas como habilidades distintas que se correlacionam. As pesquisas que se fundamentam nesta perspectiva examinam as possíveis correlações entre dificuldades de

leitura e dificuldades em matemática de maneira geral, identificando relações entre habilidades fonológicas, lexicais e computação numérica (e.g., CORSO; DORNELES, 2015; FUCHS; FUCHS; PRENTICE, 2004; HARTMAN; FRITZ, 2021; HECHT; TORGESEN; WAGNER; RASHOTTE, 2001; MOURA et al. 2021; RINSVELD; BRUNNER; LANDERL; SCHILTZ; UGEN, 2015) e entre compreensão de textos (na maioria das vezes textos narrativos) e desempenho na resolução de problemas matemáticos (e.g., CARBAJO, 2015; MURILLO, 2012; PERALTA, 2016).

(ii) Há uma impregnação mútua entre a linguagem natural (língua materna) e a linguagem matemática, de modo que a matemática é concebida como uma linguagem especializada (e.g., MACHADO, 1993). Nesta perspectiva, a língua materna é considerada a fonte primária da compreensão da linguagem matemática e dos conceitos, podendo, inclusive, gerar dificuldades na atribuição de significados, pois muitas palavras e termos da linguagem natural são polissêmicas, ambíguas quando transpostas para o contexto da matemática (e.g., DURKIN; SHIRE, 1991; PIMM, 1987).

(iii) O uso da leitura e da escrita na sala de aula de matemática, em que a linguagem escrita é concebida como instrumento do pensar matemático (e.g., ALMEIDA; TORTOLA, 2014; FIRMENDER; CASA; COLONNESE, 2017; LORENSATTI, 2009; NACARATO, 2013; POWELL; BAIRRAL, 2006). A escrita nas aulas de matemática expressa tanto o pensamento do aluno como também é uma ferramenta mediadora que ajuda o aluno a construir e apropriar-se de conceitos, promovendo a reflexão e a organização de ideias (e.g., CÂNDIDO, 2001; OLIVEIRA; LOPES, 2012; POWELL, 2001).

(iv) Matemática e linguagem são entendidas como formas de representação, como sistemas simbólicos. Os estudos que adotam esta perspectiva se voltam para os aspectos notacionais relativos à escrita alfabética e à escrita dos números (e.g., DOCKRELL; TEUBAL, 2007; MUNN, 1998; TIGGEMANN, 2010; TOLCHINSKY, 1997; 2007). Alguns destes estudos fornecem informações acerca de que no sistema alfabético os símbolos (letras, sílabas) correspondem a sons, enquanto no sistema numérico os símbolos (número, sinais aritméticos) representam uma ideia, tendo essas características que serem compreendidas pelas crianças desde cedo (e.g., DORNELES, 1998; TOLCHINSKY, 1997).

Como pode ser observado, essas perspectivas ilustram a complexidade do tema, sua amplitude e relevância para a educação matemática. Com vistas a contribuir com reflexões mais pontuais acerca da relação entre linguagem e matemática, o presente capítulo discute essa relação por meio da resolução de problemas. A ideia central é que o enunciado do problema matemático é um tipo de texto com características e objetivos específicos, que precisa ser compreendido de uma forma particular para ser posteriormente resolvido. Assim, sabendo-se que uma das dificuldades na resolução de problemas matemáticos reside na compreensão do enunciado, é relevante examinar como as crianças compreendem este tipo de texto e que dificuldades enfrentam.

É possível agrupar os estudos que examinam as relações entre linguagem e matemática a partir da resolução de problemas em pesquisas que: (i) exploram as relações entre habilidades de leitura (vocabulário, decodificação) e a capacidade de resolver problemas; (ii) investigam a compreensão de textos não matemáticos (narrativos e expositivos) e sua relação com a capacidade de resolver problemas; e (iii) examinam a compreensão de textos matemáticos (enunciado de problemas) e sua relação com a capacidade de resolver problemas.

Essas diferentes maneiras de investigar esta relação são ilustradas e discutidas a seguir, à luz de resultados derivados de pesquisas realizadas com crianças. Os estudos apresentados não se constituem em uma revisão sistemática da literatura, havendo sido selecionados a partir dos seguintes critérios: (i) os participantes serem estudantes do Ensino Fundamental; (ii) investigar as relações entre habilidades linguísticas e conhecimento matemático, e (iii) o conhecimento matemático investigado referir-se à resolução de problemas.

## **Pesquisas que investigam as relações entre habilidades de leitura e resolução de problemas**

As relações entre habilidades matemáticas e de leitura (decodificação, vocabulário) têm sido exploradas em pesquisas que procuram examinar as possíveis correlações entre elas e o efeito do conhecimento linguístico sobre a resolução de problemas.

Algumas investigações comparam crianças com desenvolvimento típico com crianças com desenvolvimento atípico nesses dois domínios do conhecimento, como é o caso do estudo de intervenção conduzido por Fuchs

et al. (2004) com estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental. A partir dos resultados obtidos no teste Terra-Nova<sup>15</sup>, os participantes foram divididos em quatro grupos: estudantes com *déficit* tanto em leitura como em matemática, estudantes com *déficit* apenas em matemática, estudantes com *déficit* apenas em leitura, e estudantes sem qualquer tipo de dificuldade nesses dois campos do conhecimento. Cada grupo foi dividido em um grupo experimental e um grupo controle. A intervenção oferecida aos grupos experimentais consistia, em linhas gerais, na resolução de problemas de diferentes tipos a partir de instruções dadas pelo professor: ensino de estratégias, revisão da resolução do problema e tomada de consciência acerca dos progressos identificados.

Nos quatro grupos, a intervenção teve efeito positivo sobre a capacidade de resolver problemas. Contudo, esse efeito era menos expressivo entre os estudantes que apresentavam algum tipo de *déficit* (ou em matemática ou em leitura), sobretudo entre aqueles que apresentavam *déficits* nas duas áreas.

Frente a esses resultados, Fuchs et al. (2004) procuraram investigar a razão de os estudantes que tinham *déficit* em uma área apenas terem desempenho limitado na área em que não tinham *déficit*. Os dados revelaram que os estudantes com limitações em matemática eram mais fracos na leitura do que os estudantes sem limitações, e que os estudantes com limitações em leitura eram mais fracos em matemática que os estudantes sem limitações. A conclusão foi que havia uma correlação entre essas habilidades e que o domínio da leitura podia influenciar na melhoria das habilidades de computação.

Hecht et al. (2001) também em um estudo de natureza correlacional e longitudinal, avaliaram as habilidades de processamento fonológico e de computação matemática em crianças da Educação Infantil até o quinto ano do Ensino Fundamental. As análises indicaram haver correlação positiva entre essas habilidades em estudantes do segundo ao quinto ano. Observou-se, também, que as habilidades fonológicas eram responsáveis pela variância nas habilidades matemáticas, sendo um preditor importante do desempenho em computação dos estudantes do quarto e quinto ano.

Tomados de maneira conjunta, as pesquisas de Fuchs et al. (2004) e Hecht et al. (2001) indicam haver correlações entre as habilidades de leitura e as habilidades matemáticas, havendo, ainda, um impacto preditivo da leitura sobre

---

<sup>15</sup> Terra-Nova é um teste padronizado nos Estados Unidos que tem por objetivo rastrear, por algum período de tempo, o progresso dos alunos em diferentes áreas como: matemática, ortografia, vocabulário e leitura.

habilidades matemáticas ao longo dos anos do Ensino Fundamental. Importante ressaltar que nessas pesquisas as avaliações das habilidades linguísticas versavam sobre os aspectos fonológicos da leitura relativos à decodificação e reconhecimento de palavras, enquanto as investigações discutidas a seguir avaliam as habilidades linguísticas relativas à compreensão de textos. Esta mudança de paradigma no âmbito da linguagem (deslocamento de avaliações a nível da palavra para avaliações a nível do texto) é, segundo nossa análise, pertinente, uma vez que a resolução de problemas envolve mais do que a leitura de palavras, mas a compreensão de um tipo particular de texto: o enunciado do problema.

### **Pesquisas que investigam as relações entre compreensão de textos não matemáticos e resolução de problemas**

A compreensão de textos e a resolução de problemas têm sido consideradas para examinar a relação entre a matemática e a linguagem. Frequentemente, os textos utilizados pelos pesquisadores são textos expositivos e narrativos, em sua maioria, histórias.

Murillo (2012), por exemplo, investigou a compreensão de textos em alunos do segundo ano do Ensino Fundamental por meio de uma tarefa de perguntas de múltipla escolha acerca de um texto narrativo; e avaliou o conhecimento matemático por meio de uma tarefa de resolução de problemas que requeriam o uso da adição, subtração e interpretação de gráficos simples. O desempenho tanto na compreensão de textos como no conhecimento matemático foi classificado em bom, regular e fraco. Na tarefa de compreensão de textos havia mais estudantes com nível bom do que regular e fraco; enquanto na tarefa de resolução de problemas havia mais estudantes com nível regular e fraco do que nível bom. De modo geral, observou-se que o desempenho na compreensão leitora se correlacionava positivamente com o desempenho na resolução de problemas. De maneira específica, também foi detectada uma correlação entre a compreensão leitora e o desempenho em cada um dos tipos de problema. A conclusão foi que quanto melhor a compreensão leitora, melhor era o desempenho na resolução de problemas matemáticos.

Peralta (2016) examinou a relação entre compreensão de textos e resolução de problemas em estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental. A compreensão de textos foi avaliada por meio de respostas a perguntas literais e inferenciais

relativas a uma história. O conhecimento matemático foi avaliado por meio de uma tarefa que envolvia a resolução de problemas de multiplicação. Nesta tarefa, era dada uma segunda chance aos estudantes que erravam, sendo solicitados a solucionar os problemas após serem questionados sobre as relações entre as quantidades e os referentes presentes no enunciado. Assim, foram dadas duas pontuações aos participantes: uma relativa ao primeiro momento e outra relativa ao segundo momento de resolução. Semelhante à análise realizada por Murillo (2012), em ambas as tarefas, o desempenho dos participantes foi avaliado em três níveis: bom, regular e fraco. Na tarefa de compreensão de texto havia mais estudantes com um bom nível do que regular e fraco. Na tarefa de matemática, no primeiro momento havia mais estudantes com desempenho fraco do que bom e regular, enquanto no segundo momento havia mais estudantes com desempenho regular do que bom e fraco. Os dados mostraram haver correlação positiva fraca entre compreensão de textos e resolução de problemas no primeiro momento, e uma correlação positiva moderada no segundo momento. Concluiu-se que há uma relação entre a compreensão textual e a resolução de problemas de multiplicação, e que quando os estudantes refletem sobre a associação entre as quantidades e seus referentes, a relação entre essas habilidades torna-se mais forte. Ao que parece, relacionar as quantidades a seus referentes pode melhorar a compreensão do enunciado e, assim, melhorar o desempenho na resolução dos problemas.

Carbajo (2015) investigou as relações entre matemática e linguagem em estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental. Dois instrumentos foram adotados: um para avaliar a compreensão de textos, e outro para avaliar o desempenho em problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão. A tarefa de compreensão, avaliava o nível de dificuldade em relação a palavras em textos expositivo e narrativo. A tarefa de problemas matemáticos avaliava o nível de dificuldade progressiva nas quatro operações. Ambas as tarefas eram de múltipla escolha. Os dados revelaram uma forte correlação entre as habilidades de compreensão de textos e o desempenho em problemas matemáticos.

Alguns comentários merecem ser tecidos acerca das pesquisas apresentadas. O primeiro, é que todas identificaram, em maior ou menor grau, uma correlação positiva entre a linguagem e a matemática, especificamente entre a compreensão de textos e o desempenho na resolução de problemas. O segundo comentário, é que nessas pesquisas a compreensão de textos envolvia textos não matemáticos, em particular, a história. Aqui cabe tecer uma crítica acerca do

uso de textos não matemáticos para investigar as relações entre matemática e linguagem, sobretudo entre resolução de problemas e compreensão de textos. O argumento principal que sustenta esta crítica é que o enunciado dos problemas matemáticos é, como já ressaltado, um texto. Em sendo um texto, parece ser mais informativo examinar como as crianças compreendem este tipo de texto em particular do que como compreendem outro tipo de texto. Esse paradigma de análise (comparar textos não matemáticos ao desempenho em matemática) não permite examinar aspectos importantes sobre a relação entre linguagem e matemática, pois não esclarece a dificuldade da criança com o texto matemático que é, em última instância, o texto que ela precisa efetivamente compreender para solucionar problemas verbais. Em outras palavras, as dificuldades que os estudantes apresentam para compreender a história não auxiliam a entender as dificuldades que enfrentam com o enunciado dos problemas matemáticos. Em vista disso, há pesquisas que investigam, especificamente, a compreensão de textos matemáticos, como por exemplo, o enunciado dos problemas.

### **Pesquisas que investigam as relações entre compreensão de textos matemáticos e resolução de problemas**

Valverde (2012) examinou a relação entre habilidades de compreensão de textos narrativos, a compreensão do enunciado de problemas matemáticos e sua resolução em alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Para avaliar a compreensão de textos foi empregado um instrumento com perguntas acerca de dois textos narrativos. Para avaliar a resolução de problemas matemáticos foi usado um instrumento com problemas de dois passos em que as crianças tinham que responder perguntas sobre eles. Ambas as tarefas eram de múltipla escolha. De forma geral, os estudantes foram melhores na compreensão leitora do texto narrativo do que na tarefa de matemática. Na tarefa de matemática, os estudantes foram melhores nas perguntas sobre o que era pedido no problema e na planificação do que na revisão da resolução. Foi identificada uma correlação positiva entre a compreensão geral (considerando o desempenho na compreensão do texto matemático e não matemático conjuntamente) e a resolução de problemas.

O aspecto mais interessante neste estudo foi a análise realizada acerca da compreensão do texto matemático que revelou que os alunos eram capazes de identificar o que era solicitado no enunciado, mas não identificavam os dados que

efetivamente deveriam ser usados para a resolução do problema. Este resultado chama a atenção para o fato de que há partes do enunciado que podem ser mais difíceis de serem compreendidas que outras, sendo importante saber que partes são essas, pois conhecer a natureza das dificuldades tem um valor didático como apontam pesquisadores da educação matemática (e.g., CURY, 2008; PINTO, 2000; RADATZ, 1979; SPINILLO; PACHECO; GOMES; CAVALCANTI, 2014).

Arenales (2015), adotando um paradigma metodológico semelhante ao de Valverde (2012), analisou a correlação entre a compreensão de textos narrativos, a compreensão do enunciado do problema e sua resolução em estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental. Os resultados obtidos neste estudo foram semelhantes àqueles obtidos por Valverde com estudantes do sexto ano: o desempenho foi melhor na compreensão dos textos narrativos do que no conhecimento matemático de forma geral, e os estudantes foram melhores nas perguntas de compreensão sobre o enunciado dos problemas e sobre a planificação do que na resolução e revisão do problema.

O dado mais relevante na pesquisa de Arenales (2015) emergiu das análises de correlação realizadas: (i) uma análise geral revelou ser baixa a correlação entre a compreensão leitora de textos não matemáticos (no caso, textos narrativos) e a resolução de problemas; e (ii) uma análise específica mostrou haver uma correlação positiva alta entre a compreensão do enunciado do problema e sua resolução. A conclusão foi que a compreensão do enunciado tem uma correlação clara com a resolução do problema, mais do que a compreensão de textos não matemáticos. Este é um dado importante porque, assim como o estudo de Valverde (2012), chama a atenção para a necessidade de se examinar a compreensão especificamente sobre o enunciado dos problemas matemáticos e identificar as dificuldades que enfrentam com este tipo de texto.

Gálvez (2012) examinou a relação entre o nível da compreensão de textos narrativos, a compreensão de enunciados de problemas matemáticos e a resolução do problema em estudantes do terceiro e sexto ano do Ensino Fundamental. A tarefa de compreensão consistia em responder perguntas sobre as ideias principais e secundárias veiculadas nos textos apresentados. A tarefa de matemática envolvia responder perguntas sobre o que era solicitado nos problemas, quais os dados e o planejamento necessários para resolvê-los. Ambas as tarefas eram de múltipla escolha.

Observou-se que os níveis de leitura, nos dois anos escolares, foram insatisfatórios uma vez que menos da metade dos estudantes não acertava toda



a tarefa. Na tarefa de matemática, mais da metade dos estudantes de ambos os anos escolares não demonstrou compreender o que teria que ser encontrado no problema. Diferenças entre os anos escolares decorriam do fato de que os estudantes do sexto ano foram melhores que os do terceiro ano quanto à capacidade de identificar os dados no enunciado. Isso levou Gálvez (2012) a concluir que há uma leve melhora com o avanço da escolaridade quanto à compreensão do enunciado do problema. Com respeito à resolução, menos da metade dos alunos de ambos os anos escolares conseguiu selecionar a resposta correta. A correlação entre a compreensão de textos narrativos e a compreensão do enunciado de problemas matemáticos foi fraca entre o sexto ano, e inexistente entre os estudantes do terceiro ano. Observou-se também que a resolução dos problemas era independente da habilidade de compreender textos narrativos.

Guimarães (2011) investigou se dificuldades na compreensão leitora do enunciado de problemas seria uma dificuldade para sua resolução. Participaram da pesquisa alunos do quarto ano do Ensino Fundamental que, primeiramente, resolviam os problemas e depois preenchiam um questionário com perguntas relativas aos passos de resolução propostos por Pólya (1978): "O que o problema quer saber?", "Qual a conta a ser usada?", "O problema tem alguma palavra difícil de entender?", "Qual a maior dificuldade encontrada?". De forma geral, os estudantes tiveram dificuldades em: (i) identificar o que era solicitado; (ii) selecionar a operação adequada para a resolução; e (iii) dominar o vocabulário. Essas dificuldades comprometiam a resolução correta dos problemas. O autor concluiu que, embora sejam muitos os fatores que influenciam a resolução de um problema, compreender o que é solicitado e o vocabulário são aspectos determinantes.

Importante comentar que o estudo de Guimarães (2011) é um exemplo de como a compreensão do enunciado do problema pode ser investigada de maneira detalhada, envolvendo as diversas instâncias que o constituem. Assim, responder perguntas sobre o enunciado é um recurso metodológico apropriado que fornece informações sobre as dificuldades das crianças ao tentar compreender este tipo de texto.

Considerando que o enunciado é um tipo de texto, cabe questionar se haveria outros recursos metodológicos que pudessem ser utilizados nas pesquisas, além do método de responder perguntas. Neste sentido, é pertinente voltar a atenção para uma área do conhecimento que investiga especificamente a compreensão de textos: a linguística textual. Pesquisas nesse campo do

conhecimento adotam uma grande diversidade de recursos metodológicos para avaliar a compreensão de textos, como discutido por Spinillo, Hodges e Arruda (2016). Tendo isso em consideração, pesquisadores levantaram a possibilidade de usar outros recursos metodológicos adotados na linguística textual para investigar a compreensão do enunciado de problemáticos (PERALTA; SPINILLO; SILVA, 2018; PERALTA; SPINILLO; XAVIER, 2017).

No estudo conduzido por Peralta, Spinillo e Xavier (2017) foi utilizado o método de reprodução textual para investigar a compreensão do enunciado de problemas por estudantes do quarto e quinto ano do Ensino Fundamental. Os problemas eram do tipo isomorfismo e produto de medidas que requeriam as operações de multiplicação e de divisão para sua resolução. Após ler, um por vez, o enunciado dos problemas, cada participante era solicitado a reproduzir oralmente o texto apresentado. Os problemas continham informações numéricas relevantes e informações irrelevantes para a sua resolução. Isso foi feito com o objetivo de investigar se a criança seria capaz de identificar as informações numéricas relevantes, mencionado-as em sua reprodução. As reproduções foram agrupadas em categorias que expressam diferentes níveis de compreensão acerca dos enunciados dos problemas, como descrito a seguir:

Categoria 1: a criança não faz uma reprodução, dizendo ter esquecido o problema ou apenas mencionando palavras isoladas, frases soltas ou informações confusas.

Categoria 2: reproduções em que estão ausentes a pergunta do problema e informações numéricas sobre as quantidades e seus referentes. Quando mencionadas, essas informações são apresentadas de forma equivocada.

Categoria 3: reproduções em que constam a pergunta, estando ausentes informações numéricas sobre as quantidades e seus referentes. Quando mencionadas, essas informações são apresentadas de forma equivocada.

Categoria 4: reproduções em que constam a pergunta e informações numéricas relevantes e seus referentes. As informações irrelevantes, quando mencionadas, são apresentadas de forma equivocada.

Categoria 5: reproduções em que constam a pergunta e informações numéricas relevantes e seus referentes. As informações irrelevantes, quando mencionadas, são apresentadas de forma apropriada.

No geral, reproduções classificadas na Categoria 1 e na Categoria 2 foram as mais frequentes. Não foram observadas diferenças na distribuição das cinco categorias que pudessem ser atribuídas aos tipos de problemas, concluindo-se que a compreensão do enunciado é algo estável que não varia em função das características dos problemas. Identificar a pergunta e discriminar a informação relevante da irrelevante foram as principais dificuldades identificadas. No entanto, os dados mostraram que era mais fácil compreender o que pede o problema (a pergunta) do que as informações relevantes que efetivamente precisavam ser usadas para sua resolução.

Em estudo subsequente, com os mesmos participantes, Peralta, Spinillo e Silva (2018) analisaram as relações entre essas categorias de reprodução (indicadoras da compreensão do enunciado) e o desempenho na resolução dos problemas. De modo geral, os dados mostraram que embora a compreensão do enunciado fosse relevante para a resolução correta do problema, era frequente encontrar crianças que, apesar de apresentarem um nível regular de compreensão do enunciado, eram capazes de resolver os problemas adequadamente, e que um nível limitado de compreensão do enunciado impedia a resolução apropriada.

Esses dois estudos são exemplos de pesquisas que se voltam especificamente para a compreensão do enunciado e que adotam outro método de investigação além de perguntas, abrindo novas perspectivas metodológicas para examinar as relações entre compreensão do enunciado de problemas e sua resolução.

Na literatura na área, há estudos que se caracterizam como propostas de ensino que buscam levar o aluno a ser proficiente na linguagem matemática. Este é o caso da investigação conduzida por Lima e Noronha (2014a; 2014b) com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Diante da multiplicidade de análises e de dados obtidos pelos autores, as discussões a seguir se concentram na aplicação inicial da proposta que envolve uma interface entre a compreensão de um texto expositivo, a compreensão de enunciado de problemas de proporção e sua resolução.

No estudo de Lima e Noronha (2014a), a avaliação da compreensão do enunciado requeria que os estudantes informassem se haviam ou não compreendido o problema, qual era a pergunta e qual o assunto nele tratado. Respondidas essas questões, o participante era solicitado a resolver o problema. A análise dos dados foi conduzida articulando a compreensão do enunciado com a solução dos problemas, sendo os estudantes agrupados da seguinte maneira:

(i) aqueles que não compreendiam o enunciado; (ii) os que compreendiam, porém não associavam o enunciado ao uso do algoritmo apropriado; (iii) os que compreendiam o enunciado e o associavam ao algoritmo apropriado, porém não respondiam corretamente; (iv) os que adotavam a resolução ideal; e (v) aqueles que nada respondiam. Os dados revelaram que mais da metade dos estudantes não compreendia o enunciado dos problemas. Os casos mais frequentemente observados foram estudantes que mesmo identificando a pergunta do problema realizavam cálculos incorretos; e aqueles que não entendiam expressões matemáticas como “proporção de 3 para 1” ou “proporção” e, conseqüentemente, erravam na solução do problema. Frente a estes resultados, os autores questionaram se a dificuldade com a noção de proporção seria de natureza conceitual ou decorrente de dificuldades de natureza linguística.

Limitações de natureza semântica também foram documentadas por Pavanello, Lopes e Araujo (2011) ao investigarem a compreensão de enunciados e a resolução de problemas matemáticos em estudantes do Ensino Fundamental regular e estudantes do programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA). Uma das análises realizadas revelou que, de forma geral, não há diferença entre os estudantes regulares e os da EJA, e que os participantes desconheciam o significado de expressões como “a mais do que” e “consecutivo”. Verifica-se, portanto, que assim como observado por Lima e Noronha (2014b), os alunos tinham dificuldades em compreender o significado de palavras e expressões matemáticas, o que comprometia o desempenho na resolução dos problemas.

## **As relações entre matemática e linguagem a partir da resolução de problemas: pontos para reflexão**

Em vista do que foi discutido, pontos importantes acerca da relação entre matemática e linguagem à luz da resolução de problemas merecem ser destacados. O cenário que serviu de pano de fundo para reflexão desses pontos foi a pesquisa, uma vez que no campo da educação matemática, o ato de investigar é uma instância que se insere entre a teoria e a prática. Se por um lado a pesquisa tem raízes teóricas que fundamentam modos de conceituar, investigar e interpretar as relações entre os fenômenos, por outro lado, a pesquisa também propicia um retorno à teoria que a fundamenta. Além disso, seus resultados podem ter implicações sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. Justificada a escolha deste cenário, três pontos são abordados a seguir: os principais resultados

das investigações anteriormente discutidas, questões de natureza metodológica e reflexões sobre pontos a serem considerados em pesquisas futuras.

## **O que dizem os resultados de pesquisas na área**

Tomados de forma conjunta, os estudos discutidos anteriormente revelam aspectos importantes sobre a relação entre matemática e linguagem. No que tange à compreensão de textos e à resolução de problemas matemáticos.

O primeiro aspecto é que a correlação entre resolução do problema e compreensão leitora do texto não matemático (narrativos e expositivos) ou é inexistente ou, quando detectada, não é tão expressiva quanto a correlação com o texto matemático, no caso, o enunciado do problema.

Embora os aspectos semânticos (significado das palavras) e processos fonológicos (decodificação) sejam muitas vezes os aspectos linguísticos mais examinados, é preciso ressaltar que a compreensão de um texto vai além, como amplamente documentado por pesquisadores da área (e.g., KINTSCH, 1998; OAKHIL; CAIN; ELBRO, 2015; SPINILLO, 2013), sendo necessário estabelecer relações entre as proposições do texto. No caso de problemas matemáticos, essas proposições se materializam em termos de elementos que constituem o enunciado. Essa afirmação diz respeito ao segundo aspecto a ser tratado nesta seção: a compreensão do problema envolve o entendimento de cada uma das diversas partes do enunciado, não podendo ser tratada de forma global.

O terceiro aspecto, decorrente do segundo ponto mencionado, é que há partes do enunciado dos problemas que são difíceis de serem compreendidas pelos estudantes, como é, por exemplo, a identificação dos dados que efetivamente devem ser usados para a resolução do problema. O que se deseja enfatizar é a necessidade de examinar a compreensão da criança especificamente sobre o enunciado dos problemas matemáticos, que são, em última instância, um tipo de texto.

## **Considerações metodológicas**

Em termos metodológicos, observa-se que pesquisadores atentaram para a necessidade de investigar a compreensão do texto matemático, deslocando-se

da ênfase em investigar textos não matemáticos. Esta mudança de paradigma é, sem dúvida, um avanço, pois, como mostram os resultados dessas investigações, é mais informativo identificar os entraves na compreensão do texto matemático do que os entraves no texto não matemático para identificar as dificuldades na resolução de problemas.

Esta mudança de paradigma conduz a outra questão, também de natureza metodológica: como se configura o método de investigação da compreensão do enunciado dos problemas matemáticos. Essa questão tem raízes na própria concepção do que é o enunciado de problemas matemáticos. Como reiterado diversas vezes ao longo deste capítulo, o enunciado é, apesar de suas características e funções específicas, um texto. Em sendo assim, é possível investigar a compreensão do enunciado por meio de recursos metodológicos oriundos da pesquisa no campo da linguística textual, como o método de perguntas e o método de reprodução do enunciado.

Responder perguntas sobre o enunciado dos problemas e analisar as reproduções dos enunciados parecem ser métodos distintos, porém apropriados, para investigar a compreensão do enunciado de problemas matemáticos. As respostas às perguntas fornecem informações pontuais acerca das dificuldades específicas que as crianças experimentam sobre partes do enunciado. A reprodução, por sua vez, fornece informações mais gerais sobre a compreensão do enunciado, incluindo o conhecimento sobre sua estrutura linguística. O método de pergunta-resposta é mais diretivo, enquanto o método de reprodução deixa a criança mais livre para mencionar, espontaneamente, as informações do enunciado que acredita serem relevantes.

## **Pesquisas futuras: pontos a considerar**

Ainda que seja possível encontrar pesquisas que tratam da compreensão de textos matemáticos, algumas lacunas podem ser identificadas na literatura na área:

- (i) Ainda é limitado o número de estudos que versam especificamente sobre a compreensão de textos matemáticos, no caso, sobre o enunciado dos problemas. Isso é particularmente importante em relação a pesquisas com estudantes do primeiro e segundo ano do Ensino Fundamental, uma vez que a maioria das investigações envolve estudantes do terceiro

ano em diante. Enfatiza-se que é relevante identificar as dificuldades enfrentadas por crianças ao serem introduzidas à linguagem dos textos matemáticos, no caso, os enunciados de problemas de adição e subtração, por exemplo.

(ii) A correlação entre o desempenho na resolução de problemas matemáticos e a compreensão do enunciado ainda necessita de maiores investigações, inclusive para se conhecer as dificuldades das crianças com partes específicas do enunciado e o impacto dessas dificuldades específicas sobre a resolução do problema. Por exemplo, seria interessante saber o que mais comprometeria o desempenho: se a incapacidade de identificar as informações numéricas relevantes ou se a incapacidade em identificar o que precisa ser encontrado.

(iii) Poucas são as pesquisas que examinam a capacidade da criança em discriminar informações numéricas relevantes das irrelevantes. Isso é importante porque muitas vezes os estudantes resolvem problemas considerando todos os números presentes no enunciado, empregando, sem refletir, alguma operação sobre eles, mesmo sobre aqueles que são irrelevantes. Esta distinção é um indicador da compreensão do enunciado.

(iv) A maioria dos estudos utiliza tarefas aplicadas coletivamente e de múltipla escolha, sendo difícil, por meio de tais procedimentos, acompanhar o raciocínio dos participantes. Entrevistas individuais, semiestruturadas e de natureza clínico-crítica permitiriam um acompanhamento mais detalhado das formas de raciocinar do entrevistado acerca de cada elemento envolvido no enunciado e do processo de resolução adotado.

## **Considerações Finais**

Conhecer as dificuldades de compreensão experimentadas pelos estudantes com o texto matemático, no caso, o enunciado dos problemas, traz, sem dúvida, informações mais pertinentes sobre os obstáculos na resolução dos problemas do que conhecer as dificuldades de compreensão com textos não matemáticos, como os narrativos e expositivos. Embora seja inegável a

correlação identificada entre compreender textos não matemáticos e resolução de problemas, esta correlação não esclarece a natureza das dificuldades com o texto matemático que impedem sua resolução.

Esta perspectiva abre espaço para discutir as relações entre matemática e linguagem de maneira integrada e não como duas habilidades distintas, ou como variáveis, em que a linguagem tem impacto sobre a resolução do problema. Não se deseja aqui afirmar que este impacto não exista, mas ressaltar que relações de outra natureza estão igualmente envolvidas. Por exemplo, considerar o enunciado do problema um texto, é uma possibilidade de articulação, pois nesta perspectiva a linguagem é uma instância imbricada no processo de resolução via a compreensão do enunciado, e não fora dela.

A este respeito, estudiosos da linguística textual, especificamente da compreensão de textos, trazem contribuições relevantes, que são brevemente apresentadas a partir de obras que têm por base o modelo de Construção-Integração (CI) proposto por Dijk e Kintsch (1983) e por Kintsch (1998).

De acordo com Kintsch e Greeno (1985), a compreensão de enunciados de problemas matemáticos requer dominar um conjunto de características muito distintas daquelas envolvidas na compreensão de um texto narrativo ou expositivo. Por exemplo, os enunciados dos problemas envolvem a linguagem matemática e, além disso, diferentemente de outros textos, requerem que algo seja realizado, no sentido de que estratégias e procedimentos sejam implementados. Na realidade, o problema tem objetivos específicos, distintos daqueles relativos a outros tipos de textos. Para os autores, a compreensão da estrutura e do significado das proposições do enunciado devem se articular aos processos e estratégias de resolução. Compreender o enunciado, portanto, implica em acionar um conjunto de estruturas de conhecimento e um conjunto de estratégias para o uso dessas estruturas. Os autores propõem um modelo de compreensão do enunciado que inclui três instâncias: (i) a identificação do conteúdo semântico de cada oração; (ii) os esquemas que representam as propriedades e relações entre os objetos (ou referentes) e as quantidades e eles associadas; e (iii) os esquemas de ação que se referem às operações ou cálculos necessários à solução do problema.

Nesher, Hershkovitz e Novatna (2003) ressaltam a importância de atentar para a estrutura superficial do enunciado que gera uma primeira interpretação do texto e uma representação mental. Dessa interpretação surge a estrutura ou esquema proposicional da lógica subjacente ao problema, baseada nos elementos do enunciado e suas relações, tais como: valores conhecidos e desconhecidos,



relações conhecidas e desconhecidas. Em seguida emerge o modelo matemático escolhido por aquele que procura resolver o problema (operações a serem empregadas). Segundo os autores, a avaliação da compreensão do enunciado precisa contemplar tanto os aspectos da primeira representação do texto como os processos que levam ao estabelecimento das inferências que estão associadas às relações necessárias para responder a pergunta do problema. Esta análise linguística do enunciado dos problemas, embora de grande relevância, é pouco conhecida pelos pesquisadores e educadores matemáticos.

Stephany (2021) segue essa mesma abordagem ao afirmar que, por serem um texto, os problemas verbais envolvem a construção de um modelo situacional, que é uma instância do modelo de Construção-Integração (CI). Construir um modelo situacional, que é uma representação mental sobre uma dada situação, é um processo decisivo para se entender as possíveis razões das dificuldades durante a resolução de problemas. Por exemplo, no problema “Pedro tem três bolinhas e Ana tem cinco bolinhas. Quantas bolinhas eles têm ao todo?” (p. 374), a autora comenta que vem à mente a cena de duas crianças sentadas na calçada juntando as bolinhas que possuem. Durante este processo, há uma integração entre as informações explícitas presentes no texto e o conhecimento prévio (conhecimento linguístico e conhecimento de mundo) daquele que procura resolver o problema. Em vista disso, Stephany conduziu um estudo com crianças do quinto ano do Ensino Fundamental que examinou se a habilidade de construir um modelo situacional influenciaria o desempenho na resolução de problemas. Os resultados revelaram que quando o modelo situacional era efetivamente construído, as crianças eram capazes de aplicar estratégias de resolução adequadas. Esta análise linguística do enunciado de problemas matemáticos, embora de grande relevância, é pouco conhecida pelos estudiosos da resolução de problemas e pelos educadores matemáticos.

Reitera-se aqui a posição de Fonseca e Cardoso (2005) de que a dificuldade dos alunos em compreender textos de problemas matemáticos reside, dentre outros fatores, na falta de propostas didáticas voltadas especificamente para o enunciado do problema. O trabalho didático deveria envolver questões de natureza semântica, como levar os alunos a familiarizar-se com termos específicos da matemática e com palavras que possuem significados diferentes em contextos não matemáticos, como mencionam Smole e Diniz (2001). Além disso, continuam Fonseca e Cardoso, são necessárias ações didáticas que promovam estratégias de leitura e reflexões sobre o estilo e estrutura linguística presentes neste tipo de

texto.

Esses comentários se aplicam a textos matemáticos de modo geral, mas também se aplicam aos enunciados dos problemas. Parece ser necessário conduzir situações didáticas que levem os estudantes a compreenderem, por exemplo, que: (i) o enunciado dos problemas matemáticos traz informações sobre quantidades e seus referentes; e (ii) sua estrutura envolve uma pergunta acerca de informações não explicitadas no texto, mas que precisam ser geradas pelo leitor ao estabelecer relações entre as quantidades.

Diante disso, parece que a responsabilidade de levar o estudante a compreender o enunciado dos problemas não deve ser limitada ao ensino de língua portuguesa, mas compartilhada com o ensino de matemática. Evidentemente que determinados fatores, como capacidade de decodificação, vocabulário e memória de trabalho, estão igualmente envolvidos na compreensão de qualquer texto; todavia, as peculiaridades e demandas do texto matemático precisam ser consideradas nas situações de ensino.

Não se deseja afirmar que a compreensão do enunciado conduz, necessariamente, à resolução apropriada do problema ou que as dificuldades se restringem a obstáculos linguísticos. Contudo, há de se considerar que é necessário tornar os estudantes leitores competentes de problemas matemáticos, sendo importante promover ações didáticas que desenvolvam esta competência.

Para finalizar, enfatiza-se que muitas outras reflexões precisam ser conduzidas e exploradas empiricamente acerca das relações entre linguagem e matemática. O presente capítulo é uma contribuição nesta direção.

*Agradecimentos:* As autoras agradecem à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pela bolsa conferida à segunda autora para a realização de Doutorado sob a orientação da primeira no Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco.

## Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; TORTOLA, E. Modelagem matemática no ensino fundamental: a linguagem de alunos como foco de análise. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p.111-142, 2014.

ARENALES, S. H. R. **Relación entre las competencias de comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en los alumnos de tercero primaria de un establecimiento privado**. 60 p. Tese (Doutorado em Licenciatura em Educação e Aprendizagem) – Facultada de Humanidades, Universidad Rafael Landívar, Guatemala, 2015.

CÂNDIDO, P. T. Comunicação em matemática. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 15- 28.

CARBAJO, M. I. B. **Compresión lectora y resolución de problemas matemáticos en alumnos de tercer grado de primaria en una institución educativa estatal de Barranco**. 92 p. Tese (Mestrado em Psicologia menção em problemas de aprendizagem) Escuela de Posgrado, Universidad Ricardo Palma, Lima Perú, 2015.

CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. Perfil cognitivo dos alunos com dificuldades de aprendizagem na leitura e matemática. **Revista Psicologia: Teoria e Prática**, São Paulo, v. 17, n. 2, p.185-198, 2015.

CURI, E. Gêneros textuais usados frequentemente nas aulas de matemática: exercícios e problemas. In: LOPES, C. E.; NACARATO, A. M. (Orgs.). **Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades**. São Paulo: Mercado de Letras, 2009, p. 137-150.

CURY, H. N. (Org.). **Análise dos Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

DIJK, T. A. van; KINTSCH, W. **Strategies of Discourse Comprehension**. New York: Academic Press, 1983.

DOCKRELL, J. E.; TEUBAL, E. Distinguishing numeracy from literacy: evidence from children's early notations. In: TEUBAL, E.; DOCKRELL, J. E.; TOLCHINSKY, L. (Orgs.), **Notational Knowledge: developmental and historical perspectives**. Rotterdam: Sense Publishers, p. 113-13, 2007

DORNELES, B. V. **Escrita e número: relações iniciais**. São Paulo: Artmed, 1998.

DURKIN, K.; SHIRE, B. Primary school children's interpretations of lexical ambiguity in mathematical descriptions. **Journal of Research in Reading**, v. 14, n. 1, p. 46-55, 1991.

FONSECA, M. da C. F. R.; CARDOSO, C. de A. Educação Matemática e Letramento: textos para ensinar Matemática e Matemática para ler o texto. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Orgs.) **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, p. 63-76, 2005.

FUCHS, L. S.; FUCHS, D.; PRENTICE, K. Responsiveness to Mathematical Problem-Solving Instruction: Comparing Students at risk of mathematics disability with and without risk of reading disability. **Journal of Learning Disabilities**, v. 37, n. 4, p. 293-306, 2004.

FIRMENDER, J. M., CASA, T. M.; COLONNESE, M. W. Write on: Reasoning through mathematical writing. **Teaching Children Mathematics**. v. 24, n.2, p. 84-92, 2017.

GÁLVEZ, F. J. M. **Nivel de comprensión lectora de textos narrativos y de problemas matemáticos de las y los estudiantes del primer y segundo ciclo de Educación Básica de la Escuela de Aplicación República del Paraguay de Tegucigalpa, M.D.C. y su incidencia en el planteamiento de un modelo aritmético para resolver un problema matemático**. 163 p. Teses (Mestrado em Formação de Formadores de Docentes de Educação Básica) - Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras, 2012.

GUIMARÃES, K. S. **Compreensão leitora de problemas matemáticos com uma turma de 3º série/4º ano de uma escola pública do distrito federal**. 90 p. Monografia (Graduação em Faculdade de Educação), Universidade de Brasília. 2011.

HARTMAN, J., FRITZ, A. Language and Mathematics: how children learn arithmetic through specifying their lexical concepts of natural numbers. In: FRITZ, A.; GÜRSOY, E. (Orgs.) **Diversity dimensions in mathematics and language learning**. Leck: De Gruyter: p. 21-39, 2021.

HECHT, S., TORGESEN, J. K., WAGNER, R.K.; RASHOTTE, C. A. The Relations between Phonological Processing Abilities and Emerging Individual Differences in Mathematical Computation Skills: A Longitudinal Study from Second to Fifth Grades. **Journal of Experimental Child Psychology**, v.79, p. 192–227, 2001.

KINTSCH, W. **Comprehension: a paradigm for cognition**. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1998.

KINTSCH, W.; GREENO, J. Understanding and solving word arithmetic problems. **Psychological Review**, v. 92. n.1, p. 109-129, 1985.

LIMA, P. J. S; NORONHA, C. A. (Orgs.). **Leitura e ensino de matemática: contribuições para a prática escolar**. Natal: EDUFRRN, 2014a.

LIMA, P. J. S.; NORONHA, C. A. (Orgs.). **Leitura e ensino de matemática: propostas didáticas e avaliação para a prática escolar**. Natal: EDUFRRN, 2014b.

LORENSATTI, E. J. C. Linguagem matemática e língua portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Conjectura**, v. 14, n. 2, p. 89-99, 2009.

MACHADO, N. J. (Org.). **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez Editora, 1993.

MOURA, R.; HAASE, V. G.; LOPES-SILVA, J. B.; BATISTA, L. T.; FREITAS, F. R. de; BAHNMUELLER, J.; MOELLER, K. Reading and writing words and numbers: similarities, differences, and implications. In: FRITZ, A.; GÜRSOY, E. (Orgs.) **Diversity dimensions in mathematics and language learning**. Leck: De Gruyter: p. 291-312, 2021.

MUNN, P. Writing and number. In: THOMPSON, I. (Org.). **Teaching and learning early number**. Buckingham: Open University Press, p. 89-96, 1998.

MURILLO, A. E. R. **Comprensión Lectora y Resolución de Problemas Matemáticos en alumnos de Segundo Grado de Primaria del Distrito Ventanilla-Callao**. 97 p. Tese (Mestrado em Educação), Escuela de Postgrado, Universidad San Ignacio de Loyola, 2012.

NACARATO, A. M. A escrita nas aulas de matemática: diversidade de registros e suas potencialidades. **Leitura: Teoria & Prática**, v.31, n. 61, p. 63-79, 2013.

NESHER, P.; HERSHKOVITZ, S.; NOVOTNA, J. Situation model, text base and what else? Factors Affecting Problem Solving. **Educational Studies in Mathematics**, 52, p. 151–176, 2003.

OAKHILL, J.; CAIN, K.; ELBRO, C. **Understanding and teaching Reading comprehension**: a handbook. NY: Routledge, 2015.

OLIVEIRA, R. A.; LOPES, C.E. O ler e o escrever na construção do conhecimento matemático no Ensino Médio. **Bolema**, v. 26, n. 42B, p. 513-534, 2012.

PAVANELLO, R. M.; LOPES, S. E.; ARAUJO, N. S. R. Leitura e interpretação de enunciados de problemas escolares de matemática por alunos do ensino fundamental regular e educação de jovens e adultos (EJA). **Educar em Revista**, v. 1, p. 125-140, 2011.

PERALTA, L. J. SPINILLO, A. G.; SILVA, J. A. Um estudo exploratório acerca das relações entre a compreensão do enunciado e o desempenho em problemas de multiplicação e divisão. In: V Seminário de Escritas e Leituras em Educação Matemática (SELEM), 2017, Fortaleza, CE, Brasil. **Anais...** V Seminário de Escritas e Leituras em Educação Matemática. Fortaleza, CE, Brasil: Editora da Universidade Estadual do Ceará, 2017.

PERALTA, L. J.; SPINILLO, A. G.; XAVIER, D. B. de F. Compreensão do enunciado de problemas matemáticos por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental: onde reside a dificuldade? In: VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática (EPEM), 2017, Garanhuns, PE, Brasil. **Anais...** VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática, Garanhuns, SBEM-PE, 2017.

PERALTA, L. J. **A compreensão de textos e sua relação com a resolução de problemas matemáticos**. 118 p. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife/PE Brasil, 2016.

PIMM, D. **Speaking mathematically**: communication in mathematic classroom. London: Routledge and Kegan Paul, 1987.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: o estudo do erro no ensino da matemática elementar. São Paulo: Papirus, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. 2. Ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

POWELL, A.; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático**: interações e potencialidades. Campinas, SP: Papirus, 2006.

POWELL, A. Captando, examinando e reagindo ao pensamento matemático. **Boletim GEPEM**, n. 39, p. 73-84, 2001.

RADATZ, H. Error analysis in Mathematics Education, **Journal for Research in Mathematics Education**, v.10, n.2, p. 163-172, 1979.

RINSVELD, A. van; BRUNNER, M.; LANDERL, K.; SCHILTZ, C.; UGEN, S. The relation between language and arithmetic in bilinguals: insights from different stages of language acquisition. **Frontiers in Psychology**, v. 6, n. 265, p. 1-15, 2015.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. Ler e aprender matemática. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M.I. (Orgs.), **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemáticas. Porto Alegre: Artmed, p. 69-97, 2001.

SPINILLO, A. G. A dimensão social, linguística e cognitiva da compreensão de textos: considerações teóricas e aplicadas. In: MOTA, M. P. E.; SPINILLO, A. G. (Orgs.). **Compreensão de textos**. São Paulo: Casa do Psicólogo, p.171-198, 2013.

SPINILLO, A. G.; MAGINA, S. Alguns 'mitos' sobre a educação matemática e suas consequências para o ensino fundamental. In: PAVANELO, R. M. (Org.). **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental**: a pesquisa e a sala de aula. São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático. p.7- 35, 2004.

SPINILLO, A. G., HODGES, L. V. dos S. D.; ARRUDA, A. S. Reflexões teórico-metodológicas acerca da pesquisa em compreensão de textos com crianças. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, v.32, n.1. p. 45-51, 2016.

SPINILLO, A. G.; PACHECO, A. B. de; GOMES, J. F.; CAVALCANTI, L. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? **Boletim GEPEM** (Online), v. 64, p. 1-12, 2014.

STEPHANY, S. The influence of Reading comprehension on solving mathematical word problems: a situation model approach. In: FRITZ, A.; GÜRSOY, E. (Orgs.) **Diversity dimensions in mathematics and language learning**. Leck: De Gruyter: 2021, p. 370-395.

TOLCHINSKY, L. Writing and written numbers as source of knowledge. In: TEUBAL, E.; DOCKRELL, J. E.; TOLCHINSKY, L. (Orgs.). **Notational knowledge: developmental and historical perspectives**. Rotterdam: Sense Publishers, p. 135-158, 2007.

TOLCHINSKY, L. Desenhar, escrever, fazer números. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (Orgs.). **Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática**. São Paulo: Editora Ática, p. 195-217, 1997.

TIGGEMANN, I. S. Pontos de encontro entre os sistemas notacionais alfabético e numérico. **Revista Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 288-297, 2010.

VALVERDE, M. E. B. **Relación entre comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de sexto grado de primaria de las instituciones educativas públicas del Concejo Educativo Municipal de La Molina** – 2011. 176 p. Teses (Mestrado em Educação com Menção em Docência no Nível Superior) - Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú, 2012.

## **Autoras**

### **Alina Galvão Spinillo**

Universidade Federal de Pernambuco

E-mail: alinaspinillo@hotmail.com.br

### **Leidy Johana Peralta Marín**

Universidade Federal de Pernambuco

E-mail: ljperaltamarin@gmail.com



## Capítulo 6

# ESTRATÉGIAS E SENTIDOS: UM MODELO ALTERNATIVO PARA ANÁLISE/ACESSO A INTERAÇÕES EM AÇÃO

*Janete Bolite Frant  
Monica Rabello de Castro*

Este capítulo apresenta um olhar para a compreensão, as técnicas e os procedimentos envolvidos na análise de textos orais e escritos, que utiliza o Modelo da Estratégia Argumentativa, uma alternativa para análise de discurso. Analisamos aqui situações de investigações com professores de matemática em ação, buscando compreender como acessar significados e sentidos produzidos nas interações desses com alunos e pesquisadores. As concepções que apresentamos têm como fundamento a noção de que pensamento e linguagem se estruturam mutuamente e que, nesses processos, a argumentação tem papel organizador.

*Palavras-chave:* Modelo da Estratégia Argumentativa. Análise de Discurso Oral e Escrito. Educação Matemática. Professores da Escola Básica. Argumentação.

### Introdução

Uma das principais dificuldades na pesquisa envolvendo a comunicação/ interação é o acesso aos significados e aos sentidos expressos pelos sujeitos investigados. Desde o século passado essa questão vem sendo problematizada, após muito se investigar e analisar o outro segundo o próprio ponto de vista. Essa conduta, de olhar para o outro, mostrou-se de muita ineficiência para a compreensão dos sentidos e dos significados veiculados na comunicação, no interior dos agrupamentos sociais, pois frequentemente motivada por preconceitos e arrogância.

O Modelo da Estratégia Argumentativa – MEA nasce dessa preocupação, desde o início do século 21, quando as pesquisas em Educação Matemática já estão bastante consolidadas. Verificamos, porém, que, em muitos casos, o trato com o dito do outro ainda trazia esses traços de desconsideração da influência da posição do observador/pesquisador e do contexto e do endereçamento na comunicação. Nossa tarefa investigativa indicou-nos a necessidade de ferramentas que objetivassem a aproximação com materiais linguísticos de análise.

A linguagem foi objeto de investigação desde os antigos gregos, já que para eles a influência era ferramenta de poder. Foram diferentes motivações a provocarem estudos dos usos da linguagem e cada uma delas determinou um modo diferente de leitura das manifestações linguísticas. Porém foi no século passado que o olhar para a linguagem ganhou impulso. Em publicação anterior (CASTRO; BOLITE-FRANT, 2011), examinamos esse movimento e situamos as bases que fundamentam o MEA.

É importante assinalar aqui que, em 2000, um grupo de pesquisadores do campo da Educação Matemática fundou o GT9, de título *Processos cognitivos e linguísticos da educação matemática*, no I SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática), promovido pela SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) e que foi coordenado pelos pesquisadores Jorge da Rocha Falcão (UFPE), Janete Bolite Frant, Monica Rabello de Castro (UERJ) e Romulo Campos Lins (UNESP-Rio Claro)<sup>15</sup>. Nesse seminário, o grupo formulou uma síntese de suas discussões produzindo o texto abaixo, que releva aspectos importantes para a delimitação da temática:

1 - As várias abordagens nos estudos sobre linguagem A maioria dos estudos realizados hoje em dia dedica uma boa parte de sua atenção à linguagem. Existem muitas concepções sobre a linguagem que se amontoam oferecendo-se aos pesquisadores. Uma grande dificuldade é esclarecer de que linguagem se fala. Grande parte dos pesquisadores hoje concorda que os processos cognitivos estão de alguma forma relacionados com os processos linguísticos, porém, às vezes esses pesquisadores se localizam em posições até antagônicas em relação a essa relação. A maioria das pesquisas não explicitam seus fundamentos, qual seu posicionamento frente às diferentes

---

<sup>15</sup> Foram participantes do GT9 no I SIPEM/2000, além de seus coordenadores: 1 - Jussara Martins Albernaz, C. P – UFES, 2 - Maria Manuela Martins Soares David - UFMG, 3 - Maria da Penha Lopes - UFMG, 4 - Edna Maura Zuffi - ICMC – USP-São Carlos, 5 - Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca - UFMG/UNICAMP, 6 - Tânia Margarida L. Costa –UFMG/ USU, 7 – Luciano Meira – UFPE, 8 - Ana Maria Martensen Roland Kaleff – UFF, 9 – Janete Bolite Frant – USU, 10 - Dione Lucchesi de Carvalho – UNICAMP.

visões sobre a linguagem, dificultando a compreensão dos seus resultados de análise. Sente-se, portanto, a necessidade de trabalhos que se dediquem a comentar essas diferenças entre as abordagens sobre a linguagem.

2 - A dificuldade de delimitar a temática Apesar de já contarmos com pelo menos 20 anos de pesquisa em Educação Matemática, não havia durante esse tempo uma preocupação acadêmica no que diz respeito às contribuições dos estudos sobre linguagem, o que começa a acontecer agora. A Educação Matemática estava voltada privilegiadamente para situações emergenciais da sala de aula. Alia-se a isso o fato de ter havido pouca preocupação com os aspectos metodológicos da pesquisa. Hoje, sente-se necessidade de se aprofundarem os estudos específicos sobre metodologia. Esses fatos talvez expliquem, em parte, a dificuldade encontrada com a temática. São ainda poucos os pesquisadores que se identificam com ela e que sistematizam seus resultados em linhas de pesquisa específicas sobre linguagem.

3 - Dois aspectos fundamentais para traçar o perfil do grupo que pesquisa a temática: i. Olhar para os processos envolvidos na Educação Matemática numa perspectiva da COGNIÇÃO e da LINGUAGEM, tendo como convergência a crença de que essas duas perspectivas estão de tal forma imbricadas que não se pode abrir mão de uma ou de outra. ii. O interesse quanto a esse recorte é sobretudo discutir o impacto que as várias visões teóricas dentro da temática têm nas pesquisas e, vice-versa, o impacto das pesquisas nessa produção teórica (CASTRO; DA ROCHA FALCÃO; LINS; BOLITE-FRANT, 2000, p.3).

O MEA foi concebido e discutido desde então com os pares deste GT, ou seja, consideramos esses nossos pontos de partida.

Neste capítulo, pretendemos atualizar essas bases teóricas e examinar algumas das aplicações do modelo feitas ao longo dos últimos 20 anos em trabalhos acadêmicos. A partir das dificuldades de pesquisadores na aplicação do modelo de análise, procuramos otimizar a ferramenta, de modo a torná-la mais objetiva.

Iniciamos com a leitura de conceitos-chave para a compreensão do MEA, sobretudo da retomada das teorias da argumentação e dos estudos sobre a linguagem. Para entender o que o outro quis dizer, seja com palavras, gestos ou marcas, é preciso levar em conta toda essa complexidade que envolve a linguagem. Repetir o que o outro disse é sempre dizer outra coisa: lembramos a

velha brincadeira do telefone sem fio que, em uma fila de pessoas a interpretação da fala do outro é sempre bastante deturpada, pois de um para o outro, o sentido muda. Se prestarmos atenção na comunicação, quando vamos contar para alguém o que nos disseram, mesmo que seja uma única frase, temos necessidade de dizer muitas outras coisas, pois sabemos que repetir não dará ao outro a oportunidade de entender o dito.

A situação da sala de aula e de outras formas de educar envolve, necessariamente, diálogos. Atualmente ainda usamos excessivamente a oralidade para que nossos alunos aprendam. Muitas são as hipóteses sobre o compreender a fala do outro e sobre como se dão os processos cognitivos que levam ao conhecimento. Todos que ensinam têm alguma hipótese de como isso ocorre e fazem seu trabalho de acordo com essas hipóteses. De um modo geral, é assim que geralmente qualquer pessoa faz, mesmo não sendo professor e mesmo a respeito de outros assuntos. Quando o assunto é aprender, conhecer, agimos de acordo com nossas hipóteses sobre como se aprende.

Reunimos trabalhos que se dedicam a analisar as interações entre professores de matemática, seus alunos e pesquisadores em Contextos Interativos de Aprendizagem da Matemática. Nesses trabalhos, procuramos avaliar a aplicação do MEA no acesso aos processos cognitivos e linguísticos na Educação Matemática.

## **Algumas ideias que fundamentam o MEA**

Antes de mais nada, retomaremos algumas ideias que fundamentam o MEA (CASTRO, BOLITE-FRANT, 2011) para levantarmos algumas considerações sobre sua aplicação nestes quase 20 anos de sua prática em pesquisas no campo da Educação Matemática.

O modelo baseia-se na Teoria da Argumentação, desenvolvido por Perelman, Olbrechts-Tyteca (1992) e Perelman (1993), uma retomada dos estudos sobre retórica e dialética, desde os gregos à atualidade. Consideramos aqui que quase todas as manifestações da linguagem são, num certo sentido, diálogos, levando em conta os aspectos dinâmicos dessas manifestações e que a linguagem sempre implica a figura do interlocutor. Mesmo quando estamos sozinhos e parece que falamos conosco, imaginamos interlocutores, “o que fulano vai pensar disso?” ou “como fulano responderia a esta pergunta?”; enfim, conversamos com

outros, mesmo quando estamos sozinhos.

O acesso a significados que se busca compartilhar e, num certo sentido, ao pensamento, remete necessariamente à relação entre linguagem e pensamento e, para nós, a linguagem comporta dois vieses em sua dinâmica: a produção e a comunicação do pensamento, sendo que uma não pode existir sem a outra, pois a produção do pensamento e sua comunicação se retroalimentam. Convém ressaltar que a linguagem tem uma função social de comunicação que não exclui outros aspectos da linguagem, como influenciar, manipular, decidir, manifestar o belo, elogiar, prometer, dar ordens, perguntar, aconselhar, cantar, instituir um fato etc. A argumentação não está presente em todas essas formas de manifestação, no entanto, essas formas podem ser usadas pelo falante para argumentar. Veremos isso adiante nas situações analisadas com o MEA.

Consideramos que a relação do indivíduo com o mundo e com os outros indivíduos organiza-se segundo prioridades e interesses que se estabelecem na linguagem cotidiana e, intrinsecamente, nas práticas sociais. Nas práticas sociais, normas e regras são produzidas nas interações entre os indivíduos. Nos usos da linguagem, regras explícitas e implícitas são produzidas e envolvem todos os aspectos que caracterizam uma cultura, tais como as instituições, as formas de organização social, as crenças, os valores, as intenções, os comportamentos etc. (DUCROT, 1991). Quando falamos, temos o cuidado com essas normas e regras, sabemos que não podemos falar o que quisermos, do jeito que quisermos, em cada lugar em que nos manifestamos, ou seja, existem formas de falar adequadas a cada posição social e local em que o indivíduo se expressa. Além disso, a linguagem é sempre avaliativa, já que os enunciados obtêm seus privilégios mais em função daqueles que os utilizam e das situações em que são enunciados do que de alguma relação com o real. O próprio real, num certo sentido, é produzido pelas práticas sociais e languageiras. Por isso, a análise da linguagem em ação deve levar em conta não só os contextos em que as enunciações se dão, como todos os aspectos que caracterizam a cultura do falante.

A ferramenta de análise que propomos é uma alternativa de análise de discurso; nela as interpretações são procuradas na intenção do locutor de persuadir ou de incitar o outro à ação. A argumentação ressalta aspectos do discurso que dizem respeito ao modo com que o falante organiza sua fala para obter êxito em sua intenção e de como o interlocutor reage e replica.

Deve-se considerar também que quem fala tem sempre uma motivação, o falante quer obter um efeito com o que diz. Para compreender como os sentidos emergem, devemos ter em mente um modelo explicativo que leve em conta que os sentidos são função de uma complexidade de fatores. (CASTRO, BOLITE-FRANT, 2011, p. 35-36)

Enfim, ninguém é completamente livre para falar o que quiser nem quando quiser, regras e normas sociais devem ser levadas em consideração, sem o que a manifestação será taxada como inadequada pelos interlocutores. O contexto de enunciação é fundamental para se ter acesso aos acordos sobre os quais a argumentação se baseia. A linguagem cotidiana é regulada por regras, regras de uso, oriundas de consensos nas práticas sociais, que devem ser explicitadas pela análise de discurso. Não se trata apenas de conhecer o contexto em que sujeito se expressa, mas a complexidade de elementos motivadores dessa expressão, ou ainda, a atividade em que está engajado.

São complexas as situações de apreensão de conhecimento e essas situações se imbricam na complexidade da produção de sentidos e significados, uma vez que o conhecimento é dependente da atividade que o contextualiza; e, ainda, concordando com Billig (1993), tendo a argumentação (retórica) como uma possibilidade de acesso ao pensamento.

Os processos argumentativos em um discurso concernem seu poder persuasivo, a possibilidade de esse discurso obter ou não a adesão do outro. A Teoria da Argumentação destaca relações entre tipos compartilhados de argumento e os efeitos produzidos sobre os auditores. A análise baseada na Nova Retórica centra-se na busca das estratégias utilizadas para convencer o outro através de argumentos; essa ferramenta busca encontrar as relações entre argumentos e “efeitos” do discurso, ou seja, a adesão do outro ou uma ação decorrente da adesão.

É importante lembrar que todo texto, ou seja, o material a ser analisado, sofre antes um processo de fragmentação e redução, uma vez que não é possível dar conta dos inúmeros significados que estão em jogo em uma interação. O procedimento através do qual destacamos partes de um discurso persuasivo com o objetivo de analisá-las coloca problemas desde o início. Um discurso persuasivo produz efeitos por sua inserção como um todo no contexto, geralmente bastante complexo. O próprio jeito de dizer revela uma intenção e se constitui também como material para a análise argumentativa. Os procedimentos de reduzir e fragmentar são indispensáveis e devem levar em conta estes fatores, porém obriga a separar

articulações que são, na realidade, parte integrante de um mesmo discurso. Por esse motivo, a redução deve ser feita de modo bastante cuidadoso.

O sentido e a eficácia de um argumento só raramente poderão ser compreendidos sem levar em conta implícitos. Por isso, quando destacamos um esquema argumentativo, somos obrigados a preencher os vazios deixados no interior do texto por implícitos e pressupostos relativos ao contexto, à atividade em que os indivíduos estão engajados e às escolhas do orador.

A identificação do discurso do locutor com o esquema argumentativo destacado é, portanto, uma hipótese entre várias possíveis. É sempre possível perceber-se mais de uma maneira simultânea de conceber a estrutura de um argumento. Os mesmos argumentos podem ser diferentemente analisados de acordo com pontos de vista adotados, pois o mais plausível é considerar que vários esquemas agem simultaneamente sobre um locutor. O que ocorre em geral é que esses esquemas agem sobre os interlocutores sem serem claramente percebidos e somente um trabalho de explicitação permite interpretar os esquemas intelectuais que eles utilizam ou sofrem. (CASTRO, BOLITE-FRANT, 2011, p. 74-75)

A interpretação do quadro argumentativo implica, necessariamente, avaliar a atividade em que o sujeito do discurso está engajado e ainda compreender a função da enunciação no próprio argumento. Portanto, procuramos compreender como é que a intenção do falante determina suas escolhas no interior de práticas sociais compartilhadas por ele e por seus interlocutores.

## **Um resumo dos passos do MEA**

A ferramenta supõe um tratamento inicial dos dados para a constituição de um corpus de análise. A constituição desse corpus é determinada pela busca de respostas às perguntas da pesquisa e marcada pelas ideias centrais relacionadas aos objetivos desta. Posteriormente, buscamos o que é afirmado no interior do discurso dos sujeitos, o que é aceito, o que é motivo de réplica, e os organizamos de modo a formar uma sequência coerente. Interrogamos cada autor e montamos esquemas para evidenciar o jogo argumentativo. Só então, fazemos interpretações e buscamos evidências para as interpretações no próprio discurso.

Apresentamos em seguida o detalhamento dos passos necessários à montagem da Estratégia Argumentativa.

**1) A leitura exaustiva do material:** é feita para se familiarizar com a fala dos sujeitos de modo a verificar a adequação entre a coleta e os objetivos da pesquisa;

**2) A constituição do corpus de análise:** deve ser feita segundo os objetivos da pesquisa, iniciando-se pela descrição da atividade em que os sujeitos estão engajados e de formas de dizer do grupo social a que pertencem, pois essa descrição também se constitui em dado de análise;

**3) A localização das controvérsias:** significa buscar quais são as afirmações que estão sendo defendidas, mesmo que implícitas, quais são motivos de acordo, quais são motivos de controvérsia. Esse momento é o mais importante, pois imprecisões cometidas aqui irão se avolumar nos passos seguintes. Diante de incompletudes e incoerências, buscamos nos implícitos os elementos que faltam, de modo a encontrar respostas para cada pergunta objeto da pesquisa. É importante ressaltar que esses elementos poderão não estar no local esperado, afinal, os sujeitos pensam enquanto falam. Lembramos que teses são afirmações que causaram controvérsias, são elas o ponto central da argumentação. O objetivo é compreender como a intenção do sujeito determinou suas escolhas, não só as significações contidas em seu discurso, mas aquilo que dá inteligibilidade e organização a sua fala.

**4) A enunciação das teses do locutor:** busca-se explicitar as teses do locutor. Lembramos, a tese é a afirmação que é motivo da controvérsia. Porém, nem sempre é possível escrever a tese do modo como o sujeito a enunciou, uma vez que podem estar implícitas. As teses devem ser resumidas por enunciados claros, na maior parte dos casos, devem ser escritas pelo próprio analista.

**5) A busca dos argumentos utilizados pelo sujeito para sustentar sua tese:** é o passo em que se busca recriar e evidenciar o que o falante usou para dar força a sua tese, que estratégias engendrou para sustentar seus pontos de vista.

**6) Aplicação da tipologia de análise sobre os argumentos encontrados:** os acordos e argumentos são classificados a fim de fazer emergir de forma resumida a dinâmica do diálogo. Busca-se relacionar os tipos de acordos e argumentos à intenção de cada sujeito de provocar possíveis efeitos sobre seu auditório.

**7) A montagem de esquemas referentes ao discurso:** o esquema é uma forma resumida de como o sujeito organizou o seu discurso. A montagem requer muitas idas e vindas ao texto com o objetivo de estabelecer relações entre as



ocorrências encontradas no material analisado. O que se busca é a construção de um esquema explicativo, que coloque em destaque o jogo argumentativo engendrado pelo sujeito e dentro do qual emerge um sentido. Lembramos que não é possível fazer emergir o sentido do que foi dito simplesmente repetindo o que foi dito. A montagem do esquema fornece os elementos necessários a fazer emergir no leitor um sentido; um sentido que o investigador levantou pela análise do material coletado. É possível construir um esquema representativo do diálogo entre vários participantes ou para um único sujeito submetido a uma entrevista. Fator importante é que não existe um formato único para o esquema; este dependerá dos objetivos da análise. A experiência vem demonstrando, no entanto, que o exercício de construção do esquema argumentativo, aqui descrito, deve ser realizado em grupo de forma a tornar a tarefa mais objetiva.

8) **A interpretação:** tem a finalidade de verificar o sentido das afirmativas evidenciadas no esquema. Busca-se a convergência dos fatores apresentados de modo a fazer emergir o sentido pretendido pelo sujeito ou pelos sujeitos. A linha mestra do trabalho de análise é procurar por uma sequência que destaque os elementos mais valorizados no texto pelos próprios autores. Para isso, cada escolha deve ser posta à prova de questionamentos. Não se trata de contar de novo uma história que já foi contada, do jeito que já foi contada, mas de trazer para a cena os debatedores que estão ausentes. Trata-se mais da tentativa de reconstruir uma cena de modo que o leitor, em sua posição paralela ao plano, possa visualizar um embate de ideias.

9) **A busca pelas evidências da interpretação:** nesse passo, deve-se retornar ao corpus de análise para buscar evidências para o sentido apontado pelos esquemas na própria organização e coerência do discurso do entrevistado. A utilização dos fragmentos do discurso do entrevistado caracteriza-se como fator importante na apresentação do esquema, já que eles ajudam a validar a interpretação realizada.

10) **Validação dos resultados:** como em qualquer análise, são necessários critérios de validação dos resultados. Para isso, seguimos as sugestões de Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1998) buscando garantir:

- *Credibilidade*, que se refere aos resultados e interpretações feitas na pesquisa serem plausíveis para os sujeitos estudados, mas que também pode ser reforçada pela análise da própria organização interna do texto e da coerência dos resultados e das interpretações realizadas pela pesquisa.

- *Transferibilidade*, que diz respeito aos resultados poderem ser transferidos para outros contextos ou para o mesmo contexto em outra época. A possibilidade dessa transferência é feita em acordo com os objetivos da pesquisa, apontando os elementos passíveis de generalização e para que contextos.
- *Consistência*, quanto aos resultados estabelecidos terem estabilidade no tempo, ou seja, quanto à teoria utilizada sustentar o que se conclui na pesquisa.
- *Confirmabilidade*, quanto aos resultados obtidos serem confiáveis, ou seja, levar em conta o tempo em campo, realizar o cruzamento dos dados obtidos com outro tipo de informação, submeter as interpretações aos sujeitos ou, ainda, manter a prática da análise feita por toda a equipe do grupo de pesquisa (CASTRO; BOLITE-FRANT, 2011, p. 85)

Esses passos não são rígidos, porém exprimem a prática de um grupo de pesquisadores ao longo de vinte anos de reflexão e utilização do modelo. Maiores detalhes sobre os passos do MEA podem ser encontrados em Castro e Bolite-Frant (2011). Atualizamos esses passos em uma publicação da qual participaram vários investigadores que se propuseram a colaborar com o modelo (CASTRO *et al.*, 2016). Nesta publicação, apresentamos algumas técnicas que o otimizam.

A análise do discurso pretendida com o MEA é dirigida para situações de conversa em seu sentido mais amplo, conforme assinalamos acima, em que os sujeitos defendem pontos de vista, antecipando possíveis controvérsias às suas crenças. A opção metodológica é organizar o material coletado levando em conta seu caráter argumentativo.

## **O MEA na investigação dos processos cognitivos e linguísticos na Educação Matemática**

Para desenvolver uma análise crítica dos usos do MEA, apresentaremos 4 trabalhos que utilizaram essa ferramenta, apresentados ao longo dos últimos 16 anos. Em cada um deles, ressaltaremos aspectos que revelaram dúvidas dos pesquisadores e como foram resolvidas.

O primeiro deles foi publicado no Boletim GEPEM, número 12 (CASTRO *et al.*, 2004). Nele, foram analisados dois artigos publicados na Folha Online, que se encontravam disponíveis no link Sinapse/Arquivo/2003. O primeiro

artigo analisado, “A matemática que conta”, foi escrito pela então presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, a SBM, e o segundo foi escrito como manifestação ao primeiro pelo então presidente da SBEM, os dois disponíveis na mesma página. Esse segundo artigo foi, pois, escrito como réplica ao primeiro.

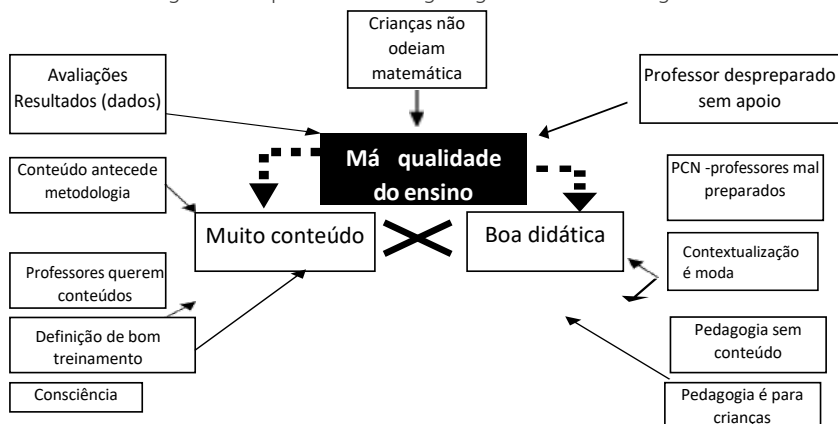
O contexto da época era de debate acerca da criação da SBEM e a autora do primeiro tinha acabado de apresentar e aprovar alguns projetos para o ensino de Matemática no Brasil. Havia um clima de discidência na criação da segunda sociedade.

No primeiro artigo, percebemos uma ideia que organizava praticamente todo o discurso: a da “Má qualidade de ensino”. Havia muitas teses sendo defendidas, o que causou inicialmente uma dificuldade para organizá-las. No entanto, percebemos também que havia uma tese central a respeito desta ideia para a qual as demais convergiam, o que se revelou um achado importante para o modelo. Percebemos que essa ocorrência se dá geralmente em textos escritos, já que no calor das conversas, sujeitos tendem a não apresentar sua fala tão organizada, embora possa ocorrer.

A tese central em questão afirma que a má qualidade de ensino de matemática em nosso país teria como causa a formação deficiente do professor, determinando o sentido de duas afirmações quase como opostas. Os argumentos apresentados pela autora concentram-se em fazer essa quase oposição entre duas afirmativas: *o professor deve aprender bem o conteúdo matemático versus o professor deve ter uma boa didática*. A argumentação concentra-se na defesa da primeira asserção e na dissociação da segunda.

Apresenta, para fortalecer seu argumento, estatísticas sobre o desempenho dos alunos brasileiros, que aparecem como consequência da má formação matemática dos professores. Neste caso, evidenciar uma tese central praticamente evidenciou a estratégia utilizada. Observe-se o esquema montado (Figura 1) modo a dar sentido aos argumentos da autora

Figura 1 - Esquema da estratégia argumentativa do Artigo 1



Fonte: Castro *et al.* (2004, p.52).

O esquema mostra como a argumentação é tecida: a má qualidade do ensino de matemática é consequência da má formação matemática dos professores. A má formação dos professores, por sua vez, é identificada como consequência do pouco conteúdo matemático aprendido pelos professores, que por sua vez é consequência de uma supervalorização da didática. A autora passa então a enumerar premissas que mostrem o pouco valor da boa didática e do alto valor do conteúdo na formação do professor.

No esquema, a assertiva “as crianças não odeiam matemática” aparece como fundamento para a tese central, embora no texto ela se localize ao final. A justificativa para esta escolha deve-se ao fato de que não existe no texto nenhuma indicação de articulação desta assertiva com as demais, o que nos leva a pensar em uma prolepse. A autora possivelmente está respondendo a uma afirmativa muito veiculada em seu meio e que serve de fundamento para a tese da má qualidade de ensino: “O ensino está mal porque as crianças odeiam matemática”.

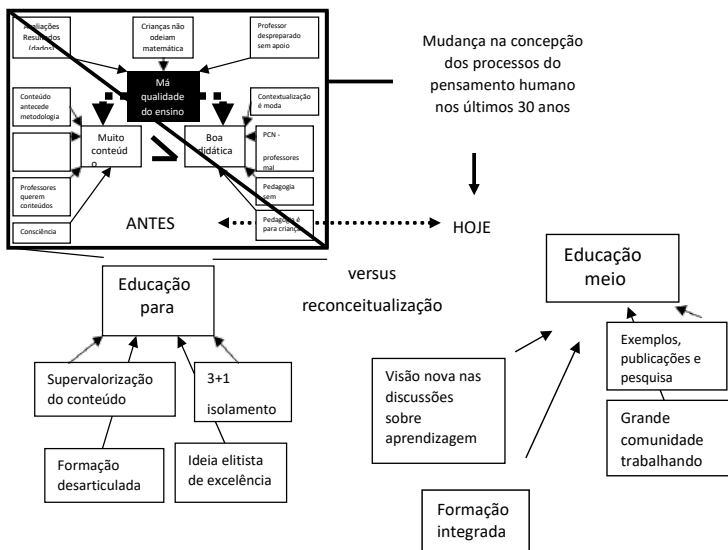
Ao opor o conteúdo à didática, a autora induz o interlocutor à escolha de um em detrimento do outro, isto é, faz acreditar que a opção de um professor pela boa didática implica em um abandono do conteúdo e vice-versa, ou seja, que a escolha pelo conteúdo afasta do professor a preocupação com a boa didática.

A localização de uma tese que seria central no esforço de argumentar evidenciou a estratégia da autora de modo a fazer ressaltar o sentido de sua

manifestação.

O segundo artigo prepara sua argumentação como réplica ao primeiro: “é um equívoco, um erro sério ...”. O autor supõe o desconhecimento de sua oponente para alguns fatos considerados novos, o que desde o início desqualifica a argumentação organizada no primeiro artigo. Localiza o equívoco exatamente na oposição apresentada pela autora entre conteúdo e boa didática, colocando em dúvida a afirmação de que houve investimento na boa didática ocasionando aqueles resultados (as estatísticas) exibidos por ela como consequência da má formação, que leva à má qualidade de ensino. O esquema apresentado na Figura 2 foi montado para mostrar sua estratégia.

Figura 2 - Esquema da estratégia argumentativa do Artigo 2, réplica ao Artigo 1



Fonte: Castro *et al.* (2004, p.53).

O autor do segundo artigo concentra seus primeiros esforços em invalidar os fatos sobre os quais os argumentos da autora do primeiro repousam. Com essa estratégia, o autor espera obter desprestígio para cada um dos fundamentos sobre os quais a tese central de sua oponente repousa, sobretudo a afirmativa

de que o conteúdo precede a didática, argumentando que esses dois devem ser trabalhados de forma integrada. Além disso, invalida a oposição conteúdo versus boa didática reafirmando a importância do conteúdo e da didática na formação do professor.

Uma vez destruída a ligação feita entre a tese da má qualidade de ensino e a supervalorização da didática, apresenta nova tese e constrói sua argumentação sobre outros fundamentos. Para isso, o autor se vale da argumentação por definição de dois tipos de educação, também por meio de uma oposição: a educação por meio da matemática versus uma educação para a matemática. Sua estratégia consiste em identificar a tese de sua oponente com a educação para a matemática ao mesmo tempo em que faz a defesa da educação por meio da matemática, valorizando a segunda para o caso do trabalho docente na escola básica.

O destaque do que chamamos tese central na análise desses dois artigos mostrou a relevância de destacá-la para evidenciar as estratégias dos autores. Nos dois casos, os autores fortaleceram sua argumentação fazendo convergir as teses para uma única. Encontramos esse procedimento fortemente em textos escritos; pouca é a ocorrência quando falas são analisadas.

O segundo trabalho, que trazemos aqui, apresentou resultados preliminares de uma investigação fruto do projeto “A construção de conceitos científicos em ambientes tecnológicos”, realizado com professores dos Ensinos Fundamental e Médio com acesso a ambientes tecnológicos de aprendizagem em sua prática escolar (CASTRO *et al.*, 2004), trabalho apresentado no XII ENDIPE. A investigação tinha o objetivo de relacionar os discursos dos professores sobre a sua prática com as escolhas que realizam no planejamento de suas aulas para construir conceitos científicos e as estratégias utilizadas para implementar seu planejamento.

A análise dos resultados destaca o uso de metáforas pelos professores, procedimento retórico bastante frequente nas interações mais corriqueiras. As inovações tecnológicas aparecem aludidas por metáforas, que conferem significados ora positivos, ora negativos a essas inovações. Em especial, a metáfora da “Loucura” aparece insistentemente no discurso, quando se refere a um modo diferente de pensar suas aulas. A metáfora afirma que “o professor que faz diferente de seus pares (ou seja, que usa tecnologia) é louco”. Essa metáfora, na época da coleta de dados, era bastante naturalizada no contexto das práticas docentes.

As autoras fazem um destaque aos elementos presente e passado, como organizadores da fala da professora, reforçando a comparação entre o trabalho desenvolvido por ela e pelos demais professores. Ela é “louca” porque faz diferente de seus pares, ela usa inovações tecnológicas. Importante ressaltar que a “Loucura”, nesse caso, tem valor altamente positivo. Ela confere à professora características de ousadia, modernidade, como se ela estivesse a frente de seu tempo.

Outras metáforas mereceram destaque, inclusive na intenção de destacar uma tese central no discurso dessa professora; vale ressaltar que se trata de manifestação oral. A autora centraliza a tese de que “A Álgebra é um Bicho Papão”. A metáfora do Bicho Papão é recorrente no meio educacional, quando se trata de algo considerado difícil. O Bicho Papão aterroriza crianças da mais tenra idade.

O argumento escolhido para fortalecer sua tese aparece como causa da dificuldade dos alunos: “É difícil (álgebra) porque o professor não é preparado para ensinar”. Para ela, a Álgebra é difícil, mas há uma razão para isso. A professora hesita em falar de como prepara suas aulas, demonstrando uma dificuldade em falar do conteúdo ministrado por ela.

Para a sua prática, ela usa a metáfora da “Loucura”. Para falar do trabalho pedagógico dos outros, ela usa a metáfora “água-com-açúcar”. Posiciona duas metáforas como quase opostas. A metáfora da água com açúcar é geralmente utilizada para indicar coisas que são fáceis de se fazer.

A metáfora da loucura não é casual, ela cita a palavra meia louca/doida sete vezes e por fim ela mesma confessa ser “diferente”. Este processo de loucura poderia ser justificado pelo simples fato dela considerar sua maneira de ensinar incomum, arrojada, já que, segundo seu relato, ela ousa ministrar aulas diversificadas, com metodologias novas, enfim trabalha de maneira ousada, causando estranhamento nos alunos acostumados a mesmice das aulas de matemática baseadas em exercícios estruturais. Desta maneira, ela seria taxada como louca, fora dos padrões normais de comportamento dos demais professores. A mudança dos professores não é algo muito aceito pelos outros, não é prática constante. Há um estranhamento nesta mudança, por isso é vista como uma loucura. A loucura isenta a pessoa de responsabilidade. (CASTRO *et al.*, 2004, p. 4).

Os outros professores seriam despreparados, descrentes, desinteressados, características relacionadas à metáfora “água-com-açúcar”, seus colegas fariam

seu trabalho do jeito mais fácil. Trata-se de uma estratégia de grande valorização de seu próprio trabalho.

Segue abaixo o esquema da estratégia argumentativa utilizada pela autora:

Figura 3 - Estratégia argumentativa criando o bicho papão



Fonte: Castro, Salles, Nepomuceno e Covre (2004, p. 8).

Esta autora diante de um fracasso amplamente veiculado sobre o ensino da Álgebra, exibe um esforço pessoal para modificar sua prática, mencionando cursos feitos por ela nos últimos 25 anos. Para ela, a má formação e atuação do professor formador se refletiria na manutenção da atual realidade dos alunos em geral: despreparados e sem capacidade de mobilidade de pensamento. Evitando falar muito dos colegas, conferindo aos colegas dificuldades de perceberem os problemas em sua formação, atribui a eles descrédito pelo magistério e desinteresse pela melhoria da qualidade de ensino.



Esse trabalho ressaltou a relevância de se considerarem as metáforas como estratégia de defesa de pontos de vista. As metáforas em geral não precisam ser explicadas e carregam uma saturação de significados compartilhados por grupos sociais. Sua simples menção, traz para o interlocutor essa infinidade de significados, nesse caso, amplamente naturalizados. Além disso, as metáforas trazem também componentes afetivos, que são geralmente fortes aliados na argumentação. Enquanto a “Loucura” confere arrojamento a suas práticas, a “Água Com Açúcar” desqualifica a prática de seus colegas.

Nesse trabalho, a tese central organiza a estratégia do sujeito em sua defesa, fortalecida por duas metáforas fortes. Na época de sua publicação, verificamos um enorme aumento de trabalhos se utilizando da análise de metáforas. O MEA vem dando especial destaque a esse fato (e.g., CASTRO; CASTRO, 2021; PERES, 2018; LEMGRUBER, FERREIRA, 2019). A análise de metáforas como ferramenta argumentativa mostrou-se fundamental, já que sua ocorrência nas práticas languageiras é muito frequente. Verificamos, porém, que o uso delas deve sempre ser remetido para as práticas do grupo ao qual o falante pertence, sob pena de erros grosseiros.

Como um terceiro exemplo de trabalho, apresentamos um extrato de uma dissertação de mestrado que investigou elementos diferenciadores das representações sociais da aprendizagem da matemática, identificadas na literatura, em contraste com as de um grupo de professores dos anos iniciais do ensino fundamental em desenvolvimento profissional em serviço, na perspectiva da Educação Matemática, e as implicações desses elementos no aprimoramento dos conhecimentos profissionais desses professores (PERES, 2018).

As análises evidenciaram uma tensão entre as concepções de Pedagogia Tradicional, forte referência na formação e na experiência pessoal e profissional das professoras, e de Pedagogia Nova, remetida à necessidade de acomodar elementos novos ao trabalho docente.

Nessa tensão, aparece também uma metáfora que se refere à Matemática como algo que gera medo.

A dor e o medo foram elementos associados à memória que as professoras carregam dos seus processos de aprendizagem matemática enquanto alunas e da formação inicial. A negatividade atribuída à maneira como aprenderam faz com que as professoras busquem ensinar de uma maneira diferente. Na ausência de elementos para significar “o novo”, metáforas

associadas à pedagogia tradicional foram evocadas, porém, com ressignificações, como a necessidade de o professor perceber o aluno (PERES, 2018, p. 46).

O discurso traz marcas de experiências pessoais com a aprendizagem da matemática, imbuído por um sentimento de medo. Expressa necessidade e desejo de romper com alguns bloqueios para que a aprendizagem dos alunos e, conseqüentemente, a história deles com a aprendizagem da matemática seja diferente, como mostra o esquema argumentativo apresentado na Figura 4.

Figura 4 - Estratégia Argumentativa criando o monstro



Fonte: Peres (2018, p.87)

A tese defendida, neste caso, é a de que o professor tem que ensinar diferente do que aprendeu e lista razões para isto. O principal motivo é expresso por uma metáfora, “A Matemática é um Monstro”, ou seja, foi um monstro quando a professora era aluna.

Esse tema foi discutido de modo relevante por Lins (2004). Sua motivação com a Educação Matemática o fez levantar a discussão sobre esse monstro que assombra alunos, até nos cursos de graduação em Matemática. Localiza o problema diferenciando o que seria a Matemática da Escola da Matemática dos Matemáticos, com pouco contato entre elas. O monstro seria criado nas duas situações, porém, o monstro do matemático sendo quase diametralmente diferente do monstro que reside na escola e que ele chamou monstro de estimação. No monstro que reside na escola, existe um estranhamento fortemente relacionado

ao que se pode dizer dele e, acrescentaríamos, é mais fácil falar do monstro do que da Matemática, dele, todos estão autorizados a falar. Peres (2018) está falando desse monstro que reside na escola e mostra que ele está tão naturalizado nas conversas dentro da escola, que sua presença é atestada com preocupação da professora.

Toda a argumentação da professora se dirige a evitar que seus alunos tenham o trauma que ela tem no enfrentamento do monstro. A maneira como as professoras ensinam depende daquela em que elas observam que o aluno aprende. A aprendizagem do aluno remete à aprendizagem da professora.

A professora compara a matemática à imagem do monstro, ser que provoca medo, ameaça. O “monstro da matemática” é capaz de matar o desejo e o gosto por aprender matemática. A professora diz que matemática é vida e que ela quer que esteja viva dentro dos alunos delas, logo, o “monstro da matemática” não pode existir porque ele ameaça e mata o prazer de aprender matemática. Foi assim com ela, não pode ser assim com os alunos. Para isso, ela precisa ser diferente e criar a possibilidade de que a experiência do aluno com a aprendizagem matemática seja diferente da dela (PERES, 2018, p. 71).

As menções ao medo da matemática são inúmeras na literatura. Interessante observar como estão naturalizadas as metáforas associadas ao fracasso na aprendizagem matemática, sempre relativas a experiências ruins, monstros, bichos papão.

Figura 5 - Ilustração da metáfora “a matemática era um monstro”



Fonte: Peres (2018, p. 89).

Esse exemplo, ver Figura 5, nos permite avaliar a relevância e o peso que a análise das metáforas tem na análise argumentativa. Além disso, após a apresentação de três trabalhos diferentes, podemos chamar a atenção do leitor para os esquemas idealizados por seus autores. Neles, ora aparece a tese em destaque e seus argumentos em outras caixas, ora aparece a tese em uma caixa, já com seu principal argumento ou, como no primeiro caso, tese central rodeada de outras teses. Veremos, no próximo trabalho, um esquema montado com a dinâmica da conversa, outra forma de apresentação da Estratégia Argumentativa.

O que motiva cada uma das formas de apresentação da Estratégia Argumentativa é o objetivo da análise. Destaca-se o que é essencial para responder as perguntas da investigação. O esquema da Estratégia Argumentativa que o analista concebe deve seguir esse espírito; não há receita para todos os casos.

O último exemplo que apresentamos foi publicado como capítulo de um livro (BOLITE-FRANT; CASTRO, 2003). O objetivo da investigação era compreender de que maneiras os estudantes desenvolvem o processo de matematização, no caso, o pensamento probabilístico, enquanto trabalham numa atividade matemática e tentam convencer a si próprios e aos outros colegas de que sua estratégia funciona. Apresentaremos a análise de uma atividade com um grupo de alunos 5ª série do ensino fundamental, suas hipóteses e justificativas apresentadas para raciocínios probabilísticos. Foi o primeiro artigo em que apresentamos a noção de estratégia argumentativa e sua importância como instrumento metodológico para a análise na pesquisa qualitativa sobre discursos na sala de aula de Matemática. O problema foi assim apresentado aos alunos (ver Quadro 1):

Quadro 1 – Problema proposto

Leia com atenção, escreva sua resposta da pergunta 1, individualmente. Depois faça 2 e 3 em dupla.

Dois amigos, Antonio e Pedro, brincam com dois dados. Se a soma dos dados der: 2; 3; 4; 10; 11 ou 12 Antonio ganha um ponto. Se a soma dos dados der 5; 6; 7; 8; ou 9. Pedro ganha um ponto.

1. Estas regras são justas? Por que você acha isso?
2. Agora jogue com seu/sua colega (podem jogar quantas rodadas precisarem). O resultado desses jogos vem a favor ou contra o que você respondeu na questão 1?
3. Se você achou que as regras não foram justas, como criaria outras regras para um jogo ser mais justo?

Fonte: Bolite-Frant e Castro (2003, p. 52).

Cada estudante recebeu a folha de atividade, que foi lida em voz alta e dúvidas foram tiradas. Em seguida cada aluno trabalhou sozinho escrevendo suas respostas e hipóteses. Em seguida, eles deveriam formar duplas e jogar o jogo proposto testando então suas hipóteses. E por fim, eles compartilharam com o grupo suas descobertas. Dessa forma, ao invés de ter os alunos respondendo ou se dirigindo ao professor (autoridade), os estudantes deveriam falar e discutir entre eles. O envolvimento na atividade pode ser observado, no vídeo, pois o grupo de alunos praticamente esqueceu que a câmera estava ali.

Uma discussão muito rica surgia. Algumas vezes, usando a mesma palavra, os alunos produziam significados diferentes; houve, então, um tempo para acomodação dos termos utilizados. Por exemplo, a palavra “chance” estava sendo empregada com sutis diferenças, o que gerou então a pergunta ao grupo: “o que é chance?” Uma das alunas estava presa à ideia de que chance diz respeito ao que é mais difícil, por exemplo, tirar um seis ou um três. Ela defendia que tirar o seis é mais difícil do que tirar qualquer outro.

Essa atividade foi realizada aqui no Brasil, em Israel, nos Estados Unidos e no México. Observou-se que, no Brasil e em Israel, os jogos vendidos em lojas de brinquedos trazem em suas regras, de modo geral, que o primeiro jogador é aquele que tirar um 6 no dado. No dominó, inicia aquele que tiver o 6-6, daí a influência sobre as crianças de que o 6 é um número mais difícil de sair. Além disso, apareceram outros costumes socioculturais, tais como sacudir o dado tantas vezes para dar sorte, entre outros. “Chance” foi, finalmente, acordado com o sentido de possibilidades.

Após acharem que o jogo era injusto, partiram para propor uma nova regra. A discussão seguiu calorosa. Três deles acreditavam que o jogador A iria ganhar porque ele tinha “mais números logo ele tinha mais chances de vencer”. Um deles, apresentou um espaço amostral de 21 possibilidades, e afirmou que o jogador B iria ganhar.

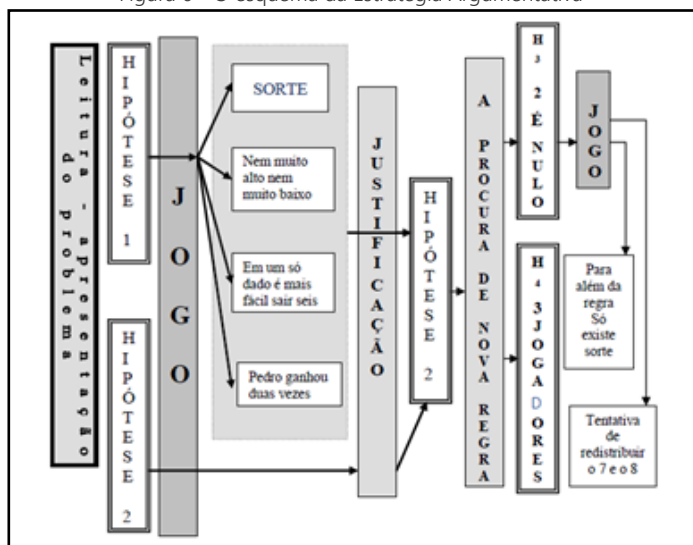
Foram levantados 2 argumentos: a) o de quantidade-- “quem tem mais números ganha” e b) o de espaço amostral - o argumento apoiado no espaço amostral de 21 possibilidades criado por um dos alunos, em sequência a um processo dialógico, conquistou a adesão dos outros colegas.

A hipótese vencedora teve a seguinte argumentação.

Peguei cada número e vi quantas possibilidades de sair em dois dados. O dois tem uma possibilidade só, o três também só tem uma possibilidade, uma chance que é um e dois, o quatro tem duas chances que é dois e dois e um e três, o cinco tem duas chances que é quatro e um e três e dois, o seis tem três chances que é cinco e um, quatro e dois e três e três, o sete três chances que é o seis e um, cinco e dois, três e quatro, o oito também tem três chances que é seis e dois [outra aluna fala junto com o ele] quatro e quatro [só ela fala], cinco e três, o nove tem duas chances que é quatro e cinco seis e três as dez duas chances que é cinco e cinco e seis e quatro o onze uma chance só que cinco e seis. (BOLITE-FRANT; CASTRO, 2003, p. 56).

Essa argumentação convenceu a todos. Apresentamos o esquema (ver Figura 6) que resume a discussão.

Figura 6 - O esquema da Estratégia Argumentativa



Fonte: Bolite-Frant e Castro (2003, p. 124).

Se olhássemos apenas a afirmação: O jogo não é justo, perderíamos a oportunidade de discussão das diferentes justificações. Ficou claro que os

conhecimentos eram distintos, pois a justificativa de quantidade é bastante distinta da do espaço amostral. São formas distintas de produzir significado e que certamente interferirão na resolução de outros problemas sobre probabilidade. Deixar o aluno achar que “acertou” a resposta é muito pouco e até mesmo enganoso.

É interessante observar que apesar de uma aluna ficar intrigada com a frequência com que aparecia a soma 7, como eles haviam criado uma regra em conjunto que parecia ser forte, ela desiste de investigar seu desconforto mais profundamente. Cabe também ressaltar que sustentar sozinho uma crença que não aparenta força contra uma que ganha a adesão da maioria é muito difícil. O argumento da maioria tem uma força retórica muito grande. A partir daí, ela, ainda em voz baixa, tenta se convencer de que era apenas sorte, de que o argumento vitorioso era realmente o melhor.

A solução encontrada por eles para explicar a injustiça do jogo deixou de considerar a diferença de sair o par (1,2) do par (2,1), o que gera um espaço amostral de 64 possibilidades. Entretanto, o jogo argumentativo que vivenciaram proporcionou um outro tipo de aprendizagem.

Temos a considerar, com esse exemplo, algumas ideias importantes. O argumento de autoridade tem muita ocorrência em situações como essa e dificilmente é vencido. É um tipo de argumento que muitas vezes ocorre de modo muito implícito, sendo, nesses casos, facilmente escapável em uma análise.

Enfatizamos que o esquema apresentado se mostrou procedente. Nele, privilegiou-se mostrar a evolução do diálogo e da testagem das hipóteses levantadas, em detrimento da apresentação da argumentação propriamente dita. Esse procedimento foi útil aos propósitos do texto e é isso que se deve levar em conta na hora de organizar esquemas. Eles servem ao leitor: o propósito é recriar possibilidades de o leitor vivenciar algum aspecto relevante das estratégias utilizadas pelos sujeitos.

## **Considerações Finais**

Temos nos dedicado, sobretudo, a analisar situações em que os sujeitos falam de sua prática. Trata-se de caracterizar a argumentação que ocorre quando alguém se propõe a falar do que faz no seu ambiente de trabalho. Nessas situações, os sujeitos fazem a defesa de pontos de vista. Portanto, são situações

que lidam com o preferível, trata-se do terreno de escolhas: o porquê de uma determinada prática em detrimento de outra. O interesse com a argumentação é na descrição de como ela entra em cena no discurso sobre a prática.

Nossa intenção foi oferecer ao leitor alguns avanços na aplicação do MEA em diferentes contribuições, ressaltando aspectos importantes a serem observados em novas aplicações do modelo.

Quando estamos conversando, procuramos ser entendidos. Usamos recursos de que, às vezes, sequer nos damos conta: sempre avaliamos para quem falamos, se ele está entendendo o que estamos dizendo e, dependendo de sua expressão, dizemos a mesma coisa de diversas formas. Nosso ponto de partida é considerar que quem fala quer ser compreendido e busca formas para ter êxito na conversa. Sabemos que a compreensão do que o outro diz não depende apenas das palavras que usa, nem de como as usa. Um dos pontos que julgamos estar pouco explorado no modelo diz respeito à descrição da atividade do sujeito para a compreensão dos sentidos. Não sabemos ao certo se, na prática, os que aplicam o MEA exploram esse recurso. No entanto, percebemos que, nas apresentações das pesquisas, a descrição da atividade dos sujeitos, quando aparece, é de forma por demais sucinta. Isso dificulta a compreensão do leitor, já que este não estava presente na situação envolvida na pesquisa.

A Teoria da Argumentação oferece ferramentas para a compreensão de como os indivíduos tentam convencer a si próprios e aos outros através de estratégias que podem ou não funcionar. Além disso, toda argumentação é provida de ambiguidades, que se desenvolvem numa linguagem natural. Essas ambiguidades são fruto de diferentes motivações, afetivas, intelectuais, políticas etc., às vezes não conscientes nem mesmo para o autor do discurso. O locutor quando fala o faz sempre com mais de uma intenção. Mesmo querendo convencer alguém de alguma ideia, o locutor também quer ou que seu auditório goste dele, ou que fale bem dele, ou que demonstre algum outro aspecto positivo. As escolhas do orador na argumentação levam em conta todas essas intenções. Esses aspectos também aparecem com pouca frequência nas análises. Vimos, no quarto trabalho apresentado, que os alunos interrompem sua discussão, coagidos por um tipo de argumento de autoridade, que fala mais ao emocional do que ao racional; e a frequência dessa dinâmica é grande.

Como aspectos positivos, apontamos o trabalho que mostra o desenvolvimento da ideia de tese central e a preocupação de desvelar o papel das metáforas na argumentação. Esperamos que este trabalho contribua para o



debate com nossos pares sobre esse tema no sentido de avançar nesses estudos, de modo a contribuir para a melhoria da educação de nossa gente.

## Referências

ALVES-MAZZOTTI, A. J., GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

BILLIG, M. **Psychology, rhetoric and cognition in the recovery of rhetoric**. Virginia-USA: University Press of Virginia, p. 119-136, 1993.

BOLITE-FRANT, Janete; CASTRO, M. R. Jogando Dados: algumas características do pensamento probabilístico. In: CASTRO, Monica Rabello. **VETOR NETECLEM.1**. Cam-pos dos Goytacazes: Editora da FAFIC, v.1, p. 95-112, 2003

CASTRO, M. R.; CASTRO, C. R.; **NEM É PRECISO EXPLICAR**: metáforas e representações sociais. Maricá: Editora da Autora\Kindle, 2021. ISBN (online)9798461208417.

CASTRO, M. R. *et al.* **Análise das Interações em Educação**: Retórica, Comunicação e Representações Sociais. Nova Iguaçu: Marsupial, 2016.

CASTRO, M. R.; BOLITE-FRANT, Janete. **Modelo da estratégia argumentativa**: análise da fala e de outros registros em contextos interativos de aprendizagem. Curitiba: UFPR, 2011.

CASTRO, M. R.; BOLITE-FRANT, J.; NEPOMUCENO, K.; SALLES, M. F.; COVRE, R. O conceito de montagem para análise e compreensão do discurso. Rio de Janeiro, **Boletim GEPEM**, v. 44, 2004.

CASTRO *et al.* Estratégias argumentativas no trabalho docente. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; FUMES, N. L. F.; AGUIAR, W. M. J. (Orgs.). **Estudos sobre a atividade docente**: aspectos teóricos e metodológicos em questão. São Paulo: EDUC/EdUFAL, p. 89-107, 2010.

CASTRO, M. R.; DA ROCHA FALCÃO, J. T.; LINS, R. C.; BOLITE-FRANT, J. Documento de conclusão das atividades do GT9. In: **Anais I Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), (manuscrito), 2000.

CASTRO, M. R.; SALLES, M. F.; NEPOMUCENO, K.; COVRE, R. O planejamento de curso e a construção de conceitos científicos em ambientes tecnológicos de aprendizagem: a estratégia argumentativa do professor In: Encontro Nacional de didática e Práticas de Ensino - ENDIPE, 12, 2004, Cuiabá, **Anais...** Encontro Nacional de didática e Práticas de Ensino, Cuiabá, p. 15, 2004.

DUCROT, O. **Dire et ne pas dire**. Paris, Ed. Hermann, 1991.

LEMGRUBER, M. S.; FERREIRA, G. M. S. Metáforas fundamentais da tecnologia educacional. **Educação em Foco**, v. 23, n.1, p. 15-38, 2019.

LINS, R.C. Matemática, monstros, significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V; BORBA, M.C. (Org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 92-120, 2004.

PERELMAN, C. **O Império Retórico**. Coimbra: Edições Asa, 1993.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. **Traité de l'argumentation: la nouvelle rhétorique**. Bruxelles: Université de Bruxelles, 1992.

PERES, P. B. F. **Representações sociais da aprendizagem matemática por professores dos anos iniciais do ensino fundamental em desenvolvimento profissional em serviço**. 192p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estácio de Sá, Rio de Janeiro, 2018.

## **Autoras**

### **Janete Bolite Frant**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

E-mail: janetebf@gmail.com

### **Monica Rabello de Castro**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

E-mail: rabellomonica@uol.com.br



## **Parte 2**

Pesquisas sobre o ensino e a  
aprendizagem da Matemática

## Capítulo 7

# A RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA DE COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA POR ESTUDANTES DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

*Ernani Martins dos Santos*

O presente capítulo discute o desempenho e as estratégias de resolução utilizadas por estudantes, do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em Pernambuco, na resolução de situações-problema do Campo Multiplicativo, especificamente situações do eixo Comparação Multiplicativa. Ele está fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais, na perspectiva que a conceitualização é tida como parte constituinte do aprendizado escolar. A metodologia pauta-se numa abordagem qualitativa, especificamente num estudo de caso, para análise dos dados levantados. Os resultados apontam que os estudantes participantes da investigação apresentam bom domínio conceitual dos principais elementos constituintes de situações de Comparação Multiplicativa (referente, referido e relação), demonstram interpretar corretamente o que se é solicitado numa situação-problema e sabem identificar e resolver a operação aritmética adequada à resolução da situação.

*Palavras-chave:* Resolução de Problemas. Campo Conceitual. Estruturas Multiplicativas. Comparação Multiplicativa. Ensino Fundamental.

## Introdução

O processo de ensino e aprendizagem de matemática no contexto escolar é encarado como importante ferramenta de preparação de crianças e jovens para a vida, sendo um caminho que favorece o desenvolvimento do pensamento lógico e contribui para o progresso intelectual e social do indivíduo. Nesta direção, é de suma importância que os estudantes adquiram “confiança em

sua própria capacidade para aprender Matemática e explorem um bom repertório de problemas que lhe permitam avançar no processo de formação de conceitos” (BRASIL, 1997, p.50).

Em décadas passadas, e não muito distante do tempo atual, a resolução de problemas passou a ser indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) como uma abordagem ao processo de ensino e aprendizagem de matemática na Educação Básica, sugerindo-se como foco principal o uso do problema como ponto de partida no ensino, ao contrário de perspectivas anteriores que partiam da definição matemática, na busca do favorecimento da compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos.

A Base Nacional Curricular Comum - BNCC (BRASIL, 2018), documento referencial mais recente para o ensino e a aprendizagem de matemática no contexto escolar, continua a destacar a resolução de problemas, juntamente com outras perspectivas didático-pedagógicas, como a modelagem, por exemplo, como forma de ensinar matemática, porque essa metodologia desenvolve habilidades e competências ligadas ao raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente.

O uso do problema, como ponto de partida no ensino, tem grande potencial para abordar conceitos matemáticos, já que envolver os estudantes na resolução de problemas de diversas naturezas, contribuindo significativamente para a aprendizagem conceitual, no sentido de relacionar ideias matemáticas a uma variedade de contextos, permitindo aos estudantes ampliar suas compreensões do que vem a ser Matemática.

Dito isto, temos que o ensino de matemática tem como um dos seus principais desafios a abordagem de conteúdos do currículo da Educação Básica, pautando-se na resolução de problemas, de forma que o estudante tenha oportunidade de aplicar conhecimentos matemáticos, já construídos, em novas situações, de modo a resolver uma questão proposta. Isso porque, a resolução de problemas vem sendo vista como uma estratégia instrucional de qualidade não só para a disciplina de matemática, constituindo-se em rica oportunidade para estimular o raciocínio, levando o estudante à reflexão sobre possibilidades de desenvolver formas inusitadas para se defrontar com situações do cotidiano.

Se do ponto de vista educacional a resolução de problemas tem um valor inquestionável, na perspectiva da psicologia isso também é observável, como descrito nos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1983; 1988; 1991; 1994; 1996; 2009). Sob a ótica desta teoria, Spinillo *et al.* (2017, p.

930) propõem que problemas matemáticos são entendidos como “situações que tornam os conceitos significativos para o indivíduo, mobilizando um conjunto de operações e representações para sua resolução.”

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que defende a conceitualização como parte fundamental da aprendizagem. Vergnaud (1983) apresenta, como princípio do processo de aquisição do conhecimento, que os indivíduos formulam conceitos e constroem conhecimento enquanto vivenciam diferentes situações reais que abordam o conteúdo estudado.

É através das representações e das situações-problema, segundo Vergnaud (1988), que um dado conceito matemático adquire significado. Nesta direção, a compreensão de um conceito, por mais simples que seja, não emerge apenas de um tipo de situação, assim como uma mesma situação não envolve apenas um único conceito, uma vez que a aquisição e o desenvolvimento dos conceitos ocorrem na construção de uma espécie de teia, de modo que os conceitos tanto se articulam entre si como emergem de forma combinada em uma mesma situação. Observa-se, sob esta perspectiva, que os indivíduos formam conceitos a partir das situações a que são apresentados.

Diante dos pressupostos descritos, este capítulo discute e analisa o desempenho e as estratégias de resolução de problemas de Comparação Multiplicativa, por um grupo de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, com o objetivo de compreender se estes estudantes desenvolveram as habilidades e competências necessárias para compreensão e solução deste tipo de situação matemática, em contextos diversos, nos primeiros ciclos do nível escolar ao qual se encontram. Como não existe a possibilidade de uma reflexão consistente sem que haja uma teoria que possa embasar este processo, a Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente o Campo Conceitual Multiplicativo, fundamenta e permeia o processo de análise das situações apresentadas e resolvidas pelos estudantes.

## **A teoria dos campos conceituais, o campo conceitual multiplicativo e as situações-problema do eixo comparação multiplicativa**

Os PCN (BRASIL, 1997) deram ênfase à importância de o professor explorar um conjunto de situações-problema que possam trabalhar as operações

de multiplicação e divisão, uma vez que a abordagem dessas operações está interligada, baseando-se em um campo mais amplo de significados do que se tem normalmente evidenciado no contexto do ensino da matemática escolar.

No mesmo sentido das orientações dos PCN, a BNCC (BRASIL, 2018) reforça a importância da abordagem do conceito de multiplicação ainda no primeiro ciclo do Ensino Fundamental, orientando que os estudantes possam alcançar o objetivo de compreender os diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução proposta, já que esperam que os estudantes possam:

[...] resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (BRASIL, 2018, p. 293)

Esses documentos oficiais de orientações curriculares têm evidenciado a importância da apresentação aos estudantes, já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, de diferentes tipos de situações-problema referentes ao Campo Conceitual Multiplicativo.

Nesta direção, entendemos que a Teoria dos Campos Conceituais, teoria que visa compreender com indivíduos constroem conhecimentos matemáticos, contribui para subsidiar a análise do processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar, tendo em vista que ela visa “fornecer um quadro que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por conhecimentos, tanto o saber fazer como os saberes expressos” (VERGNAUD, 1991, p. 155).

Segundo Vergnaud (1991; 1996), a Teoria dos Campos Conceituais se configura como um conjunto de situações cujo seu domínio gradual exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas de naturezas distintas e em estreita conexão, uma vez que:

[...] a perspectiva dos campos conceituais é progressiva, não substitutiva. Ou seja, o campo conceitual vai sendo progressivamente dominado pelo aprendiz; o conhecimento implícito vai evoluindo, progressivamente, para o explícito, ao invés de ser substituído por ele. (MOREIRA, 2002).

Evidencia-se que para a formação de um conceito é vital pensar na relação existente entre este conceito e uma diversidade de situações, uma vez que Vergnaud (1991, p. 156) afirma que “um conceito não pode ser reduzido a sua definição pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino”.

Esta teoria se apresenta como um excelente amparo didático, porque propõe um suporte teórico que fundamenta e explica como os estudantes constroem conceitos matemáticos e, conseqüentemente, aprendem matemática, tendo como pressuposto a ideia de que o conhecimento está organizado em campos conceituais que são sistematizados por várias situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamentos. Nesta direção, vários pesquisadores brasileiros têm se dedicado ao estudo desta teoria, abordando várias vertentes dos campos conceituais (BARRETO; RÉGO; 2020; GITIRANA, *et al.*, 2014; LAUTERT *et al.*, 2019; LAUTERT; SANTOS, 2017; MAGINA; LAUTERT; SANTOS, 2020; MAGINA; MERLINI, SANTOS, 2016; MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014; MAGINA; SPINILLO; LAUTERT, 2020; SANTANA *et al.*, 2016; SANTOS *et al.*, 2019; SANTOS, 2015; SELVA *et al.*, 2018; SPINILLO *et al.*, 2017)

Em cada campo conceitual existe uma variedade de situações e a principal tarefa do professor é contribuir para que as crianças e os jovens desenvolvam um amplo conjunto de esquemas e representações que são moldados pelas situações que encontram e dominam progressivamente. E nessa perspectiva, Vergnaud (1991) propõe uma terna (S, I, R) para a construção de um determinado conceito, em que: S é um conjunto de situações; I é o conjunto de invariantes do conceito; e R é o conjunto de representações simbólicas.

Em seus estudos Vergnaud dedicou uma atenção especial para o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Segundo Vergnaud (1994), as Estruturas Multiplicativas são entendidas como um conjunto de situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação entre elas, abarcando o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar e resolver estas situações.

Quando fazemos referência ao Campo Conceitual Multiplicativo consideramos este como sendo “um conjunto de problemas ou situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros” (MAGINA; MERLINI; SANTANA, 2013, p. 5982).

Desta maneira, de acordo com essa teoria, para favorecer a aprendizagem do estudante, é necessário que ele seja apresentado a uma



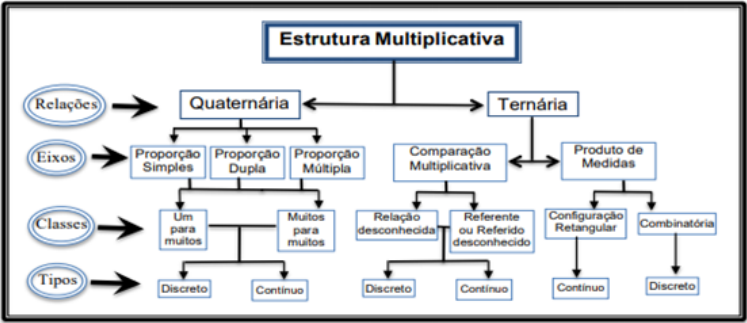
diversidade de situações envolvendo a estrutura multiplicativa. Uma situação, por mais simples que seja, está atrelada a uma diversidade de conceitos e, por sua vez, para a formação de um conceito, quanto mais situações diferenciadas forem apresentadas ao estudante, maior a possibilidade de sua aprendizagem. Assim, a multiplicação não deve ser apresentada para os estudantes apenas como uma soma de parcelas iguais, por exemplo, ela deve abranger todos os conceitos que perpassam por esta operação aritmética, que são ideias de atreladas à proporcionalidade, à divisão, à combinatória, dentre outras (VERGNAUD, 2009).

Para melhor compreensão dos conceitos presentes nas Estruturas Multiplicativas, Magina, Santos e Merlini (2016) elaboraram um esquema do Campo Conceitual Multiplicativo, estruturando uma releitura da classificação e conceituação apresentada por Vergnaud (1983, 1988, 1996, 2009) para as situações deste campo, como pode ser visto na Figura 1 a seguir.

De forma semelhante, Gitirana *et al.* (2014) procuraram classificar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, uma grade variedade de situações-problema multiplicativas. Neste estudo, tomamos como referência a releitura proposta por Magina, Merlini e Santos (2016) para descrever e analisar as situações-problema apresentadas aos estudantes e resolvidas por eles.

Segundo esses autores, é necessário compreender a natureza dos diferentes tipos de problema que circulam em sala de aula, pois tal compreensão pode auxiliar os professores a proporem situações de ensino que propiciem uma compreensão conceitual ampla dos conteúdos matemáticos e não apenas algorítmica.

Figura 1- Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 69).

No presente estudo daremos atenção, especificamente, à descrição das relações ternárias, tendo em vista que as situações de Comparação Multiplicativa, objeto de nossas análises, são pertencentes a este tipo de relação.

A relação ternária apresenta uma relação entre três quantidades que não são fixas e apresenta uma relação de equivalência entre duas delas, pois qualquer alteração em uma das medidas acarretará na mudança de seu produto. Compreendem nesta relação às situações que abordam a ideia de comparação multiplicativa, a noção de combinação, os conceitos de área e volume, entre outros. Em geral, a relação ternária compreende a relação entre duas medidas de mesma natureza ou de naturezas diferentes, originando uma terceira medida. As situações desta relação podem ser divididas em dois eixos: Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas.

Falando especificamente do eixo da Comparação Multiplicativa, foco deste capítulo, ele compreende situações que envolvem relações entre duas quantidades de mesma grandeza e seu operador indica quantas vezes uma quantidade é maior ou menor que a outra, sendo subdividido em duas classes: relação desconhecida e referente ou referido desconhecido.

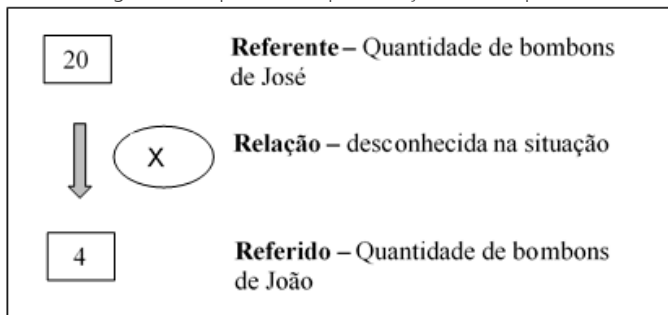
Gitirana *et al.* (2014) explicitam que situações deste eixo fazem parte do repertório de problemas que os estudantes dominam rapidamente, porque elas são próximas das aditivas, já que apenas duas grandezas da mesma natureza são comparadas de forma multiplicativa através de um escalar, que pode ser uma razão ou uma relação. Nesta direção, Santos (2015) chama atenção para o fato de encontrarmos situações-problema desta natureza já no início da escolarização, quando os estudantes são apresentados a problemas envolvendo a relação de dobro, metade, dentre outras.

No eixo Comparação Multiplicativa suas classes envolvem completamente três principais elementos: a relação, o referente e o referido. A relação é um escalar e o agente que transforma uma medida, que indica quantas vezes determinada medida é maior ou menor que a outra. O referente é a medida referencial que estabelece a comparação entre os elementos e o referido é a medida que depende do referente. Passaremos a abordar esses elementos a partir das situações apresentadas nos exemplos que seguem.

*Exemplo 1:* João tem quatro bombons e José tem vinte. Quantas vezes a quantidade de bombons de João é menor que a de José?

Este tipo problema busca a relação entre o referente e o referido como podemos observar no esquema da Figura 2.

Figura 2 - Esquema de representação do Exemplo 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse problema observamos três quantidades envolvidas: a quantidade de bombons de João (referido), a quantidade de bombons de José (referente) e a relação entre essas duas quantidades que é desconhecida. Para solução deste problema apresentamos o esquema a seguir.

Figura 3 - Esquema de resolução do Exemplo 1

$$\begin{aligned} \text{Relação} &= \text{Referente} \div \text{Referido} \\ X &= 20 \text{ bombons} \div 4 \text{ bombons} \\ X &= 5 \text{ bombons} \end{aligned}$$

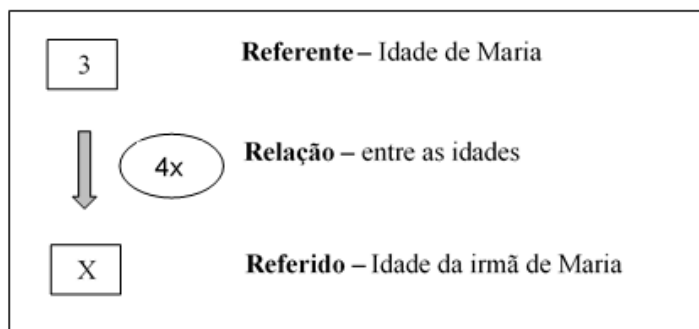
Fonte: Elaborado pelo autor.

A quantidade de bombons de José é chamada de referente, pois é usada como medida referencial por estabelecer a comparação entre a quantidade de bombons. A quantidade de bombons de João é o referido, porque é a medida que depende do referente. Realizando a comparação entre o referente e o referido, podemos concluir que a quantidade de bombons de João é cinco vezes menor que a de José. Nessa situação o referente e o referido apresentam a mesma grandeza, portanto, a relação entre elas é adimensional.

*Exemplo 2:* Maria tem três anos e sua irmã tem uma idade que é quatro vezes maior que a idade dela. Qual é a idade da irmã de Maria?

No Exemplo 2 temos uma situação de Comparação Multiplicativa onde a relação é conhecida e se procura o referido, como apresentado no esquema da Figura 4.

Figura 4 - Esquema de representação do Exemplo 2



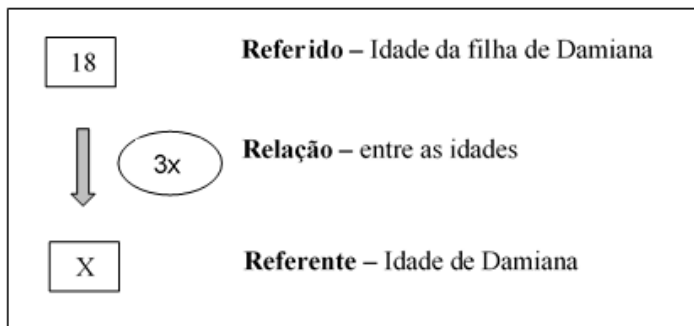
Fonte: Elaborado pelo autor.

A idade de Maria é o referente, uma vez que é o ponto de partida para encontrar o referido, que é a idade de sua irmã. Entre o referente e o referido existe uma relação escalar que desenvolve a medida do referente, e assim, tem-se a idade do referido, ou seja,  $3 \text{ anos} \times 4 = 12 \text{ anos}$  (solução do problema).

*Exemplo 3:* A filha de Damiana tem 18 anos. Sabendo-se que a filha é três vezes mais nova que a mãe, qual é a idade de Damiana?

No Exemplo 3 temos uma situação de Comparação Multiplicativa onde a relação e o referido são conhecidos e procura-se o referente como apresentado no esquema da Figura 5.

Figura 5 - Esquema de representação do Exemplo 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para encontrar a idade de Damiana, referente desconhecido, temos a resolução conforme o esquema apresentado na Figura 6.

Figura 6 - Esquema de resolução do Exemplo 3

Referente = Referido x Relação $X = 18 \text{ anos} \times 3$ $X = 54 \text{ anos}$
---

Fonte: Elaborado pelo autor.

A idade da filha de Damiana é colocada como dependente da idade de Damiana, portanto, tornou-se uma referência para a idade da filha (referido). A relação aparentemente parece indicar uma divisão, já que se refere à idade da filha de Damiana que é três vezes mais nova que ela. Porém, para encontrar o referente, utiliza-se a multiplicação. Portanto, questões desta classe necessitam de uma maior atenção para compreensão das relações envolvidas, para então, efetuar-se o cálculo corretamente.

Magina, Santos e Merlini (2011) constataram que, para os estudantes no início de escolarização e com pouca idade, é difícil compreender que expressões do tipo “vezes mais” ou “vezes menos” estão associadas às operações de multiplicação ou divisão, o que chamam de falta de congruência entre as palavras utilizadas na situação-problema e a operação aritmética requerida para sua resolução. Isso requer um trabalho mais cuidadoso, por parte do professor, ao

abordar os conceitos envolvidos no eixo Comparação Multiplicativa.

Situações do eixo Comparação Multiplicativa evidenciam invariantes que estampam a replicação, termos que induzem a uma taxa de razão ou relação, como por exemplo, a ideia de dobro, triplo, metade, quatro vezes menos, cinco vezes mais, entre outros.

## **O que dizem estudos sobre situações do eixo comparação multiplicativa**

Se tivermos como premissa basilar que a resolução de problemas é uma estratégia didática, em que os problemas versam sobre os conteúdos a serem ensinados, tem-se que o conhecimento sobre a resolução de problemas é um conhecimento didático do conteúdo como descrito por Spinillo *et al.* (2017).

Nesta direção, cabe entender como algumas pesquisas recentes foram realizadas nesta perspectiva, evidenciando o ensino e a aprendizagem de situações de Comparação Multiplicativa na ótica conceitual, tendo a construção do Campo Conceitual Multiplicativo como elemento importante para a formulação de problemas pelo professor, para que ele entenda e valorize as diferentes estratégias e procedimentos de resolução adotados pelos estudantes na solução de situações propostas.

Magina, Santos e Merlini (2011) investigaram o desempenho e as estratégias de resolução de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, em duas situações do Campo Conceitual Multiplicativo envolvendo a ideia da Comparação Multiplicativa, que estavam presente num teste com treze situações. O estudo foi realizado com 175 estudantes (86 do 3º ano e 89 do 5º ano) de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo. Os resultados apontaram que aspectos linguísticos influenciam fortemente nas estratégias de resolução e, conseqüentemente, no desempenho dos estudantes quando lhes solicitado a resolução de situações as quais expressões como “vezes mais” e, principalmente, “vezes menos” estão presentes.

Através da realização de um minicurso, que foi um recorte da formação de professores realizada num projeto vinculado ao Programa Observatório da Educação, Marques e Almeida (2016) discutiram a estrutura multiplicativa, no que diz respeito ao eixo da Comparação Multiplicativa, por meio da resolução e elaboração de situações-problema, em duas escolas municipais do Sul da

Bahia. Foram apresentadas algumas situações-problema do eixo em questão e solicitou-se a resolução delas aos participantes do minicurso. Em seguida, após discussão das resoluções feitas pelos participantes, foi feita reflexão sobre a teoria a qual as situações-problema estavam fundamentadas. Por fim, foi solicitado aos participantes que elaborassem situações-problema do eixo abordado e que elencassem a maneira que trabalhariam essas situações-problema em suas salas de aula.

Considerando a análise das estratégias de estudantes, ao resolverem problemas de matemática, como uma ação importante para a avaliação de possíveis dificuldades e avanços que eles possam apresentar, Barreto, Reges, Batista e Barreto (2017) analisaram o desempenho e as estratégias de 114 estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, de uma escola pública de Fortaleza no Ceará, na resolução de problemas de Comparação Multiplicativa. O teste diagnóstico, contendo três problemas, evidenciou baixo desempenho na resolução. Dentre as estratégias utilizadas pelos estudantes, verificou-se a presença de três sistemas: agrupamentos, contagem e algoritmo. Os resultados revelaram que ainda há uma necessidade de investimento na formação de professores de matemática, no sentido de possibilitar aos alunos uma variedade de situações que ampliem o Campo Conceitual Multiplicativo.

Santos e Merlini (2018) discutem as possíveis contribuições de um processo formativo, que abordou um trabalho com conceitos da Comparação Multiplicativa, para a prática de ensino de duas professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, pertencentes a um grupo maior da formação. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa baseado em um processo de formação continuada, com dimensões colaborativas, com um grupo de 38 professores dos anos iniciais, realizado em duas escolas públicas municipais do sul da Bahia. Foram analisadas as respostas das entrevistas semiestruturada das duas professoras, que revelaram que o processo formativo proporcionou saltos qualitativos no que se refere à sua compreensão dos conceitos relativos ao Campo Conceitual Multiplicativo, assim como a resignificação de sua ação didática.

Cebola e Brocardo (2019) analisaram, com base num quadro teórico sobre a Comparação Multiplicativa, a evolução conceitual de Bruno, aluno do 6º ano do Ensino Fundamental, focando na articulação adaptativa e flexível de conceitos, estratégias, relações numéricas, propriedades das operações e representações. O modo como o estudante explora as cinco tarefas propostas no âmbito de uma experiência de ensino indicou que a construção conceitual da

Comparação Multiplicativa de Bruno se situa na ligação entre fator multiplicativo e razão escalar. O conhecimento do participante do estudo, sobre os números e as suas relações, permite-lhe usar diferentes representações dos racionais na tradução das estratégias que implementa na solução das situações apresentadas. Estas variaram entre aditivas e multiplicativas e, nas últimas, predominou a utilização da linha numérica dupla com apenas dois pontos.

Altoé e Freitas (2019) apresentaram uma proposta de formulação de problemas, intitulada “...Vezes mais...Vezes menos...”, que pode contribuir nos estudos de multiplicação e divisão, em situações do eixo Comparação Multiplicativa, do Campo Conceitual Multiplicativo. A pesquisa seguiu pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, caracterizando-se como experimental, numa abordagem qualitativa. As análises apontaram que a proposta possibilitou a formulação de problemas de comparação multiplicativa, cujas produções, carregadas de motivações e interesses dos alunos, poderiam ser utilizadas, pelo professor, nas aulas de matemática, entusiasmando-os na resolução de problemas.

Gomes (2020) analisou os procedimentos de resolução de problemas apresentados para 20 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública situada na periferia do município de Paracambi, no estado do Rio de Janeiro. A análise do desempenho dos alunos na resolução de problemas de estruturas multiplicativas, em relação à Comparação Multiplicativa, buscou compreender os conceitos construídos e as dificuldades apresentadas por esses alunos. O instrumento de pesquisa, foi composto por seis itens do eixo Comparação Multiplicativa, contemplando as ideias de “vezes mais” e “vezes menos”. A discussão dos dados, de cunho qualitativo, utilizou a técnica de análise documental. Os resultados indicaram que os estudantes apresentaram dificuldades em relação ao raciocínio multiplicativo, ao associarem a expressão utilizada à operação adequada para resolver os problemas propostos.

## **Procedimentos Metodológicos**

O estudo foi realizado em uma escola pública estadual, com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, formada por 36 estudantes no município de Nazaré da Mata em Pernambuco. Destes, 26 estudantes, de ambos os sexos, com faixa etária entre 11 e 12 anos de idade, participaram como colaboradores do estudo e foram convidados a responder um instrumento composto por seis itens,



conforme Quadro 1 a seguir, elaborados de forma a abranger todas as possíveis situações que permeiam a relação ternária do eixo Comparação Multiplicativa, dentro do Campo Conceitual Multiplicativo. A participação dos estudantes se deu após a explicitação dos objetivos da pesquisa para a gestão da escola, para professora da turma, para os estudantes e seus responsáveis legais, em momento anterior a aplicação do instrumento de coleta de dados. Assim, apenas aqueles que desejaram contribuir e que tiveram autorização expressas dos seus responsáveis participaram da aplicação.

Quadro 1 – Situações do instrumento de pesquisa

(continua)

Situação	Enunciado	Classe	Resolução esperada
<b>Q1.</b>	Comprei uma caixa de bombons por R\$15,00 e um biscoito por R\$3,00. Quantas vezes a caixa de bombons foi mais cara que o biscoito?	Relação Desconhecida	A resolução esperada era que o participante dividisse o valor da caixa de bombons pelo valor do biscoito e chegasse ao resultado de 5 vezes mais.
<b>Q2.</b>	Lucas tem uma coleção de 6 figurinhas e João tem uma coleção de 24 figurinhas. Quantas vezes a coleção de Lucas é menor que do João?	Relação Desconhecida	Era esperado que o participante dividisse o número de figurinhas de João pelo número de figurinhas de Lucas e chegasse ao valor de 4 vezes menos.
<b>Q3.</b>	Ontem, José ganhou numa partida 24 bolinhas de gude. Hoje ele ganhou 4 vezes menos. Quantas bolinhas de gude ele ganhou hoje?	Referido desconhecido	O participante deveria dividir o número de figurinhas do José por 4 (relação), chegando ao resultado de 6 bolinhas de gude.
<b>Q4.</b>	A distância entre a casa de Matheus e a sua escola é de 3 quilômetros. A casa de Miguel é 4 vezes mais distante da escola que a casa de Matheus. Qual a distância entre a casa de Miguel e a escola?	Referido desconhecido	Era esperado que o participante multiplicasse o valor da distância da casa de Matheus pela relação (4 vezes) e encontrasse a distância da casa de Miguel que é 12 quilômetros.
<b>Q5.</b>	Edu tem a metade de carrinhos que Marcelo tem. Se Edu tem 8 carrinhos, qual a quantidade de carrinhos que Marcelo tem?	Referente desconhecido	O participante deveria multiplicar o total de carrinhos de Edu por 2 e encontrar o valor de carrinhos que Marcelo tem, que é 16.
<b>Q6.</b>	Maria economizou o quádruplo da quantia que Vitória juntou durante um tempo. Se Vitória juntou R\$350,00, quanto Maria conseguiu economizar?	Referente desconhecido	A solução esperada era que o participante multiplicasse o valor da economia de Vitória por 4 e chegasse ao valor de 1.400 reais, resultado final da economia de Maria.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em uma aplicação coletiva em uma das salas de aula da escola em que estudavam, que ocorreu na quarta semana de aulas após o início do ano letivo de 2020, antes da chegada da COVID-19 ao estado de Pernambuco e da situação de calamidade gerada pela pandemia, todos os estudantes foram convidados a responder o instrumento de coleta de dados com as questões descritas no Quadro 1.

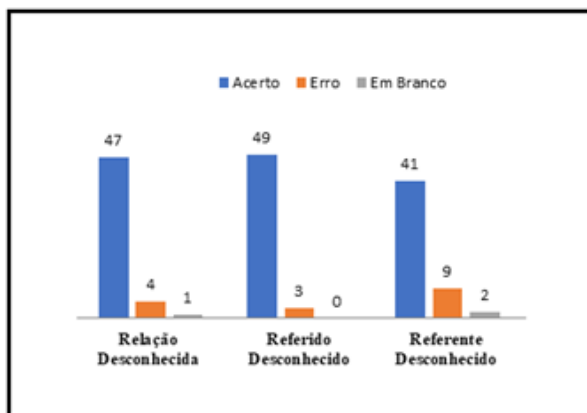
Foi fornecida a seguinte instrução: “Você deve resolver os problemas que estão nesta folha no espaço indicado, registrando tudo que fez para solucionar cada problema. Essa atividade não é para a nota e nem é uma prova. Como já foi explicado, vocês estão contribuindo com uma pesquisa.” Para cada estudante foram disponibilizados lápis e borracha, e duas folhas de papel ofício em que eram apresentadas, por escrito, a mesma instrução oralmente fornecida e três itens diferentes do instrumento de coleta de dados. Abaixo de cada problema havia um espaço em branco suficiente para a resolução do item. Foi disponibilizado o tempo de uma hora para a resolução dos seis problemas, mas nenhum dos estudantes colaboradores utilizou todo este tempo e o pesquisador permaneceu todo tempo presente na sala durante a aplicação.

Cada participante foi designado, na análise, pela letra maiúscula P seguida de um número que ordena cada um deles, de forma aleatória (P1, P2, P3 e assim sucessivamente até o participante P26).

## **Resultados e discussão**

Do total de questões que poderiam ser respondidas (156), apenas três (1,92%) ficaram sem resposta por parte de dois estudantes, sendo uma de relação desconhecida e duas de referente desconhecido, como apresentado no Gráfico 1.

Gráfico 1 - Desempenho dos estudantes por classe de problemas



Fonte: Dados da pesquisa.

O participante P9 não respondeu o item Q2 e o participante P23 não respondeu os itens Q5 e Q6. Como não houve entrevista após a aplicação, não foi possível encontrar justificativa para a não resolução desses problemas, tendo em vista que eles acertaram a resolução das demais situações.

As duas últimas situações do instrumento de coleta de dados, que abordavam o referente desconhecido, exploravam as expressões “metade” e “quádruplo”, vinculadas ao raciocínio multiplicativo e domínio da operação de multiplicação, elaboradas de acordo com os referenciais da BNCC (BRASIL, 2018), que indica a exploração desse tipo de expressão já a partir no 2º ano do Ensino Fundamental. Suponho que o estudante P23 não tenha conseguido entender a relação entre essas expressões e a operação de multiplicação (metade comumente refere-se a divisão). Mas, também é possível que isso se deva a questões semânticas, por exemplo, o que leva a não identificação de uma justificativa plausível para a ausência de resposta.

No que tange o desempenho dos itens respondidos (153 questões), 137 (89,54%) foram respondidos corretamente, sendo 32,72% referentes às questões de relação desconhecida, 32,02% sobre o referido desconhecido e 26,80% dos acertos nas questões de referente desconhecido. Isto evidencia um bom domínio conceitual dos invariantes operatórios de problemas do eixo Comparação Multiplicativa e de suas classes que abarcam completamente três

principais elementos: a relação, o referente e o referido. Esses dados corroboram com as expectativas de aprendizagem propostas pelos PCN (1997) e BNCC (2018), sendo esperado que os estudantes que concluíram os primeiros ciclos do Ensino Fundamental tenham domínio de conceitos do campo multiplicativo, já que comumente são apresentadas situações-problema desse eixo aos estudantes nos primeiros anos desse nível de escolaridade como aponta Santos (2015). Isso vai ao encontro do que postula Vergnaud (1991; 1996): domínio gradual de um conjunto de situações de determinado Campo Conceitual.

Nessa direção, torna-se significativo olhar para as situações em que os estudantes apresentaram melhores desempenhos, nos cinco primeiros anos do Ensino Fundamental, considerando as relações, os eixos e as classes como proposto por Magina, Merlini e Santos (2016). Dessa forma, é possível avançar de forma expressiva, nos anos finais desse nível de escolaridade, em situações que abordam conceitos não dominados ou em formação pelos estudantes, à medida que o currículo escolar orienta que os conceitos multiplicativos sejam explorados em sala de aula.

Quanto à análise dos esquemas e das estratégias adotadas pelos estudantes na resolução de cada problema do instrumento, optou-se por analisar tanto os acertos quanto os erros. Foram identificadas seis categorias, dentre as diferentes formas de registros, descritas a seguir.

Categoria 1 – O estudante identifica corretamente a operação que resolve a questão (multiplicação ou divisão), acerta a resolução e apresenta o procedimento resolutivo.

Categoria 2 - O estudante identifica a operação que resolve o problema (multiplicação ou divisão), mas não acerta a resolução e apresenta o procedimento resolutivo.

Categoria 3 - O estudante não identifica corretamente a operação (multiplicação ou divisão), mas acerta a questão utilizando outra estratégia que não a operação (contagem, operação de adição ou subtração, por exemplo) e apresenta o procedimento resolutivo.

Categoria 4 - O estudante não identifica corretamente a operação (multiplicação ou divisão), erra a questão utilizando outra estratégia que não a operação (contagem, operação de adição ou subtração, por exemplo) e apresenta o procedimento resolutivo.

Categoria 5 - O estudante apresenta apenas uma resposta numérica para o problema, sem qualquer operação ou outra forma de registro, sendo esta resposta correta.

Categoria 6 - O estudante apresenta apenas uma resposta numérica para o problema, sem qualquer operação ou outra forma de registro, sendo esta resposta errada.

A Tabela 1 apresenta a síntese do resultado da categorização das resoluções dos estudantes.

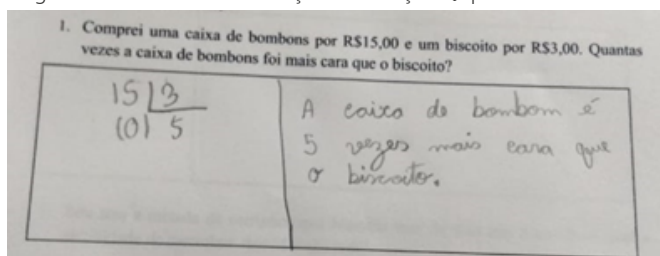
Tabela 1 - Frequência de acertos por questão em cada categoria

Categorias	Questão						Total
	1	2	3	4	5	6	
<b>C1</b>	22	18	20	23	15	21	119
<b>C2</b>	0	1	1	0	3	1	6
<b>C3</b>	1	1	1	0	1	0	4
<b>C4</b>	1	2	2	0	0	0	5
<b>C5</b>	2	3	2	2	3	2	14
<b>C6</b>	0	0	0	0	5	0	5

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da Tabela 1 percebemos que os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental têm domínio sobre a operação a ser empregada na resolução das questões de Comparação Multiplicativa, tendo em vista que a categoria 1, engloba 119 (77,78%) das respostas apresentadas, o que evidencia que muitos destes estudantes construíram significados para os problemas apresentados, como descrito por Vergnaud (1988). Como exemplo, vemos na Figura 7 a seguir, que o estudante P6, na resolução do problema Q1, compreende a relação que há entre o valor pago na compra de uma caixa de bombons (referente) e o valor pago no biscoito (referido), realizando a divisão entre o valor do referente pelo referido. Assim, ele identifica a operação, realiza o cálculo algorítmico e descobre a resposta correta para a situação-problema apresentada. Esses dados corroboram com as expectativas da BNCC (BRASIL, 2018) quanto à resolução de problemas de multiplicação e divisão empregando números inteiros.

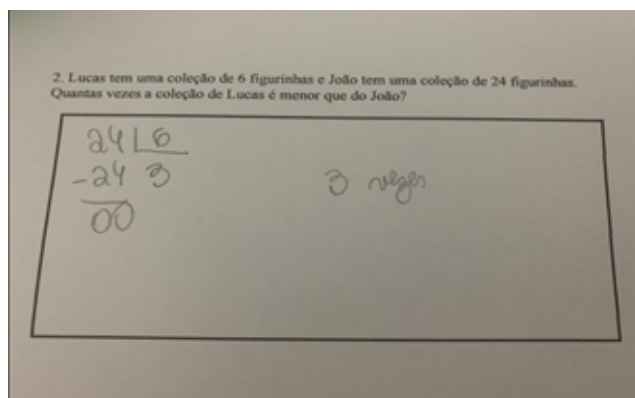
Figura 7 - Protocolo de resolução da situação Q1 pelo estudante P6



Fonte: Dados da pesquisa.

Para além disso, seis estratégias, 3,92% das respostas, indicam conhecimento da operação adequada à resolução, porém, com erros no procedimento ou no cálculo do algoritmo como pode ser observado na Figura 8.

Figura 8 - Protocolo de resolução da situação Q2 pelo estudante P11

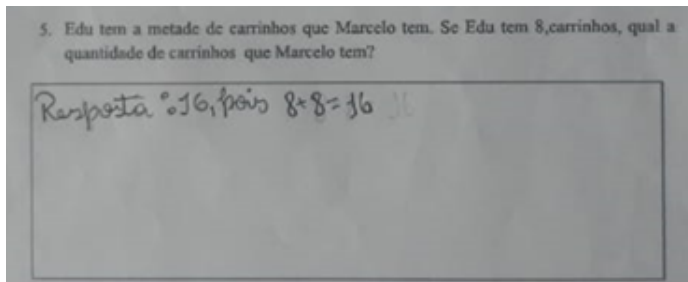


Fonte: Dados da pesquisa.

Neste protocolo é observado que o estudante compreende que é necessário empregar o raciocínio multiplicativo, que há uma relação entre o referente e o referido a ser descoberta, mas apresenta erro no resultado da operação (processo algorítmico).

Quatro resoluções, 2,61% das respostas, enquadram-se na categoria 3, quando é apresentada a resposta correta para a situação problema, mas com o emprego de outra estratégia diferente do cálculo algorítmico e uso da operação aritmética não esperada (multiplicação ou divisão) como vemos na Figura 9.

Figura 9 - Protocolo de resolução da situação Q5 pelo estudante P21

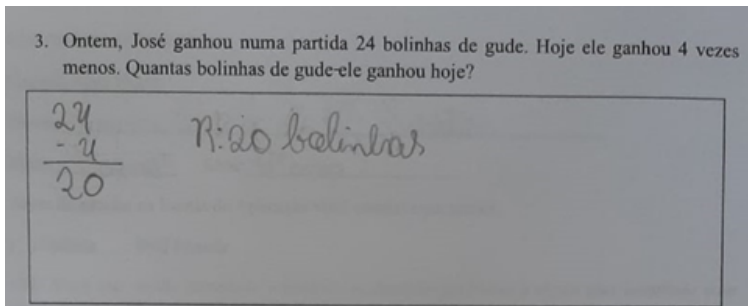


Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante P21 emprega o raciocínio aditivo, muito comum neste tipo de situação em função das expressões empregadas, como indicam os estudos de Gomes (2020) e Altoé e Freitas (2019), acertando a resposta do problema. Isso possivelmente se dá em função dos pares numéricos, uma vez que ele identifica que “metade” é uma das duas parcelas repetidas da quantidade oito.

Cinco respostas (3,26%) enquadram-se na categoria 4 porque, além de não identificarem a operação correta, empregaram uma estratégia de resolução ou operação equivocada como vemos na Figura 10.

Figura 10 - Protocolo de resolução da situação Q3 pelo estudante P8



Fonte: Dados da pesquisa.

No protocolo da Figura 10, identifica-se que o estudante não emprega o raciocínio multiplicativo, utilizando o raciocínio aditivo e a operação de subtração como estratégia algorítmica de resolução. Este dado corrobora com os resultados de Magina, Santos e Merlini (2011), que identificam que os erros apresentados pelos alunos em situações-problema deste eixo, que apresentam expressões “vezes mais” e “vezes menos”, não são referentes apenas as operações de multiplicação e divisão, mas, principalmente, sobre a interpretação dessas situações, pois essas expressões indicam aos estudantes às operações de multiplicação acompanhada de adição ou da multiplicação acompanhada da subtração.

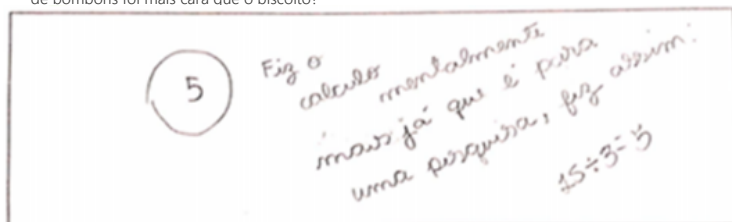
Estratégias de resolução como a apresentada na Figura 10 nos fazem pensar que os estudantes muitas vezes não identificaram os reais significados dos problemas e levam em consideração apenas o significado numérico das situações. Além disso, tal resultado nos faz refletir sobre a importância das palavras na construção dos problemas e o quanto as palavras “dicas” pode ser prejudicial à formação dos conceitos, como, por exemplo, associar as palavras “aumentar, ganhar, somar, receber” com a operação de adição e as palavras “perder, emprestar, menos” com a operação de subtração, como indicam os estudos realizados por Gomes (2020) e Barreto, Reges, Batista e Barreto (2017).

Dentre os protocolos de resolução das situações-problema pelos estudantes, 9,15% deles, 14 resoluções, apresentaram apenas a resposta numérica correta, categoria 5, evidenciando que os estudantes realizaram o cálculo mentalmente sem deixar qualquer tipo de registro sobre a operação utilizada na resolução do problema. Isto é esperado para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, considerando que eles já possuem um desenvolvimento conceitual construído nos anos escolares anteriores e, nesta direção, quando os pares numéricos fazem referência a quantidades pequenas é mais prático realizar procedimentos de cálculo mental e registrar a resposta, como vemos no protocolo apresentado na Figura 11.



Figura 11- Protocolo de resolução da situação Q1 pelo estudante P1

1. Comprei uma caixa de bombons por R\$ 15,00 e um biscoito por R\$ 3,00. Quantas vezes a caixa de bombons foi mais cara que o biscoito?



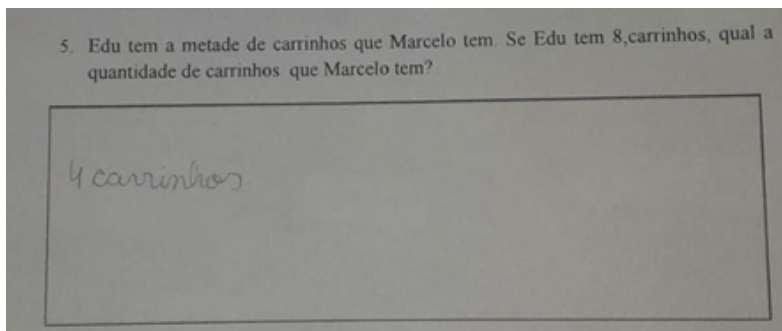
Fonte: Dados da pesquisa.

No protocolo da Figura 11, o estudante deixou claro que, para resolver a situação, realizou o cálculo mentalmente, porém, como foi explicado que o objetivo da pesquisa era compreender como eles resolveriam as situações propostas, ele evidenciou a estratégia mental e emprego da operação utilizada para obter o resultado.

Outras cinco repostas (3,26%) enquadram-se na categoria 6 porque, além de apresentarem apenas a resposta numérica, o resultado apresentado não é o correto como vemos na Figura 12.

Figura 12 - Protocolo de resolução da situação Q5 pelo estudante P3

5. Edu tem a metade de carrinhos que Marcelo tem. Se Edu tem 8 carrinhos, qual a quantidade de carrinhos que Marcelo tem?



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como na categoria anterior, pode-se inferir que o estudante realiza o cálculo mentalmente, sem qualquer tipo de registro. Entretanto, ele acaba registrando o resultado incorreto para a situação, possivelmente porque errou o emprego da operação mental ou realizou um raciocínio não multiplicativo. Possivelmente isso se deva à compreensão da expressão “metade” que comumente é associada à operação de divisão. Porém, neste item, é preciso compreender seu significado associado ao entendimento do referente e do referido para resolução do problema e que requer o emprego de uma multiplicação para o resultado correto.

## **Considerações Finais**

Neste capítulo apresentamos e analisamos os desempenhos e, também, discutimos acerca dos esquemas de resolução empregados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Os desempenhos apresentados por eles revelam um elevado percentual de acertos na resolução de situações do Campo Conceitual Multiplicativo, de relação ternária e eixo Comparação Multiplicativa; demonstrando, em seus esquemas de resolução, uma compreensão da operação aritmética do algoritmo a ser empregado, de forma expressiva. Isso evidencia que à medida que o currículo da matemática escolar avança e é trabalhando nos anos e ciclos, é possível explorar de forma mais sistemática e sofisticada os conceitos multiplicativos.

De acordo com o desempenho dos estudantes que participaram da pesquisa, percebe-se que eles apresentam as concepções necessárias para a compreensão do campo multiplicativo envolvido. Analisando as estratégias de resolução foi possível compreender as competências desenvolvidas pelos estudantes, nos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental e como elas são fundamentais para a continuidade do desenvolvimento do campo conceitual ao longo da escolaridade na Educação Básica.

Entendo que, ao analisar diferentes procedimentos de resolução empregados pelos estudantes, é possível que o professor possa verificar e discutir, na solução apresentada, se estes estudantes conseguem interpretar o enunciado ou se estão usando “expressões verbais” para escolher a operação aritmética a ser utilizada. Além disso, é possível compreender e trabalhar corretamente os elementos que relacionam as quantidades presentes no enunciado, bem como

explorar se os estudantes identificam e empregam as operações aritméticas adequadas para a resolução de um determinado problema.

Nesta direção, no trabalho com a matemática escolar, é importante identificar a forma como os estudantes estão compreendendo as situações envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo e os possíveis erros que eles cometem na resolução, com o objetivo didático de propor situações-problema que contribuam para uma ampliação conceitual.

## Referências

ALTOÉ, R. O.; FREITAS, R. C. O. Formulação de problemas de comparação multiplicativa: uma proposta para o ensino de multiplicação e divisão no campo conceitual multiplicativo. **Educação Matemática em Pesquisa**. v. 21, n. 2, p. 105-129, 2019.

BARRETO, A. L. de O.; REGES, M. A. G.; BATISTA, P. C. S.; BARRETO, M. C. Situações de comparação multiplicativa: o que alunos de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental demonstram saber? **Educação Matemática em Revista**. v. 22, n. 56, p. 230-245, 2017.

BARRETO, A. L. de O.; RÊGO, R. G. Multiplicative structures in the form(action) of teachers from elementary school in a school of Fortaleza. **Educação & Formação**, v.5, n. 3, p. 1-19, 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, DF: MEC, 2018.

CEBOLA, G.; BROCADO, J. Estratégias, representações e flexibilidade na resolução de tarefas de comparação multiplicativa. **Bolema**. v. 33, n. 64, p. 568-590, 2019.

GITIRANA, V.; MAGINA, S.; CAMPOS, T.; SPINILLO, A. **Repensando Multiplicação e Divisão: contribuições da Teoria dos campos Conceituais**. São Paulo: Editora PROEM, 2014.

GOMES, E. S. V. Estratégias apresentadas por alunos do 5º ano do ensino fundamental na resolução de situações-problemas do eixo comparação multiplicativa. In: SCHEWTSCHIK, A. (Org.). **Universo dos segmentos envolvidos com a educação matemática** 2. Ponta Grossa: Atena, p. 12-20, 2020.

LAUTERT, S. L.; SANTOS. Estudantes do 1o ano ao 3o ano resolvem situações multiplicativas. In: LAUTERT, Síntria Labres; CASTRO-FILHO, José Aires; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. (Org.). **Ensinando multiplicação e divisão do 1º ao 3º ano**. Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica. Coletânea Cadernos E-Mult. 1ed.Itabuna -Bahia: Via Litterarum, v. 1, p. 45-76, 2017.

LAUTERT, S. L.; BORBA, R. E.; SPINILLO, A. G.; FERREIRA, J. F. G.; SANTOS, E. M. What multiplicative situations are proposed in Brazilian textbooks for the first years of primary school? In: GRAVEN, M.; VENKAT, H; ESSIEN, A; VALE, P. (Eds.). **Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 4, p.159. Pretoria, South África, 2019.

MAGINA, S.; MERLINI, V.; SANTOS, A. Comparação multiplicativa: a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos alunos. **Anais...** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM, Recife, Brasil, 2011.

MAGINA, S.; MERLINI, V.; SANTOS, A. A Estrutura multiplicativa, sob a óptica da teoria dos Campos Conceituais: Uma visão do ponto de vista da Aprendizagem. **Anais...** III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Fortaleza, p. 1-12, 2013.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação**, Bauru v. 20, p. 517-533, 2014.

MAGINA, S., MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A Estrutura Multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais. In: J. A. Castro Filho (Ed.), **Matemática, cultura e tecnologia**: perspectivas internacionais. Curitiba: CRV, p. 65-82, 2016.

MAGINA, S. M. P.; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. Estratégias Exitosas de Alunos dos Anos Iniciais em Situações de Proporção. **Educação e Realidade**, v. 45, p. 1-24, 2020.

MAGINA, S. M. P.; SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, n. 36, p. 78-94, 2020.

MARQUES, C. S. C.; ALMEIDA, L. C. Estratégias de ensino de comparação multiplicativa por meio de situações-problema. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades**. Minicurso, p. 1-8, 2016.

MOREIRA, M. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigação em Ensino das Ciências**, p. 7- 29, 2002.

SANTANA, E. R. S.; LAUTERT, S. L.; CASTRO-FILHO, J. A.; SANTOS, E. M. Observatório da Educação em Rede: As Estruturas Multiplicativas e a Formação Continuada. **Educação Matemática em Foco** (UEPB), v. 5, p.77-96, 2016.

SANTOS, E. M., SILVA, M. C. N.; SILVA, S. C. A abordagem de proporção simples em um livro didático de matemática na ótica do campo conceitual multiplicativo. **Revista Aquila**. v. 21, n. 9, p. 153-165, 2019.

SANTOS, A. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas** – reflexões teóricas e práticas. Curitiba: Appris, 2015.

SANTOS, M. O.; MERLINI, V. L. A formação continuada de professores dos anos iniciais em relação a comparação multiplicativa. **Perspectivas da Educação Matemática**. v. 11, n. 25, p. 175-195, 2018.

SELVA, A. C. V.; ARAÚJO GOMES, C. R.; SANTIGO, M. M. L. O campo conceitual das estruturas aditivas. In: ARAÚJO-GOMES, C. R.; GOMES, A. S.; SELVA, A. C. V. (Eds.), **Formação de Professores que ensinam matemática nos anos iniciais: Tecnologias, teorias e práticas**. Curitiba: Appris, p. 43-54, 2018.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L.; BORBA, R. E.; SANTOS, E. M.; SILVA, J. F. G. Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do ensino fundamental. **Bolema**. v. 59, n. 31, p. 928-946, 2017.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, p. 127-174, 1983.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: HIEBERT, H; BEHR, M. (Eds.). **Research agenda in Mathematics education: number and operations in middle grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 141-161, 1988.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemáticas em la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H. e CONFREY, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, p. 41-59, 1994.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: J. Brun. (Ed.), **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 155-191, 1996.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

## **Autor**

**Ernani Martins dos Santos**

Universidade de Pernambuco

E-mail: ernani.santos@upe.br

## Capítulo 8

# COMPETÊNCIA DE GENERALIZAÇÃO EM SITUAÇÕES DE RELAÇÃO FUNCIONAL: UM DIAGNÓSTICO

*Lígia Sousa Bastos  
Vera Lucia Merlini  
César Teixeira*

O presente capítulo objetiva analisar a competência de generalização de estudantes do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental em duas questões de *Early Algebra* que envolvem relação funcional. É um estudo diagnóstico, cuja coleta de dados foi realizada por meio de entrevista videogravada, baseada no método clínico piagetiano. Participaram desse estudo oito estudantes de uma escola pública da Bahia, sendo que quatro responderam no ambiente papel e lápis (P&L) e quatro no ambiente material manipulativo (MM). Os dados revelaram que os ambientes P&L e MM não foram fatores determinantes para gerar diferenças na competência de generalização. A resposta escrita, ainda que errada, não influenciou diretamente na competência, pois a maioria dos estudantes em algum momento de sua fala conseguiu generalizar. Assim, se revela que estudantes iniciantes da Educação Básica possuem competência de generalização de forma intuitiva, utilizando raciocínio recursivo, mesmo não tendo sido feito um trabalho que promovesse esse processo.

*Palavras-chave:* *Early Algebra*. Padrões e Sequências. Relação funcional. Generalização.

## Introdução

Desde as duas últimas décadas do século passado, pesquisas internacionais (BOOTH, 1995; KIERAN, 1995; THOMPSON, 1995; POST; BEHR; LESH, 1995; KAPUT, 1999; BLANTON *et al.*, 2007; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; AYALA-ALTAMIRANO; MOLINA, 2019)

fomentam discussões a respeito do desenvolvimento do raciocínio algébrico nos Anos Iniciais, intituladas e conhecidas por *Early Algebra*. A partir da relevância da temática, tais discussões ganharam espaço também no cenário nacional como tema de pesquisas (LINS; GIMENEZ, 1997; TEIXEIRA, 2016; MERLINI; MAGINA; OLIVEIRA, 2018; LUNA; MERLINI; SILVA, 2020; BASTOS; MERLINI, 2020).

Pesquisadores, como Alvarenga e Vale (2007), afirmam que um contributo para o desenvolvimento do raciocínio algébrico é a exploração de problemas que envolvam a procura de ordem e de padrões. Elas afirmam que a procura de padrões deve ser incentivada desde os Anos Iniciais para que o estudante possa desenvolver a observação e a intuição, de tal modo que seja capaz de representá-los e expressá-los de diferentes formas. Os contextos podem ser tanto numéricos quanto geométricos o importante é que oportunizem ao estudante manifestar suas conjecturas e estabelecer generalizações.

É possível observarmos que todas essas pesquisas supracitadas foram relevantes para algumas mudanças no currículo escolar, inclusive o brasileiro. Desde a década de 1990, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) já sugeriam que alguns aspectos da álgebra, como por exemplo generalizar padrões aritméticos e estabelecer relação entre duas grandezas, fossem trabalhados desde os Anos Iniciais, sendo que esses, dentre outros aspectos, só seriam ampliados nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Com a promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) houve uma mudança nesse quesito, visto que a Unidade Temática Álgebra, ressaltamos, começa a perpassar por todos os anos do Ensino Fundamental. Esse documento traz que nos Anos Iniciais é imprescindível que ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade - que são alguns aspectos da Álgebra - sejam trabalhadas com o estudante dos Anos Iniciais.

Isso posto, tendo como base o contexto atual do ensino de Matemática, em especial da Álgebra, esse capítulo tem por objetivo analisar a competência de generalização de estudantes do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental em duas questões de *Early Algebra* que envolvem relação funcional.

No que diz respeito à competência, estamos levando em conta àquela descrita pela BNCC (BRASIL, 2017) que revela que:

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a



favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2017, p. 264)

Desse modo, queremos salientar que a competência de generalização a que nos referimos nesse estudo está baseada no raciocínio, na representação, na comunicação e na argumentação matemática que os estudantes do 4º e 5º anos são capazes de expressar livremente, não necessariamente de maneira formal.

## **A *Early Algebra* e o raciocínio funcional**

Previamente à discussão a respeito de *Early Algebra*, decidimos traduzir o termo e tivemos como resultados “pré-álgebra” ou mesmo “álgebra precoce”, contudo essas traduções literais não expressam de modo satisfatório o significado do conceito. Desse modo, trouxemos Blanton *et al.* (2007) que iniciam essa discussão explicitando que, para compreendermos *Early Algebra*, é preciso entender o que ela não é. De acordo com esses autores, não se trata de complementá-la ao currículo existente, tampouco antecipar o curso de pré-álgebra dos anos intermediários para os Anos Iniciais, no qual ensina-se habilidades e procedimentos algébricos. Igualmente não trata-se de um conjunto de atividades que os professores poderiam trabalhar com seus estudantes tão logo eles tivessem domínio da aritmética. Para esses autores:

[...] a *Early Algebra* é um modo de pensar que traz significado, profundidade e coerência à compreensão matemática das crianças, aprofundando conceitos que já estão sendo ensinados para que haja oportunidade de generalizar relações e propriedades na matemática. [...] Enquanto as crianças de séries elementares podem desenvolver alguma habilidade na manipulação simbólica, o objetivo é que elas aprendam a raciocinar algebricamente e que comecem a adquirir uma linguagem simbólica, ‘algébrica’, para expressar e justificar suas ideias. (BLANTON *et al.*, 2007, p. 7, tradução nossa)

Diante disso, o interesse da *Early Algebra* é desenvolver o raciocínio algébrico dos estudantes que estão no início da vida escolar e que, portanto, ainda não tiveram acesso à Álgebra formal. Nesse caso, entendemos que o importante não está no fato do estudante adquirir habilidade na manipulação simbólica, mas sobretudo, que ele expresse seu raciocínio e justifique suas ideias

para que possa adquirir uma linguagem simbólica.

Como citamos anteriormente, encontramos na literatura discussões a respeito do que seria a *Early Algebra*, embora não tenhamos ainda um consenso. Entretanto, admitimos, assim como Carraher, Schliemann e Schwartz (2006), que *Early Algebra* não é o mesmo que *Algebra Early*, ou seja, não é antecipar o ensino de conceitos algébricos dos Anos Finais para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com esses autores, isso seria um desastre.

Apresentar aos estudantes situações-problema que promovam discussões se aproxima melhor da definição, uma vez que a *Early Algebra* está fortemente entrelaçada com os conceitos abordados na Matemática elementar. A álgebra perpassa, de forma silenciosa, problemas das estruturas aditivas e multiplicativas, além de sistemas representacionais como linhas numéricas, gráficos e tabelas. Como os estudantes são dos Anos Iniciais, não é esperado que eles tirem conclusões a partir de regras lógicas e sintáticas, mas que, partindo de situações-problema, em algum momento, eles sejam capazes de argumentar baseados em um sistema escrito de equações ou de um gráfico desenhado no plano cartesiano, com argumentos oriundos de intuições e de fatos presumidos. Todavia, para que isso aconteça, o papel do professor é imprescindível.

Com relação às situações-problema que potencializam tais discussões, buscamos os resultados obtidos nos estudos realizados por Bitencourt (2018), cujo objetivo foi analisar como os livros didáticos têm abordado o pensamento algébrico considerando os pontos de vista de padrão de sequência, da equivalência e da relação funcional. As coleções de livros didáticos analisados referem-se ao Manual do Professor, do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, e foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2016. Após a análise, a autora conclui que as coleções apresentam tarefas que dizem respeito aos três pontos de vista supracitados em todos os livros, do 1º ao 5º ano. Ainda assim, o fato de ter encontrado tarefas que potencializam o desenvolvimento do raciocínio algébrico é necessário, mas não é suficiente, uma vez que a ação do professor é imprescindível para fomentar as discussões em sala de aula e suscitar tal raciocínio em seus estudantes.

A respeito do raciocínio algébrico, dentre alguns autores (LINS, 1994; LINS; KAPUT, 2004) que discutem a respeito desse tema, estamos considerando:

[...] o raciocínio algébrico como um processo em que os estudantes generalizam as ideias matemáticas de um conjunto de instâncias particulares, estabeleça essas generalizações

através do discurso da argumentação, e expressá-lo cada vez mais formal e adequados à idade. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

Diante desse ponto de vista, o estudante pode expressar seu raciocínio algébrico mediante atividades que possibilitem estabelecer generalizações por meio de um discurso argumentativo, cuja formalidade varia de acordo com a idade e a experiência do estudante. Cabe salientar que essa generalização pode ser expressa a partir de palavras ou de símbolos. Ainda de acordo com Blanton e Kaput (2005), o desenvolvimento do raciocínio algébrico pode assumir diversas formas não excludentes, sendo elas:

(a) o uso de aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); (c) modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações; e (d) generalizar sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

Segundo os autores, as tarefas aritméticas oportunizam a generalização a partir do reconhecimento de padrões ao variarmos um único parâmetro da tarefa. Nesse sentido, o trabalho com sequências pode potencializar a generalização por meio do raciocínio funcional. Por isso, vale ressaltar que existe uma forte relação entre sequências e funções. Assim, de acordo com Lima *et al.* (2012, p.86) “uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto  $N$  dos números naturais”. Nesse caso, independentemente da sequência a qual se esteja referenciando, é possível escrevê-la por meio de uma função. Por isso, para efeito desse estudo nos deteremos ao raciocínio funcional no que diz respeito a generalização de padrões para descrever relações funcionais. Contudo, antes da discussão a respeito das relações funcionais, é preciso definir, matematicamente, o que estamos entendendo como função

Uma *função*  $f$  é uma regra ou uma correspondência que faz associar um e somente um valor da variável  $y$  para cada valor da variável  $x$ . [...] a variável  $x$  é denominada *variável independente*, pode tomar qualquer valor num certo conjunto de números denominados *domínio* de  $f$ . Para cada valor de  $x$  no domínio de  $f$ , o valor correspondente de  $y$  é denotado por  $f(x)$  tal que  $y = f(x)$ . A variável  $y$  é denominada *variável dependente*, visto que seu

valor depende do valor de  $x$ . O conjunto de valores assumidos por  $y$  à medida que  $x$  varia no domínio é denominado *imagem* de  $f$  (MUNEM; FOULIS, 1982, p. 21, grifo dos autores).

Isso posto, uma possibilidade de desenvolver o raciocínio funcional é oferecer aos estudantes situações propícias nas quais eles sejam capazes de generalizar e estabelecer relações entre os objetos, desde os Anos Iniciais da escolaridade básica, de acordo com o seu nível escolar. Diante disso, o que se espera é que os estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, que tenham passado por esse processo, possam apreender e dar sentido às relações e às estruturas que subjazem a Álgebra ensinada nos anos finais.

Neste contexto, situações propícias poderiam ser aquelas que buscam a identificação de um padrão que proporcione ao estudante pensar matematicamente. Para Vale e Pimentel (2011), o insucesso que os estudantes têm em Matemática advém da memorização em detrimento da compreensão e que, ao trabalhar com padrões, os estudantes são capazes de fazer matemática de forma autônoma, explorando as regularidades e investigando conjecturas matemáticas. Nesse sentido, situações que possibilitem a descoberta de padrões numéricos podem levar à generalização, sendo que esta pode ser explorada e expressada nos diferentes níveis escolares e ainda ser representada de diferentes formas.

Ponte, Branco e Matos (2009) destacam que as sequências pictóricas e numéricas são trabalhadas ao longo do ensino básico. Os autores ressaltam que o trabalho com sequências contribui para que o estudante compreenda, de maneira significativa, o conceito de função. Os estudantes, ao identificar as regularidades, as descrevem levando em conta as características locais ou globais, sendo que ao descrever as generalizações, mesmo em linguagem natural, é exigido deles certa capacidade de abstração. À medida que o trabalho com a análise de sequência é desenvolvido com os estudantes, desde os Anos Iniciais, eles vão progredindo, passando do raciocínio recursivo para o raciocínio que envolve relação funcional.

No que diz respeito ao raciocínio recursivo, Carraher, Martinez, Schliemann (2008) afirmam ter duas maneiras algébricas de expressar uma função: de forma fechada ou por meio de uma fórmula recursiva. Eles trazem, para essa discussão, a função:

$$f(x) = 3x + 7 \text{ sendo que } x \in \mathbb{N}_0. (1)$$

Expressões recursivas consistem em duas expressões, sendo uma delas tida como inicial e a outra para todos os outros casos:

$$f(0) = 7 \text{ e } f(n) = f(n - 1) + 3 \text{ sendo que } x \in \mathbb{N}_0. \quad (2)$$

De acordo com os autores, a mesma função está definida nas expressões (1) e (2), embora elas determinem conceitos diferentes da função. Na expressão (1), o 3 aparece como sendo a constante da proporcionalidade, enquanto na expressão (2) o mesmo 3 torna-se um incremento na condição de repetição. Eles ressaltam que na expressão (1) é possível calcular o valor de  $f(n)$  com um único passo. Por outro lado, a expressão (2) exige que comecemos em  $f(0)$  e façamos os cálculos até chegar ao  $f(n)$  desejado e, caso esse  $n$  seja um número grande requer uma quantidade grande de cálculos, o que torna o trabalho entediante.

Se quisermos saber o valor da função  $f(x)$  para  $x=5$ , por exemplo, se utilizarmos a expressão (1), temos que substituir o valor 5 no lugar do  $x$ :  $f(5)=3 \times 5 + 7$  e obtemos  $f(5)=22$ . Por outro lado, se utilizamos a expressão (2), teremos que partir do  $f(0)$ . Nesse caso temos:  $f(5)=f(4)+3$ ; como não sabemos o valor de  $f(4)$ , temos que calcular até chegar ao valor conhecido, que é o  $f(0)$ . Para Vale e Pimentel (2011), o raciocínio recursivo, embora seja o mais recorrente nas resoluções até mesmo entre os professores, é tido como o mais pobre, pois ele não permite encontrar e descrever um termo de qualquer que seja a ordem. Nesse sentido, Tall (1992) adverte que a abordagem recursiva pode se tornar um obstáculo para se obter a regra geral.

Embora esses autores façam essa advertência, encontramos resultados que divergem da afirmação que o raciocínio recursivo seja pobre e que não permite encontrar a regra geral. Bastos (2019) desenvolveu uma pesquisa diagnóstica com estudantes de idade entre 9 e 11 anos e pôde concluir que eles conseguem sucesso, no sentido de ter competência de generalização, exatamente quando utilizaram o raciocínio recursivo. As respostas obtidas nos protocolos escritos traduzem o uso da recursividade contudo, na oralidade, eles expressam, nitidamente, a regra geral.

Resultados semelhantes foram encontrados nas pesquisas realizadas por Ayala-Altamirano e Molina (2019). Estes pesquisadores desenvolveram uma proposta de ensino com estudantes do 4º primário, com idade entre 9 a 10 anos, cujas tarefas envolviam relação funcional. Os resultados alcançados apontam que, à medida que os estudantes participavam e justificavam suas respostas, eles

melhoravam a capacidade de justificar assim como a de expressar a generalização de forma mais sofisticada, muitas vezes passando pelo raciocínio recursivo.

Quanto à identificação da regularidade e da generalização levando em conta as características locais ou globais, Radford (2006) as denomina por generalização aritmética (1) e generalização algébrica (2), respectivamente. A generalização aritmética centra-se em resolver problemas locais e, por ser local, obtém-se uma expressão a qual não exprime um termo qualquer da sequência. A generalização aritmética está associada ao raciocínio recursivo, no qual precisamos sempre do termo anterior para alcançar o termo que almejamos conhecer. Por outro lado, a generalização algébrica está associada ao uso do raciocínio funcional, que permite relacionar qualquer termo da sequência de imediato, sem ter que recorrer ao anterior. Entendemos que essa generalização algébrica independe do uso de símbolos algébricos, podendo ser obtida por meio da linguagem natural.

Como citamos anteriormente, para Blanton e Kaput (2005), o raciocínio algébrico é tido como um processo que possibilita aos estudantes generalizar suas ideias matemáticas por meio de discursos argumentativos que, de acordo com a sua idade, tornam-se progressivamente mais formais. Ainda a esse respeito, investigações recentes de Blanton *et al.* (2015) afirmam que o pensamento funcional envolve: (i) generalizar relações entre quantidades de covariância; e (ii) representar e raciocinar essas relações por meio da linguagem natural, notação algébrica (simbólica), tabelas, gráficos.

Nessa direção, Merino, Cañadas e Molina (2013) recomendam trabalhar o enfoque funcional, uma vez que acreditam ser esse a aproximação mais adequada da *Early Algebra*, tanto para os estudantes dos Anos Iniciais da escola básica, quanto para a educação infantil. Para isso, os autores destacam que os padrões, a generalização, representações e o estabelecimento de relações entre eles são elementos úteis para a abordagem da relação funcional em sala de aula.

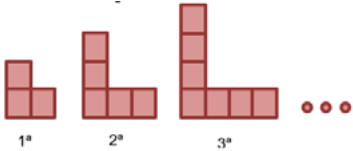

## **Metodologia utilizada**

Para a realização deste estudo diagnóstico, foram considerados os princípios da pesquisa qualitativa em que, de acordo com Bogdan e Binklen (1994), deve ser observado todo o processo em que a envolve e não somente o resultado desse processo. O estudo contou com a participação de oito estudantes, sendo

que quatro deles estavam cursando o 4º ano e tinham nove anos, e quatro, com idade entre 10 e 11 anos, cursavam o 5º ano do Ensino Fundamental, sendo todos de uma escola pública do interior da Bahia. A escolha da escola se deu pela acessibilidade ao local e, quanto ao ano escolar, procuramos estudantes que já haviam passado pelo ciclo de alfabetização, para que pudessem expressar suas ideias por meio da escrita.

Quanto à resolução das questões, a pesquisadora acompanhou um estudante de cada vez no turno oposto da aula. Durante o processo de resolução das questões, a pesquisadora realizou entrevista videogravada, na qual foi utilizado o método clínico piagetiano. Piaget explicita os detalhes de tal exame, afirmando que “A arte do clínico consiste não em fazer responder, mas em fazer falar livremente e em descobrir as tendências espontâneas, em vez de as canalizar e as conter” (PIAGET, 1979, p. 7). Para Carraher (1998, p.17), “O exame piagetiano visa buscar as respostas mais características do pensamento do sujeito, aquelas que o sujeito dá com maior convicção e não com maior rapidez”, afirmando ainda que, o método clínico piagetiano objetiva entender como o sujeito pensa e como elabora suas respostas ao ser contra-argumentado pelo examinador. Assim, entendemos que o exame piagetiano nos fará compreender como se dá o raciocínio dos estudantes ao lidarem com questões que abordam a relação funcional.

As duas questões que serão analisadas neste estudo fizeram parte de um instrumento diagnóstico e foram apresentadas em dois ambientes diferentes: papel e lápis (P&L) e material manipulativo (MM). Os estudantes foram divididos em dois grupos de quatro estudantes cada, que receberam nomes fictícios, sendo dois de cada ano escolar sendo que um grupo - composto por Abel e Antônio do 4º ano, Bento e Beto do 5º ano - respondeu às duas questões apresentadas no ambiente P&L e o outro grupo - composto por Amália e Ana do 4º ano, Bia e Bete do 5º ano - no ambiente MM. Salientamos que os dois grupos receberam um caderno impresso, no tamanho de meia folha de papel A4, contendo as referidas questões com espaço para registrar as respostas. O Quadro 1 a seguir traz a Questão 4 (Q4) e a Questão 6 (Q6) selecionadas para a discussão desse estudo.

<p><b>Questão 04</b></p> <p>Observe a sequência abaixo:</p>  <p>1ª      2ª      3ª</p> <p>a) Desenhe a próxima posição. b) Desenhe a 11ª posição. c) Você acha que dá para saber a quantidade de quadradinhos do desenho de qualquer posição?</p>	<p><b>Questão 06</b></p> <p>Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura</p>  <p>Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:</p> <p>a) De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos? b) De quantos palitos eles precisam para fazer 11 triângulos? c) Escreva como você falaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.</p>
--	--

Fonte: Bastos (2019, p. 67 e 71).

Cabe ressaltar que as questões estão numeradas de acordo com a ordem em que se apresentaram no teste para os estudantes. Do ponto de vista matemático, as duas questões podem ser representadas por uma função afim, a Q4 por  $f(p)=2p+1$ , sendo que  $p$  representa a posição e  $f(p)$  a quantidade de quadradinhos da referida posição; a Q6 por  $f(x)=2x+1$ , sendo  $x$  representa a quantidade de palitos e  $f(x)$  a quantidade de triângulos formados. Além disso, o domínio e a imagem das referidas funções fazem parte do conjunto dos números Naturais.

Embora tenham a mesma lei de formação, os estudantes podem utilizar estratégias de resoluções distintas. Para responder aos itens (a) e (b) das duas questões, o estudante pode, por exemplo, lançar mão da contagem, quer seja no ambiente P&L ou no ambiente MM, uma vez que a quantidade solicitada



está próxima às quantidades já conhecidas. Para responder ao item (c) que corresponde à generalização, ele poderá utilizar a recursividade, ao observar que para se obter a próxima posição (Q4) ou construir um novo triângulo (Q6) se aumenta 2 unidades, dois quadradinhos ou dois palitos, respectivamente.

Quanto ao processo de análise, foi observado o registro feito no caderno e as respostas obtidas na oralidade. Embora não faça parte do objetivo, foi realizada a comparação do acerto dos estudantes para observar se houve diferença entre os ambientes e ainda, se o acerto ou erro repercutiu na competência de generalização. Para atingir o objetivo a partir dos dados coletados foram criadas categorias de análise que permitiram investigar a competência de generalização de estudantes do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental em duas questões de *Early Algebra* que envolvem relação funcional.

## **Análise e discussão dos dados**

Nesta seção, reservamos a discussão acerca dos resultados obtidos a partir das respostas dos estudantes para as duas questões apresentadas na seção anterior. Embora nosso objetivo diga respeito à competência de generalização e ela esteja relacionada ao item (c) das duas questões analisadas, iniciamos a discussão apresentando o desempenho dos itens anteriores, Q4a, Q4b, Q6a, Q6b. Em seguida, apresentamos as categorias que criamos a partir das respostas dos estudantes oriundas dos itens Q4c e Q6c.

Os dados da Tabela 1 correspondem ao desempenho dos estudantes, sendo que essa classificação foi feita tendo como base nas respostas registradas pelos estudantes no caderno de questões que receberam no momento de responder o teste. Relembramos que independentemente do ambiente, P&L ou MM, todos eles registraram suas respostas no caderno de questões. Por isso, essa primeira tabela servirá para confrontar as diferenças observadas entre o que os estudantes expressaram na escrita e na oralidade. Cabe salientar que na Tabela 1 a letra A representa Acerto e a letra E representa Erro.

Tabela 1 - Desempenho dos estudantes nos itens Q4a, Q4b, Q6a, Q6b

Desempenho dos estudantes nos itens Q4a, Q4b, Q6a, Q6b						
Tipo de ambiente	Ano Escolar	Estudante	Questões			
			Q4a	Q4b	Q6a	Q6b
P&L	4º	Abel	A	A	A	E
		Antônio	E	E	E	E
	5º	Bento	A	A	E	E
		Beto	E	E	A	E
	Total Acertos P&L		2	2	2	0
MM	4º	Amália	A	A	E	E
		Ana	E	E	E	E
	5º	Bete	A	E	E	E
		Bia	A	E	E	E
	Total Acertos MM		3	1	0	0

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com os dados da Tabela 1, das 32 possíveis respostas (produto entre os oito estudantes e os quatro itens de questão), 10 delas estão corretas, aproximadamente um terço. Ao analisarmos cada uma das questões separadamente, temos que das 16 possíveis respostas da Q4, oito delas foram corretas (50%), em contrapartida tivemos apenas duas respostas corretas das 16 possíveis da Q6. Embora as duas questões refiram-se à relação funcional, os estudantes tiveram melhor desempenho na Q4 que descreve uma sequência. Observamos ainda que os resultados relativos ao desempenho, independente do ambiente no qual os estudantes resolveram as situações, foram semelhantes.

Para que pudéssemos categorizar o raciocínio dos estudantes, analisamos os registros nos cadernos dos estudantes, juntamente com sua oralidade, registradas nas videograções feitas no momento que respondiam ao teste. Diante desses dados, criamos oito categorias as quais apresentamos no Quadro 2 a seguir.

Quadro 2 - Categorias relativas ao raciocínio dos estudantes

<b>Categoria</b>	<b>Nome da Categoria</b>
<b>C1</b>	Não consegue reconhecer padrão ou regularidade na sequência ou não compreende o problema da função
<b>C2</b>	Reconhece padrão ou regularidade e identifica o termo seguinte ou ainda a relação de dependência entre variáveis
<b>C3</b>	Não consegue prever termos distantes
<b>C4</b>	Identifica termos distantes da sequência
<b>C5</b>	Utiliza contagem, recursividade ou proporcionalidade para prever termos distantes
<b>C6</b>	Compreende a função como linear
<b>C7</b>	Não generaliza
<b>C8</b>	Generaliza

Fonte: Elaboração dos autores a partir dos dados da pesquisa.

Ao pensarmos nessa categorização, determinamos que da categoria C1 até a C4 se classifica o reconhecimento de padrões ou a relação de dependência entre as variáveis. No que se refere às categorias do C5 a C8, a classificação diz respeito às possibilidades de generalização.

Antes de iniciarmos a análise, destacamos que algumas das categorizações não são excludentes entre si e que, de acordo com a resposta dada pelo estudante, foi possível contemplar o mesmo item de questão com até três categorias distintas (Q4b e Q6b). Salientamos que o formato das respostas dos estudantes, bem como a forma como eles generalizaram suas ideias algebricamente, ocorreu mediante linguagem natural. As referidas respostas estavam de acordo com o nível de compreensão e conjunto de informações adquiridos em cada fase da vida, como descrevem alguns estudos como o de Ponte, Branco e Matos (2009). Os dados apresentados na Tabela 2 a seguir referem-se às categorizações dos raciocínios das respostas dadas, nos quais pudemos identificar pontos importantes à luz da literatura consultada.

Tabela 2 - Raciocínio dos estudantes de acordo com a categorização

Reconhecimento de padrão e generalização										
Tipo de material	Ano Escolar	Estudante	Questões							
			Q4a	Q4b		Q4c	Q6b		Q6c	
P&L	4º	Abel	C2	C2	C4	C8	C8	C2	C5	C7
		Antônio	C1	C1	C3	C5	C7	C2	C6	C8
	5º	Bento	C2	C2	C4	C8	C8	C2	C6	C7
		Beto	C1	C1	C3	C5	C7	C2	C6	C8
MM	4º	Amália	C2	C2	C4	C5	C8	C2	C6	C8
		Ana	C1	C1	C3	C5	C7	C1	C6	C8
	5º	Bete	C2	C1	C3	C7	C7	C5	C6	C8
		Bia	C2	C1	C3	C5	C7	C2	C6	C7

Fonte: Dados da pesquisa.

Destacamos que o raciocínio categorizado independe do acerto do referido item de questão. Ao confrontar os dados da Tabela 1 com os da Tabela 2, nota-se que, ainda que a maioria dos estudantes tenha errado as respostas registradas no caderno, na oralidade eles apresentaram raciocínios coerentes e corretos em relação às estratégias adotadas para resolver as questões (BLANTON; KAPUT, 2005). Levando em conta os ambientes, P&L e MM, os dados evidenciam um equilíbrio entre eles, o que nos permite inferir que o ambiente não foi um fator decisivo para o sucesso no desempenho ou para a competência de generalização do estudante.

De modo geral, os dados revelam que estudantes do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental que estão na faixa etária entre 9 e 12 anos de idade, considerada idade regular para os referidos anos de ensino, usaram de diversos artifícios para argumentar, justificar e generalizar suas respostas. Frente aos dados da Tabela 2 é possível observar que, em ambas as questões, a categoria C2 (Reconhece padrão ou regularidade e identifica o termo seguinte ou ainda a relação de dependência entre variáveis) foi a mais recorrente, que nos levar a inferir que eles são capazes de compreender conceitos importantes relativos à relação funcional. Esse resultado vem ao encontro da afirmação de Vale e

Pimentel (2011) de que a procura e o reconhecimento de um padrão é natural.

Outro destaque que fazemos é que, a função  $f(x)=2x+1$  representa as situações propostas na Q4 e na Q6, entretanto os resultados nos mostram que os estudantes não apresentaram o mesmo desempenho, tampouco a mesma competência de generalização entre elas. Observando os dados da Tabela 1, os estudantes tiveram melhor desempenho dos itens Q4a e Q4b em relação aos mesmos itens da Q6, contudo a maioria dos estudantes generalizou a Q6c e o mesmo não ocorreu com a Q4c. Nesta última a maioria dos estudantes não conseguiu prever termos distantes e, conseqüentemente, não a generalizou.

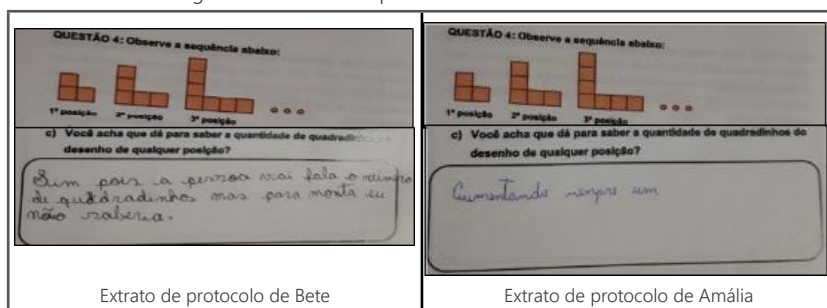
Ao associarmos o registro escrito e a oralidade, notamos que os estudantes apresentam mais detalhes nos argumentos orais do que nos escritos. A partir da oralidade é que foi possível identificarmos neles a competência de generalização. Os resultados que encontramos vem ao encontro daqueles encontrados por Blanton e Kaput (2005), que detectaram que nessa faixa etária, na maioria das vezes, os estudantes conseguem argumentar melhor oralmente se comparado com a escrita. Esse resultado também vem ao encontro de alguns obtidos em estudos anteriores como os de Vale e Pimentel (2011); Merino, Cañadas e Molina (2013); Ayala-Altamirano e Molina (2019).

Diante do exposto e para tornar explícitos a categorização dos itens das questões apresentada nos dados da Tabela 1 e 2 discutidos até aqui, a seguir apresentaremos extratos dos protocolos escritos e das entrevistas dos estudantes ao resolverem a Q4 e Q6.

Separamos para essa discussão as respostas da Q4 dadas por duas alunas, Bete e Amália, ambas do ambiente MM. De acordo com os dados da Tabela 2, as duas reconhecem o padrão no item Q4a, contudo somente Amália chega à generalização. A resposta de Bete no item Q4a foi classificada como reconhecendo o padrão (C2), contudo ao responder ao item Q4b ela não reconhece o padrão (C1); não consegue prever o termo distante (C3) tampouco generalizar (C7) nos itens Q4b e Q4c. Quanto às respostas registradas por Amália, na mesma questão, ela reconhece o padrão (C2) no item Q4a; no item Q4b identifica termos distantes da sequência (C4), utiliza a contagem (C5) e ao final generaliza (C8). Para que esses detalhes fiquem evidentes a Figura 1, a seguir, traz os extratos dos protocolos registrados do item Q4c e, em seguida, os extratos das entrevistas referentes à Q4 de Bete e Amália, respectivamente, com as devidas análises.

Ao observarmos os itens de questão Q4b e Q6b categorizado com C5 (Utiliza contagem, recursividade ou proporcionalidade para prever termos distantes) obtivemos, quase por unanimidade, nos itens Q4c e Q6c, a categoria C7 (Não generaliza). Esse resultado nos remete aos estudos de Vale e Pimentel (2011) ao presumir que quando o estudante não consegue prever termos distantes, dificilmente, ele conseguirá chegar a uma generalização da regra da questão apresentada. Nesse sentido, para Tall (1992), a recursividade pode ser obstáculo para que o estudante encontre a generalização. Entretanto, ainda nesse quesito, Ponte, Branco e Matos (2009) colocam que há uma passagem do raciocínio recursivo para o raciocínio que envolve a generalização. Desse modo, trouxemos para a discussão os extratos de protocolos e de entrevista de duas estudantes com o intuito de explicitar a questão da recursividade.

Figura 1- Extratos dos protocolos de Bete e de Amália



Fonte: Dados de Pesquisa.

Para que possamos analisar o registro escrito das duas alunas, transcrevemos as respostas com os devidos ajustes da língua portuguesa: "Sim, pois a pessoa vai falar o número de quadradinhos, mas, para montar eu não saberia." (Bete); e "Aumentando sempre um" (Amália). Trouxemos primeiro o extrato da entrevista de Bete para análise e depois o de Amália, com sua respectiva análise.

**Pesquisadora:** *Bete, eu vi que para você montar essa figura você ficou aí pensando e você disse também que é sempre acrescentando...*

**Bete:** *Mais dois!*

**Pesquisadora:** *Ah, sim! Entendi! E se um colega seu chegasse aqui e visse você montando essas figuras e lhe perguntasse se teria como saber a quantidade de quadradinhos que teria cada figura?*

**Bete:** *Oh! Aqui tinha um, colocou mais dois e ficou três. Aqui (referindo-se à figura da 2ª posição) era pra tá igual aqui (referindo-se à figura da 1ª posição) só que eu coloquei mais dois. Já subiu e se a gente olhar bem a gente tá colocando de dois em dois.*

**Pesquisadora:** *Hum! E se fosse uma figura assim como essa (referindo-se à figura da posição 11 que Bete havia montado), mas lá na posição 65, teria como a gente saber a quantidade de quadradinhos?*

**Bete:** *la ter 65 quadradinhos! Aqui numa coluna (referindo-se à parte vertical da figura) ia ter ... (fica pensativa)*

**Pesquisadora:** *Me explica o que você tá pensando!*

**Bete:** *Eu tô tentando adicionar mais dois!*

**Pesquisadora:** *Mas como foi que você pensou que ia ter 65 quadradinhos?*

**Bete:** *Eu estava pensando ou em dividir... Mas se dividir ia ficar 30 embaixo e 30 em cima. Eh! Eu tava contando de dois em dois, mas eu não consegui chegar.*

**Pesquisadora:** *Hum! Entendi. Mas, o que você acha? Tem como saber a quantidade de quadradinhos de qualquer figura?*

**Bete:** *Sim! Quantos quadradinhos dá para a gente saber. Agora pra montar, se me pedir pra montar 65 quadradinhos eu vou me embolar toda!*

---

Fonte: Dados de Pesquisa.

Ao analisarmos o registro escrito de Bete, no item Q4 temos que sua resposta está correta, pois ela atendeu corretamente a solicitação. Isso nos leva a inferir que ela compreendeu a lei de formação da sequência, uma vez que ela montou a 4ª posição da figura no ambiente MM e a transcreveu no ambiente P&L corretamente. De acordo com seus argumentos, Bete faz uso da recursividade, aumentando de dois em dois quadradinhos até chegar na 4ª posição. Entretanto, no item Q4b, que solicita o desenho da figura da 11ª posição, ela acrescenta dois quadradinhos, um na vertical e outro na horizontal e afirma que aquela nova figura representa a 11ª posição, quando na verdade trata-se da 5ª posição que contém 11 quadradinhos. Ela registra a resposta de forma incorreta e em sua fala reforça seu equívoco, não levando em conta a covariação entre o número da posição e a quantidade de quadradinhos. Desse modo, não consegue prever termos distantes (C3) e, por conta disso, não generaliza (C7).

A seguir, trouxemos o extrato da entrevista de Amália para posterior análise.

**Pesquisadora:** *Como foi que você pensou que aqui (apontando para os quadrados da parte horizontal da figura da sequência) tem que ter doze e aqui (apontando para os quadrados da parte vertical da figura da sequência) tem que ter onze?*

**Amália:** *Olhando aqui, aqui (parte horizontal da figura) tem cinco, mas é a quarta posição e aqui (parte vertical da figura) tem quatro. Então aqui (parte vertical da figura), é tipo o número que dá a posição e aqui (parte horizontal da figura) tem uma a mais.*

**Pesquisadora:** *Ah! Entendi! E se fosse para saber uma posição bem distante, por exemplo, a posição de número cinquenta, teria como saber a quantidade de quadradinhos que essa figura tem? Como é que você ia dizer quantos quadradinhos vai ter? ia dizer quadradinhos vai ter?*

**Amália:** *Contando os quadradinhos! Somando o de baixo (referindo-se aos quadrados da parte horizontal da figura) com o de cima (referindo-se aos quadrados da parte vertical da figura).*

**Pesquisadora:** *Hum! E como é que eu vou saber, assim, rápido, quantos quadradinhos vai ter a figura da posição cinquenta?*

**Amália:** *Fazendo uma conta do de baixo com o de cima fica mais rápido do que contando um a um!*

---

Fonte: Dados de Pesquisa.

A resposta de Amália registrada no extrato de seu protocolo escrito de maneira “Aumentando sempre um”, nos levar a interpretar que ela reconhece um padrão (C2) e utiliza a estratégia da recursividade. Ao apresentar suas justificativas e argumentações na oralidade em relação ao que é perguntado na questão, fica nítido que a aluna consegue encontrar qualquer elemento da sequência, relacionando a posição com a quantidade de quadradinhos, sem recorrer à recursividade. Ela identifica que a posição está relacionada à quantidade de quadradinhos da vertical e que deve ser somada à quantidade de quadradinhos da horizontal. Esta complementação do registro escrito pela fala de Amália nos remete aos estudos de Blanton e Kaput (2005), no sentido de que o estudante deve ser capaz de generalizar, da forma mais apropriada possível, de acordo com a sua idade.


Para fomentar a discussão a respeito das respostas dadas para a Q6, selecionamos os extratos de protocolos e de entrevistas dos estudantes Bia (MM) e Beto (P&L), evidenciando alguns pontos em relação aos dados da Tabela 1 e da Tabela 2. As respostas de ambos registradas no caderno no item Q6b estão incorretas (Tabela 1) e, a partir das entrevistas, foram categorizadas como C2 (Reconhece padrão e regularidade e identifica o termo seguinte ou ainda a relação de dependência entre as variáveis) e como C6 (Compreende a função como linear) (Tabela 2). No entanto, nas respostas do item Q6c, que dizem respeito à generalização, houve um fator determinante que diferenciou completamente a



compreensão de um estudante para o outro em relação a esse item de questão o qual discorreremos a partir da Figura 2 juntamente com os extratos das entrevistas.

Figura 2 - Extratos de protocolos das alunas Bia e Beto, respectivamente

**QUESTÃO 6:** Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura ao lado. Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:



a) De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos?

1 palito


b) De quantos palitos eles precisam para fazer 11 triângulos?

32 palitos

c) Escreva como você falaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.

Para montar 20 palitos primeiro passo é não ter 2 de 2 palitos então eu vou contar primeiro depois.

**QUESTÃO 6:** Numa brincadeira, Alan e Bruno estavam testando como montar triângulos com palitos de picolé, conforme mostra a figura ao lado. Obedecendo essa maneira de montar triângulos, responda:



a) De quantos palitos eles precisam para fazer dois triângulos?

de seis palitos juntos 3 palitos

b) De quantos palitos eles precisam para fazer 11 triângulos?

não 2 2 palitos Para 11 triângulo

c) Escreva como você falaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.

no primeiro da uno 3 e no outro 2

Fonte: Dados da Pesquisa.

Como podemos observar na resposta da Q6a, a aluna Bia considera a construção de triângulos separados, não considerando a maneira de montá-los determinada pela referida questão.

### Extrato Entrevista 3 – Extrato da entrevista da aluna Bia

---

Depois de ler a questão para a aluna e ela responder aos itens Q6a e Q6b, a pesquisadora pergunta em relação ao item Q6c.

**Pesquisadora:** *Escreva como você falaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.*

**Bia:** *Não sei! Eu ia ter que ver como era o triângulo! Se fosse redondo, se fosse quadrado. Eu não sei! Só que eu tenho que ver o resultado, pra eu ver quantos que ela queria, pra eu contar os palitos.*

**Pesquisadora:** *Então depende da quantidade?*

**Bia:** *É!*

**Pesquisadora:** *E se uma amiga sua chegasse aqui perguntando sobre a quantidade de palitos se fosse 100, se fosse 200...*

**Bia:** *[...] Ela ia fazer a conta e o resultado ia tá aqui.*

**Pesquisadora:** *Hum! Então, tem que ser desenhando os triângulos?*

**Bia:** *E contando, né!*

---

Fonte: Dados da Pesquisa.

A partir do extrato da entrevista de Bia observamos que ela apresenta dificuldade na compreensão de uma das principais características de um triângulo, que é a quantidade de lados. É possível que por conta dessa incompreensão, ela não tenha conseguido reconhecer o padrão de construção dos triângulos. Ao responder oralmente o item Q6c, Bia enfatiza que para encontrar a quantidade de palitos é necessário contá-los.

Diante dessas respostas, o processo de generalização fica comprometido, uma vez que a aluna não consegue reconhecer o padrão de construção dos triângulos e não consegue relacionar a quantidade de palitos com a quantidade de triângulos. Se compararmos as respostas dadas por Bia e as respectivas categorias entre os itens Q4a e Q6a, Q4b e Q6b, observamos uma semelhança entre os resultados. O fato de ter se apoiado na contagem e por não ter conseguido prever termos distantes, nos referidos itens das questões, colaborou para que Bia não conseguisse generalizar.

Dando continuidade, trouxemos o extrato da entrevista de Beto e a análise.

Depois de ler a questão para o estudante e, ele responder aos itens Q6a e Q6b da questão, a pesquisadora pergunta em relação ao item Q6c.

**Pesquisadora:** *Escreva como vocêalaria para seu colega a quantidade de palitos necessária para construir qualquer quantidade de triângulos.*

**Beto:** *Se fosse separado ia usar três e, se fosse juntos, um ia usar três e outros dois.*

**Pesquisadora:** *Hum! Ok! E se fosse assim, mil triângulos. Aí, como é que ia fazer?*

**Beto:** *Separados?*

**Pesquisadora:** *Não. Juntos! Vamos supor que seu amigo fosse chegar aqui, ele fosse lhe perguntar: "E se fosse mil triângulos? Teria como saber a quantidade de palitos?" E aí, como é que você iria falar para ele?*

**Beto:** *Eu ia dizer assim: no primeiro vai usar três e, nos outros, dois!*

---

Fonte: Dados da Pesquisa.

É possível observar que no item Q6c, Beto compreende a regra da sequência de triângulos. Além disso, ele consegue distinguir a quantidade de palitos de acordo com a disposição dos triângulos. De acordo com as respostas dadas por Beto temos que, se os triângulos forem construídos separadamente, a função que a descreve é  $f(x)=3x$ , com  $x$  representando a quantidade de triângulos e  $f(x)$  representando a quantidade de palitos; e, se os triângulos forem construídos juntos, a função é  $f(x)=3+2(x-1)$ , com  $x$  representando a quantidade de triângulos e  $f(x)$  a quantidade de palitos.

Na generalização feita pelo estudante Beto o 3, parte fixa da função afim, representa os três palitos para o primeiro triângulo e para os demais triângulos  $(x-1)$  é só multiplicar essa quantidade por dois, seja ela qual for. Por isso, a partir do que esse estudante apresenta tanto na forma escrita quanto no trecho da entrevista, é possível afirmar que ele generaliza uma regra para essa função. Nesse sentido, a função apresentada na oralidade por Beto, é equivalente da função  $f(x)=2x+1$ , com  $x$  representando a quantidade de triângulos e  $f(x)$  representando a quantidade de palitos. Essa generalização foi feita por meio de palavras que, de acordo com Blanton e Kaput (2005) é esperado para a idade e ano escolar desse estudante. As expressões feitas por Beto nos remetem a Blanton *et al.* (2015), ao afirmarem que o pensamento funcional envolve a generalização das relações entre quantidades de covariância, além de representar e raciocinar essas relações por meio da linguagem natural.

## Considerações Finais

Antes de levarmos em conta o objetivo desse estudo, resolvemos trazer para discussão alguns pontos relevantes a partir dos dados analisados. O primeiro que destacamos está na forma com que o estudante apresenta seu raciocínio ao registrar sua resposta no papel e sua argumentação na entrevista. O raciocínio do estudante advindo da escrita registrada no caderno é apresentado de forma resumida, tímida e nem sempre nítida, diferente da oralidade. As expressões faladas e os gestos dos estudantes trazem à tona os raciocínios utilizados para a resolução das questões, com que pudemos confrontar e compreender as entrelinhas das respostas registradas no caderno. Diante disso, fica evidente o quanto é importante que o professor fomente discussões a respeito das diferentes resoluções, independente se a resposta final está correta ou não, com a finalidade de compreender o processo, a estratégia e o raciocínio utilizado pelos estudantes.

Outro ponto que destacamos diz respeito ao tipo do ambiente no qual o estudante resolveu cada uma das questões. Cabe relembrar que os estudantes que utilizaram o ambiente MM também registraram suas respostas no caderno, assim como aqueles do ambiente P&L. Os dados revelam que os ambientes P&L e MM não foram fatores determinantes que pudessem gerar diferenças nos resultados, quer seja no desempenho, quer seja na argumentação e generalização.

Retomando o objetivo do estudo - que é analisar a competência de generalização de estudantes do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental em duas questões de *Early Algebra* que envolvem relação funcional - os resultados mostram que, mesmo que o estudante tenha registrado por escrito uma resposta errada, isso não influencia, diretamente, na sua capacidade de generalização. Os resultados dos dados analisados demonstram que, de forma geral, os estudantes compreendem a regra de formação da sequência, contudo nem sempre conseguem expressá-la no registro escrito. Assim, as respostas advindas da entrevista como complementação do registro escrito tiveram papel determinante, pois na oralidade o estudante foi capaz de expressar seus argumentos e atingir a generalização.

A categoria referente à utilização da contagem, recursividade ou da proporcionalidade para prever termos distantes (C5) foi bem cotada nas resoluções registradas nos protocolos das duas questões. O fato de o estudante recorrer às estratégias relativas à essa categoria o impediu de determinar termos distantes e, portanto, embora seja uma estratégia recorrente e de passagem

para a generalização, mesmo se portando como um obstáculo, é passível de superação. Esta afirmação está associada ao caso de Amália, cujo registro escrito refere-se ao raciocínio recursivo em detrimento de sua oralidade, na qual ela consegue expressar a generalização.

Ainda de acordo com a análise feita sobre o material produzido pela pesquisa, temos que sete dos oito estudantes apresentaram, em algum momento de sua oralidade, a competência de generalização. Os resultados alcançados por este estudo trazem importantes contribuições, despertando sobretudo a necessidade de fomentar discussão em sala de aula, dirigindo a atenção não somente para o acerto e erro, mas para os argumentos vindos dos estudantes.

Nesse último quesito reforçamos a importância da atuação do professor em sala de aula, pois uma situação-problema por si só não garante a percepção, por parte do aluno, dos conceitos algébricos que estão ali implícitos. É necessário que o professor escolha situação-problema que potencialize discussões, nas quais os estudantes possam argumentar, justificando e socializando suas respostas, de tal modo que os levem a raciocinar algebricamente. Acreditamos que esse seja um desafio, portanto é relevante preparar esse professor, em especial o que atua nos Anos Iniciais. Uma possibilidade de intervenção para superar esse desafio é promover formação continuada àqueles que estão em serviço e, quanto aos que estão em formação, que sejam fomentadas investigações e pesquisas a respeito do tema.

## Referências

ALVARENGA, D.; VALE, I. A exploração de problemas de padrão. Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Quadrante**, XV, 1, 27-55. 2007.

AYALA-ALTAMIRANO, C.; MOLINA, M. Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de Primaria. In: MARBÁN, J. M.; ARCE, M; MAROTO, A.; MUÑOZ-ESCOLANO, J. M.; ALSINA, Á. (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XXIII**. Valladolid: SEIEM. p. 183-192, 2019.

BASTOS, L.S. **Early Algebra**: As estratégias de resolução de estudantes do 4º e 5º ano frente a problemas que aludem à Álgebra. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2019.

BASTOS, L.; MERLINI, V. Early Algebra: a álgebra que emerge das estratégias de resolução utilizadas por estudantes dos Anos Iniciais. **REnCiMa**, v. 11, n.1, p. 91-109, 2020.

BITENCOURT, D. V. **Early Algebra na perspectiva do livro didático**. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, BA, 2018.

BLANTON, M. et al. Early Algebra. In: J.K. VICTOR (Ed.) **Algebra: Gateway to a Technological Future**, Columbia/USA, The Mathematical Association of America, p. 7-14., 2007.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

BLANTON et al. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 46, n. 1, 39–87. 2015.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTLE, A. P. (Orgs.). **As ideias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

BORRALHO, A., CABRITA, I., PALHARES, P.; VALE, I. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: VALE, I. ; PIMENTEL, T; BARBOSA, A; FONSECA, L. ; SANTOS, L ; CANAVARRO, P. (Orgs), **Números e Álgebra**. Lisboa: SEM-SPCE. 2007, p. 193-211.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCpublicacao.pdf>>. Acesso em: 14 de abril de 2021

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

CARRAHER, T. N. **O método clínico**: usando os exames de Piaget. São Paulo: Cortez, 1998.

CARRAHER, D.W., SCHLIEMANN, A.D., SCHWARTZ, J. Early Algebra is not the same as *Algebra Early*. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Mahwah, NJ, Erlbaum, p. 235-272, 2007.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, 3-22, 2008.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E. ; ROMBERG, T.A. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTLE, A. P. (Orgs.). **As ideias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 104 – 110, 1995.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**, v. 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.

LINS, R. O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**. Blumenau, v.1, n.7, p. 29-39, abr/jun 1994.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papiros, 1997 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LINS, R. C.; KAPUT, J. The early development of algebraic thinking. In: STACEY, K.; CHICK, H. (Orgs.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht: Kluwer, p. 47 – 70, 2004.

LUNA, A.; MERLINI, V.; SILVA, V. Uma reflexão de textos elaborados por professoras da educação infantil sobre Early Algebra. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – v. 11, n. 3, 1-24, 2020.

MAGINA, S.; OLIVEIRA, C.; MERLINI, V. O Raciocínio Algébrico no Ensino Fundamental: O debate a partir da visão de quatro estudos. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – v. 9, n.1, 1-23, 2018.

MERINO, E.; CAÑADAS, M. C.; MOLINA, M. Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Edma 0-6: **Educación Matemática en la Infancia**, v.2, n.1, 24-40, 2013.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1982.

PIAGET, J. **A representação do mundo na criança**. Tradução: Rubens Fiúza. Rio de Janeiro: Record, 1079.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC. 2009.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As ideias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 89- 103, 1995.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: ALATORRE, S; CORTINA, J. L; SÁIZ, M; MÉNDEZ, A. (Eds.), **Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mérida, Mexico: PME-NA, v. 1, p 2–21, 2006.

TALL, D. The transition from arithmetic to algebra: number patterns or proceptual programming? **New Directions in Algebra Education**, Brisbane: Queensland University of Technology, 213- 231, 1992.

TEIXEIRA, A. C. N. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental: uma proposta de intervenção**. 149f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2016.

THOMPSON, F. M. **O ensino de álgebra para a criança mais nova**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 79 – 88, 1995.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. Educação Matemática: **Revista da Associação de Professores de Matemática**, n. 110, 33-38. 2011.



## **Autores**

### **Lígia Sousa Bastos**

Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba – PB

E-mail: ligiasousabastos@gmail.com

### **Vera Lucia Merlini**

Universidade Federal do Sul da Bahia – UFSB

E-mail: vlmerlini@uesc.br

### **César Teixeira**

Universidade Federal do Sul da Bahia – UFSB

E-mail: cesarteixeira@gfe.ufsb.edu.br

## Capítulo 9

# ESCREVER PARA APRENDER MATEMÁTICA: TECENDO FIOS PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA ESCOLAR

*Ronaldo Barros Ripardo*

Este capítulo discute os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo compreender como a produção textual integrada às aulas de matemática pode ajudar os alunos a aperfeiçoarem suas habilidades para participação no discurso matemático escolar. Está ancorado nas teorizações que consideram a matemática como um discurso e na linguística textual. Trata-se de um estudo de caso em que a pesquisa de campo consistiu na realização de atividades de ensino para alunos das séries finais do ensino fundamental de uma escola pública do Estado do Pará/BR. Foram desenvolvidas aulas com foco na escrita e reescrita de gêneros textuais do discurso matemático escolar a partir de uma metodologia de ensino de línguas. Os resultados apontam que o trabalho de escrita e reescrita se mostrou uma importante metodologia para levar os alunos a um aperfeiçoamento de sua comunicação no âmbito do discurso matemático, ainda que inicialmente seja uma produção ritualizada de gêneros textuais. Trata-se de uma continuidade do discurso por etapas.

*Palavras-chave:* Discurso matemático escolar; Produção textual; Aprendizagem matemática.

## Introdução

Uma revisão de literatura (RIPARDO, 2014) acerca da produção científica no Brasil na área de processos cognitivos e linguísticos em educação matemática, realizada a partir de trabalhos disponíveis no banco de teses da Capes<sup>16</sup> até o ano de 2013, aponta algumas tendências de pesquisa nesse campo, com relação aos seus objetivos. Algumas destas focam a escrita na alfabetização matemática,

---

<sup>16</sup> Órgão do Governo Federal responsável pelo Ensino Superior no Brasil.

relação entre língua materna e matemática, escrita e aprendizagem em matemática, escrita e interação nas aulas de matemática e escrita, comunicação e interação mediadas por tecnologias informáticas.

No âmbito da pesquisa internacional encontramos autores com produção teórica mais consolidada na área. Lee (2010) descreve como implementar os conceitos nas classes de matemática e como o foco na linguagem se vincula às ideias sobre o desenvolvimento da avaliação para aprender. Pimm (2002) examina alguns problemas linguísticos nas ações de ensinar e aprender matemática em sala de aula. Morgan (1998) investiga a escrita de alunos do ensino médio e também como ela é 'lida' pelos professores, com foco em como estes a partir de suas leituras as usam como base para a avaliação institucionalizada. Esta autora também analisa a forma como os professores inferem a capacidade do aluno a partir de algumas características-chave de seus textos.

De um modo geral, a produção textual como ponto de interesse está presente em número reduzido no foco investigativo destas produções. Assim, pouco exploram como o ato de produzir gêneros textuais do discurso matemático escolar se relaciona com o aperfeiçoamento de habilidades no aluno para compreender assuntos deste mesmo discurso.

As discussões sobre matemática como um discurso (SFARD, 2008) e sobre gêneros textuais (MARCUSCHI, 2008) são as bases que sustentam, em termos de fundamentação teórica, a pesquisa realizada. Cada um desses autores apresenta em suas respectivas obras uma teoria ampla e refinada que resulta de uma vasta experiência com pesquisa.

A noção de matemática como um discurso proposta por Sfard (2008) diz respeito a um tipo de comunicação ajustado com certas ações admissíveis e como estas determinam certos tipos de reações nos interlocutores. A noção de discurso proposta por Marcuschi (2008) tem a ver com os usos da língua, que são realizações institucionalizadas em esferas da atividade humana socialmente organizadas e que se materializam por meio dos gêneros textuais. Por tais lentes teóricas, a matemática pode ser vista como um discurso, que produz e organiza um conjunto de atividades por meio do uso de palavras e mediadores visuais em rotinas que levam à produção de narrativas endossadas. Estas narrativas podem ser consideradas gêneros textuais e ensinadas como texto a partir de proposições teóricas com foco no ensino de línguas (NOVERRAZ; SCHNEUWLY; DOLZ, 2004).

Assim, a pesquisa de que trata este capítulo buscou compreender como a produção textual integrada a aulas de matemática pode ajudar os alunos a

aperfeiçoarem suas habilidades para participação no discurso matemático escolar. Importante destacar que este discurso não pode ser confundido com interação, embora não prescinda dela.

Para Sfard (2008), pensamento é comunicação. Embora seja uma atividade individual, a autora considera que o pensamento se desenvolve no interior das atividades coletivas. A comunicação interpessoal é o processo de individualização pelo qual ocorre a transformação da atividade social em pensamento. O pensamento humano pode ser entendido como uma forma particular da atividade de comunicação, a comunicação consigo mesmo. Neste sentido, para a autora, a aprendizagem é comognitional. Tal palavra, em português, equivale à junção dos termos comunicação e cognição. Para a aprendizagem comognitional é na busca por comunicação que se constroem formas de pensamento e aquisição do conhecimento. Nesta perspectiva, a comunicação não pode ser vista apenas como uma ferramenta para auxiliar o pensamento. Antes disso, a abordagem comunicacional à cognição adota como tese fundamental que o aprendizado humano nada mais é que um tipo especial de interação social que visa à modificação de outras formas de interação social. Mais do que observar na pessoa propriedades que nela desencadeiem mudanças de comportamento é preciso que se atente para as interações nas quais essas mudanças de comportamento ocorrem (SFARD, 2001).

Para Sfard (2001), as respostas dadas em situações de interação são oriundas das argumentações feitas a partir das perguntas que as pessoas fazem a si mesmas e das informações que adquirem. Constitui-se, portanto, o pensamento, por e em um processo dialógico. As respostas procuradas são obtidas internamente, porém, a natureza das necessidades das quais elas decorrem é de ordem interpessoal. As atividades das quais os seres humanos participam diariamente e as necessidades oriundas delas estão imersas em práticas nas quais se recorrem a diferentes tipos de comunicação. Sendo assim, o conhecimento que se produz pode ser considerado um discurso na medida que é produto de interações sociais. Grosso modo, interagir socialmente é agir em face de um discurso que carrega em si a potencialidade de produzir conhecimentos.

Porém, as atividades sociais são diversas, heterogêneas, em maior ou menor grau, e o conhecimento que se produziu como resposta a determinadas necessidades está a todo instante sendo transformado e/ou requerido para atender a novas demandas. Dizendo de outro modo, o discurso que produz conhecimento para suprir carências que emergem das interações, apesar de

consolidar doses de conhecimento estabilizado socialmente, não cria um quadro definitivo de respostas para explicar a todos os fenômenos, uma vez que acontece nas interações e ao passo que responde a um problema cria novos outros, pois a produção do discurso se dá em novas, permanentes e múltiplas atividades sociais. Por isso que, para Sfard (2008, 2001), uma interação social visa sempre à transformação de outra interação.

Se a comunicação visa ao estabelecimento de interações sociais, e se as interações produzem conhecimentos que se materializam em discursos, então a matemática pode ser considerada uma forma de discurso. A matemática possui um corpus de conhecimento que é produzido e mobilizado por meio de um discurso específico. Se não se tem ou não se domina os mecanismos discursivos próprios desta área a pessoa não conseguirá integrar-se àqueles que interagem no discurso matemático.

## **Matemática como um discurso**

De acordo com Sfard (2008), o discurso matemático pode ser considerado um sistema que se autoproduz, principalmente quando cristalizado na forma de texto escrito. Os objetos desse sistema se estruturam em vários níveis. Tanto os objetos quanto a fala sobre esses objetos emergem das camadas do discurso e erigem novos estratos discursivos do sistema. Na matemática, os objetos apenas existem no momento em que deles se fala, objeto e fala se constituem o objeto do discurso e o próprio discurso.

Entendida como um discurso, e que se realiza pela comunicação na interação, a matemática se distingue de outros discursos devido ao uso de palavras, o recurso a mediadores visuais, a narrativas endossadas e à realização de rotinas próprias (SFARD, 2008)

Em resumo, as *palavras* permitem dizer algo a respeito do objeto, como as categorias gramaticais de nome, que nomeiam ou descrevem objetos matemáticos. Os *mediadores visuais* são objetos usados na comunicação, como os da notação algébrica e os operadores aritméticos. Por *rotinas* se entendem as ações ordenadas em que os participantes mobilizam as palavras e mediadores visuais para estruturar sequências textuais, as narrativas, como as tarefas típicas de definir, conjecturar, estimar, calcular e demonstrar etc. *Narrativas endossadas* são sequências de expressões verbais ordenadas de modo a descreverem objetos,

relações entre objetos e processos pelos quais tais objetos são construídos, sendo passíveis de aprovação ou refutação pela comunidade que pratica esse mesmo discurso, como os teoremas, as definições, os axiomas etc.

Palavras e mediadores visuais, como ferramentas; rotinas, como processo; e narrativas endossadas, como resultado, corporificam o discurso matemático. Todavia, as ferramentas não são utilizadas sem critérios e tampouco os processos podem ser conduzidos à revelia dos matematistas<sup>17</sup>. As narrativas produzidas para serem endossáveis e, portanto, tornarem-se resultados devidamente validados, devem ser erigidas sob regras bem definidas. Tanto regulam a participação dos discursantes como garantem a autoprodução do discurso.

Como produto de interações sociais, e por estas serem diversas, o discurso sobre objetos matemáticos também é plural. Três tipos de discursos matemáticos são exemplificados abaixo.

**Exemplo 1** - Discurso matemático coloquial (uma conversa com uma menina de 7 anos)

**Anna:** *Roni, qual a sua idade?*

**Roni:** *Sete.*

**Anna:** *O quanto é mais velho?*

**Roni:** *Vinte.*

**Anna:** *Ela é mais velha que você? Quanto?*

**Roni:** *Eu não sei... Não tenho pensado sobre isto.*

**Anna:** *Tente pensar sobre isto agora.*

**Roni:** *Sete também.*

**Anna:** *O que você quer dizer?*

**Roni:** *Sete, oito, nove, dez, onze, doze [depois de cada palavra ela curva um dedo]... Seis (SFARD, 2008, p.132, tradução nossa).*

---

<sup>17</sup> Sfard (2008) distingue matematista de matemático. O primeiro termo denomina qualquer pessoa praticante do discurso matemático, enquanto o segundo é atribuído aos que desenvolvem a matemática como profissão.

### Exemplo 2 - Discurso matemático escolar (um problema escolar)

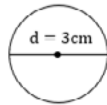
Questão: O diâmetro de um círculo é 3 centímetros. O que é a circunferência?

Solução:

$$C = \pi \cdot D$$

$$C = 3,14 \cdot (3 \text{ cm})$$

$$C = 9,42 \text{ cm}$$



(MATH GOODIES, s/d, tradução nossa).

### Exemplo 3 - Discurso matemático literato (um teorema)

Deixe  $F_q$  denotar o campo finito com  $q$  elementos, onde  $q$  é uma potência de um primo.

$Z=0$  inversível escalar  $2 \times 2$  matrizes com entradas em  $F_x$ .


Deixe  $PGL_2(F_q) = GL_2(F_q)/Z = A.Z$   $A$  está  $GL_2(F_q)$ , com multiplicação dada por  $A.Z B.Z = A.B$   $Z$  Isto é o grupo projectivo linear sobre  $F$ ,

$LF(F_q)$  é um grupo de transformações fraccionárias lineares  $x \rightarrow (ax+b)/(cx+d)$ . Reivindicação: Há um grupo de isomorfismo teórico entre  $PGL_2(F_q)$  e  $LF(F_q)$ .

(LUERS, 1999, tradução nossa).

O discurso assume as mais distintas feições de acordo com o modo em que se usam tais propriedades. Os exemplos presentes no Quadro 1 são analisados segundo estas marcas e ajudam a entender como cada tipo de discurso é moldado a partir destas.

Quadro 1 - Características do discurso matemático

Contexto Características	Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3
	Coloquial	Escolar	Acadêmico
Palavras	/sete/ /vinte/	Diâmetro Círculo Centímetro	Campo infinito Grupo projetivo linear Transformações fracionárias lineares
Mediadores visuais	-	$C = \pi d$ 	$x \rightarrow (ax+b)(cx+d)$ F4
Narrativas endossadas	-	-	Há um grupo de isomorfismo teórico entre PGL2 (F4) e LF(FQ)
Rotinas	Conversação cotidiana	Resolução de um problema escolar	Definição

Fonte: Elaborado pelo autor.

No primeiro exemplo, discurso matemático coloquial, a interação acontece exclusivamente pelo uso de palavras via oralidade. O segundo, discurso matemático escolar, decorre da produção de um conhecimento institucionalizado e requer o uso de palavras e mediadores visuais escritos, icônicos e não icônicos, coerentes com a complexidade própria da comunicação desse conhecimento. O terceiro, discurso matemático literato, recorre ao uso de um vocabulário mais sofisticado, a mediadores visuais estritamente simbólicos e a narrativas endossadas, haja vista a demonstração de um teorema ser impossível sem o uso dessas propriedades.

Em relação ao discurso matemático, Sfard (2008) distingue dois conjuntos específicos de regras: as regras em nível de objeto e as regras metadiscursivas, também chamadas de metaregras. Regras em nível de objeto “são narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso” (Sfard, 2008, p. 201, tradução nossa). Grosso modo, os textos do discurso matemático, composto por palavras e mediadores visuais, contam com as regras que definem os objetos matemáticos e, concomitante, incluem-se como parte do rol de objetos desse discurso, uma vez que são oriundos de uma rotina específica que os validam – disso resulta sua natureza autogerativa. Quando se diz que ‘um número inteiro  $p$  é primo quando  $p \neq 0, 1$  e  $-1$  e  $D = \{1, -1, p, -p\}$ ’, pode-se considerar que tal narrativa foi endossada pela comunidade de matemáticos, que o objeto ‘números primos’ foi adicionado ao discurso matemático e se tornou regra que um número primo, no conjunto dos números inteiros, não pode ser outro número que exceda aos



limites impostos por esta narrativa. As metarregras são de nível mais elevado que as regras em nível de objeto. Enquanto a primeira diz respeito ao que os discursantes fazem, a segunda tem a ver com o comportamento dos objetos. Uma interpretação razoável para esta diferenciação em níveis pode ser que as metarregras estão relacionadas a processos, enquanto as regras em nível de objeto a produtos (Sfard, 2008).

Em todo ato discursivo as pessoas guiam suas ações em função de um objetivo. Cada passo da ação discursiva e a sucessão deles na performance é, segundo Sfard (2008), guiado por metarregras ligadas ao 'como'. Ou seja, para que se alcance o que é almejado se faz necessário o uso de um conjunto de ações correguladas, determinadas ou restringidas por grupo de metarregras. O procedimento de uma rotina tem a ver com o como o padrão funciona, em como as pessoas implementam ações e como balizam o curso da performance para levar a cabo o que pretendem.

Dosar que procedimentos são ou não adequados para uma dada situação é feito com base na referência a outras vivenciadas anteriormente, cujos parâmetros foram internalizados e serão recorrentes para a identificação do que seria apropriado em rotinas futuras. Assim, o 'quando' de uma rotina é regulado por metarregras que permitem ao discursante identificar se determinado procedimento é apropriado à situação (SFARD, 2008). Essa adequação do procedimento perpassa pelo crivo das metarregras em dois momentos.

Mesmo que certa rotina seja familiar a um matemático, as situações prováveis de serem encontradas nessa rotina podem variar consideravelmente em face do conhecimento matemático mobilizado e, com isso, os procedimentos possíveis de serem utilizados também podem ser múltiplos. A função das primeiras metarregras utilizadas no quando da rotina é indicar ao matemático que procedimentos podem ser adequados à situação, ou seja, diz respeito às condições de aplicabilidade. Incluem-se no espectro dessas regras pistas particulares ao contexto situacional, ou deixadas pelos elementos verbais do evento, ou subtraídas de gestos do interlocutor, dentre outras marcas (SFARD, 2008).

Ao final da performance quase sempre há um desejo compartilhado pelo(s) discursante(s) pela adesão do interlocutor ao produto da interação. Por outras palavras, o ato realizado deve suscitar uma interpretação de sucesso em relação ao procedimento empregado. Desse modo, para Sfard (2008), o segundo grupo de metarregras do quando a entrarem em ação são denominadas de encerramento,

pois indicam como avaliar o fim da performance.

Em síntese, o como de uma rotina está situado entre às condições de aplicabilidade e de encerramento de uma rotina. Enquanto as metarregras ligadas àquela regulam a seleção e a compatibilidade do procedimento, as metarregras ligadas a este permitem imprimir juízo de valor sobre o resultado da performance. A direcionalidade da ação discursiva exclusivamente para quaisquer um destes grupos de metarregras ou para uma combinação entre eles determina perfis diferentes de rotina (SFARD, 2008). Ações focadas apenas para o como, ignorando o quando, pode estar implementando uma rotina diferente daquele que está interessado também no quando. Do mesmo modo, o discursante que ignora as condições de aplicabilidade do quando está performando uma ação distinta daquele que está atento às metarregras vinculadas ao quando e ao como.

Para Sfard (2008), o objetivo maior das rotinas matemáticas é produzir narrativas sobre objetos matemáticos. Uma rotina conta como exploração se ela terminar com a produção de uma narrativa acerca de um objeto matemático passível de endosso por especialistas da comunidade a qual a rotina pertence. Rotinas desse tipo não visam à transformação de objetos materialmente perceptíveis, embora a manipulação física de materiais palpáveis possa ser utilizada como parte de uma exploração as metarregras ligadas ao como e ao quando estão devidamente articuladas. Nas ações discursivas em que uma exploração é realizada o encerramento ou uma preocupação com o mesmo é posta em relevo. Se a rotina culminar com a produção de uma narrativa aceitável, se isto e não a mudança realizada no estado físico do objeto for o critério para a condição de encerramento, então ela é uma exploração e não outro tipo de rotina.

Um segundo tipo de rotina são os atos, cujas regras visam mais à transformação ou produção física de objetos do que à produção de narrativas. Assim como as rotinas de exploração, atos realizados também incluem atenção especial para com o encerramento da rotina. Todavia, embora ao completar a performance a transformação possa estar acompanhada de uma narrativa, a avaliação não incidirá no texto produzido, mas nas características físicas que objeto incorporou (SFARD, 2008).

Um terceiro tipo de narrativa são os rituais. Sfard (2008) argumenta que em muitas das situações discursivas a preocupação dos interlocutores não é com as condições de encerramento da rotina, ou seja, com a produção de uma narrativa ou com a transformação física do objeto. A princípio, criar e manter uma

ligação com as outras pessoas é o que estaria no topo da lista de interesses dos interlocutores, ou ao menos para alguns deles.

As rotinas de exploração podem levar a narrativas de construir, substantiar e relembrar. Narrativas de construir objetos são aquelas feitas por uma pessoa acerca de uma descoberta, de uma observação, de uma reflexão etc.; de substantiar ou endossar são as que buscam provar que determinada construção pode ser aceita no discurso matemático e as de relembrar são as já endossadas que são mobilizadas para a fluência no discurso.

## **Gêneros textuais**

Marcuschi (2008) entende que os textos são o material empírico observável ao qual se tem acesso direto em um discurso. São unidades linguísticas que realizam uma função comunicativa em um contexto social. Ou seja, em uma situação enunciativa existem possibilidades infinitas de realizá-la com textos, cabendo ao produtor a escolha por um gênero que irá materializá-lo. Tratando-se de fenômeno linguístico empírico, o observável, o texto apresenta “[...] todos os elementos configuracionais que dão acesso aos demais aspectos da análise” (Marcuschi, 2008, p. 28). Depreende-se, portanto, que o texto é aquilo que se pode de fato ver, o artefato que materializa as ações discursivas e que permite acessar aos demais aspectos da enunciação.

Quanto ao gênero textual, pode-se dizer que é uma prática social e discursiva, que materializa o texto em situações comunicativas recorrentes. Os gêneros textuais são os textos encontrados nos mais diversos eventos cotidianos, como uma receita, um versículo bíblico, um telefonema, uma embalagem de produto, uma intimação etc. Como produto resultante da integração de forças históricas, institucionais, sociais e técnicas apresentam determinados padrões sociocomunicativos conferidos por composições funcionais, objetivos enunciativos e estilos. São formas textuais, escritas ou orais, situadas histórica e socialmente que surgem no âmbito de domínios discursivos.

O domínio discursivo está ligado às instâncias de produção discursiva ou de atividade humana onde se originam e circulam gêneros textuais. As várias atividades humanas características de uma determinada instância discursiva terminam por produzir rotinas comunicativas institucionalizadas e instauradoras de poder que assumem a forma de gêneros. Não são textos nem discursos, mas

propiciam o surgimento de muitos deles, uma vez que os gêneros textuais são institucionalmente marcados (MARCUSCHI, 2008).

Para Marcuschi (2008), uma vez que o aluno chega à escola comunicando-se eficientemente, o papel da escola é criar possibilidades para aperfeiçoar o desenvolvimento dessa competência comunicativa. Para isso, deve concentrar esforços no trabalho com as modalidades oral e escrita, ampliando o repertório de usos da língua que nem sempre são propiciados pela vivência cotidiana externa à escola. Outra ação é priorizar um ensino reflexivo ao normativo, adotando-se como competência comunicativa uma postura mais global acerca da etnografia da fala, o que envolve análise de interações verbais e produções discursivas, além de atividades verbais e comunicativas, sem perder de vista a cognição.

Nesse sentido, o autor compreende que o papel da escola não se limita a ensinar aquilo que o aluno sabe ao chegar a ela, muito menos tolher as capacidades de interação que se encontram consolidadas. Ao contrário disso, a instituição escolar deve favorecer “[...] usos da língua e formas não corriqueiras de comunicação escrita e oral. O núcleo de trabalho será com a língua no contexto da compreensão, produção e análise textual” (MARCUSCHI, 2008, p. 55). Tal posicionamento advém da visão de língua como conjunto de práticas discursivas e sociocognitivas e que não exclui o sistema da língua, ou seja, o trabalho com a gramática. Todavia, o estudo não deve estagnar-se nos aspectos formais da língua.

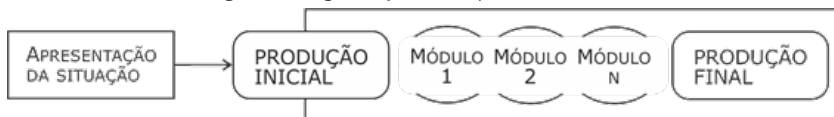
O que os indivíduos fazem em uma interação é condicionado por aspectos amplos e multifacetados, de modo que as regras mobilizadas não são fixas e o momento é que aponta para quais delas fazer uso (MARCUSCHI, 2008). É algo também apontado por Sfard (2008): as regras orientam o uso, mas não determina as ações.

A produção de textos envolve normas não rígidas. A escrita não se dá por um processo aleatório ainda que o objeto do dizer tenha sido alvo de outras escritas e interações. Para isso, são acionados mecanismos do sistema de controle da produção textual, como o que dizer, ao que dar importância e a intensidade necessária. Os princípios de textualidade embora não sejam regras de boa formação textual podem ajudar a equilibrar essa equação, uma vez que o texto se trata de um evento colaborativo (MARCUSCHI, 2008).

Uma proposta de trabalho com gêneros textuais são as sequências didáticas, compreendidas como um “conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou

escrito” (NOVERRAZ; SCHNEUWLY; DOLZ, 2004, p. 82). Em essência, o caráter desta metodologia para o ensino de gêneros é modular e se pauta na criação de condições de produção textual similar a um contexto de comunicação real, a uma necessidade de agir discursivamente que extrapole a mera urgência de uma atividade escolar. O esquema abaixo (Figura 1) ilustra como tais autores pensam uma proposta para o ensino dos gêneros.

Figura 1 - Organização de sequências didáticas



Fonte: Noverraz, Schneuwly e Dolz (2004, p. 83).

A apresentação da situação consiste no primeiro encontro do aluno com o gênero na atividade e que culminará com a produção inicial. É um esboço geral do qual o aluno ainda não tem orientações muito específicas a respeito do gênero que está produzindo, mas cujo projeto de comunicação será consolidado na produção final. Os módulos consistem na reescrita tantas vezes seja necessário até que a produção alcance um estado que demonstre o aprendizado do aluno em relação ao gênero, considerando-se as finalidades sociocomunicativas em questão. A produção final será o momento em que o aluno concluirá a escrita do gênero, refletindo sobre o que fez para que o texto tenha alcançado o estado em que se apresenta e tem a ver com o fato de o do aluno ter controle do que fez, por que fez e como fez.

Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, p. 95) destacam, dentre outros aspectos importantes, que o trabalho com essa metodologia envolve a noção de que o texto é um objeto provisório submetido a um processo de reescrita e o “aluno deve aprender que escrever é (também) reescrever.” Outro detalhe é o uso de textos de referência, que, em suma, é a oportunidade para familiarizar-se com outro texto estável, com a linguagem de outros e que possibilita a crítica.

## Método

O lócus da pesquisa foi uma escola pública do município de Marabá/PA/BR, cuja escolha se deu em virtude das condições oferecidas para o desenvolvimento da pesquisa, quais sejam: seleção dos sujeitos com perfil desejado e infraestrutura física necessária (espaço físico e recursos materiais). Coube à direção selecionar os alunos participantes, entrar em contato com os pais ou seus responsáveis para obtenção de consentimento para a participação desses sujeitos e dar o apoio necessário para que as atividades pudessem transcorrer conforme o planejamento.

A heterogeneidade foi tomada como o critério principal para a seleção dos participantes da pesquisa. Como as ações do projeto na referida escola se tratavam de ministrar aulas com foco em conteúdos de língua portuguesa e matemática, enquadravam-se nesse perfil alunos que apresentassem rendimento qualitativamente diferenciado nestas disciplinas, ou seja, com notas altas e baixas, e que fossem do 8º e 9º anos do ensino fundamental.

A definição de tais critérios vislumbrava que as ações de ensino envolvessem um conjunto de alunos com domínios distintos de habilidades de matemática e da língua portuguesa. Deste modo, desenvolver simultaneamente as mesmas atividades para alunos de dois anos escolares distintos e que fossem considerados ‘bons’ em uma disciplina e, possivelmente, não em outra, seria garantir minimamente que o aperfeiçoamento de algumas habilidades em escrita e matemática pudesse ser melhor vislumbrado, acompanhado e analisado ao longo do período de aulas, de modo a trazer respostas para a pergunta de pesquisa.

Assim, fizeram parte da pesquisa 12 alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental que ficaram em Dependência<sup>18</sup> em matemática e língua portuguesa referentes ao ano letivo de 2012. A partir de aulas ofertadas no contraturno desses alunos, no primeiro semestre de 2013, por meio de projeto de ensino, puderam somar esta participação a outras atividades desenvolvidas pela escola e regularizarem o estado de dependência para com tais disciplinas. Dentre o total

---

<sup>18</sup> No Estado do Pará, conforme Resolução n. 1 do Conselho Estadual de Educação (PARÁ, 2010), a progressão parcial consiste na promoção do aluno para a série posterior desde que este tenha reprovado em no máximo três disciplinas na série atual. No ano seguinte, obrigatoriamente, o aluno frequentará as aulas da série atual em determinado turno e as da(s) disciplina(s) reprovada(s), a(s) da Dependência, em outro. O programa de estudos com vistas à recuperação de conteúdos, programado especialmente para este aluno, tendo em vista a sua recuperação, pode ser definido sob critérios do estabelecimento de ensino.

de alunos participantes, dois eram do sexo feminino, metade cursava o 8º ano e a outra metade o 9º ano e 41,7% estavam em dependência em matemática.

A produção dos dados da pesquisa se utilizou de vários instrumentos. Alguns destes, como os questionários de sondagem, buscaram levantar o perfil dos alunos e auxiliar no planejamento das aulas. A exemplo, foi identificado que nenhum deles possuía familiaridade com a escrita dos gêneros textuais do discurso matemático escolar. Outros instrumentos, como diário de bordo, videograções e textos produzidos pelos alunos, constituíram-se no material que fornece os dados analisados para encontrar respostas ao objetivo da pesquisa.

A pesquisa de campo consistiu em atividades desenvolvidas para os participantes da pesquisa ao longo de 32 encontros que aconteceram em média três vezes por semana com duração aproximada de três horas cada.

As atividades foram desencadeadas por meio de situações-problema cujas resoluções envolveram a negociação de significados, mobilização de estratégias e compartilhamento de pontos de vistas entre os alunos. Foi-se refinando as habilidades de argumentação a partir do uso de ferramentas do discurso matemático e da produção escrita de gêneros desse discurso sobre os temas desigualdade triangular e classificação de triângulos.

Todas as atividades foram planejadas com o propósito de levar os alunos a realizarem explorações nas rotinas de provar, definir, formular e resolver problemas. Cada uma delas, combinada com uma situação-problema, tinha o desenvolvimento de uma habilidade como foco. Essas habilidades destacaram a construção de metarregras ligadas ao procedimento, ou seja, ao como da rotinas, ou ao quando, ambas culminando com a construção de regras em nível de objeto também chamadas de fatos/teorias matemáticas (desigualdade triangular e classificação de triângulos) por meio de narrativas de construir, substanciar e/ou relembrar, que resultaram na produção de diferentes gêneros textuais, como a definição, o teorema, a prova, a situação problema e a resposta para uma situação problema.

As principais ações efetivadas em cada uma das situações-problema constam no Quadro 1.

Quadro 1 – Situações-problema trabalhadas na pesquisa de campo

Situações problemas	Habilidades
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diferenciar e classificar triângulos a partir das medidas de seus lados;</li> <li>Relacionar a construção de um triângulo com a medida dos seus lados;</li> <li>Compreender que a resolução de uma situação inclui também a produção de um texto como resposta.</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>Relacionar a construção de um triângulo isósceles com a condição de existência de um triângulo.</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>Avaliar a razoabilidade das medidas dos lados do desenho de um triângulo.</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>Analisar a organização dos dados e regularidades no algoritmo sobre a existência de um triângulo.</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>Avaliar a argumentação ao provar a existência de um triângulo equilátero.</li> </ul>
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elaborar e resolver uma situação problema a partir de um conjunto de dados apresentados.</li> </ul>
7	<ul style="list-style-type: none"> <li>Analisar dentre um conjunto de medidas a que poderia ser a do terceiro lado de um triângulo dadas as medidas dos outros dois lados.</li> </ul>
8	<ul style="list-style-type: none"> <li>Definir um intervalo numérico como medidas para o terceiro lado de um triângulo dadas as medidas dos outros dois lados.</li> </ul>
9	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elaborar e resolver uma situação problema envolvendo o tema desigualdade triangular.</li> </ul>

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas situações-problema 1 e 4 o trabalho incidiu na construção de narrativas. Por meio delas os alunos foram levados a estruturarem um objeto matemático por meio de narrativas como ‘a soma de dois segmentos deve ser maior que o terceiro segmento para formar um triângulo’ e ‘define-se triângulo equilátero o que tem todos os lados com a mesma medida’. O trabalho voltado mais para a substanciação de narrativas foi feito nas situações-problema 2, 3, 5 e 6, enquanto para relembrar narrativas teve destaque nas situações-problema 7, 8 e 9. Esta descrição é geral, pois não significa que as ações efetivadas no trabalho com a resolução de uma situação-problema não tenham envolvido mais de um tipo de narrativa. Pode-se dizer, por exemplo, que todas levaram à construção de uma teoria matemática, mas, em determinados momentos, o foco na substanciação de narrativas propiciou a descoberta de padrões que não foram observados ao construir ou relembrar narrativas.

O desenrolar das atividades relacionadas a cada uma das situações-problema foi moldando o plano da pesquisa, conforme especificidades da abordagem qualitativa. Para Bogdan e Biklen (1994, p. 83), em uma investigação qualitativa “os planos evoluem à medida que se familiarizam com o ambiente, pessoas e outras fontes de dados, os quais são adquiridos através da observação



direta”.

Buscou-se na análise dos dados avaliar o aprimoramento da competência discursiva dos alunos face à participação deles nos diferentes tipos de rotinas do discurso matemático escolar, o que inclui o domínio em produzir gêneros desse discurso, a partir de alguns episódios extraídos das atividades relacionadas a algumas das situações problemas. Tais análises consideraram as interações, denominadas Episódios, e os textos produzidos pelos sujeitos.

## **Rotinas de construir teoremas**

O estudo sobre triângulos iniciou falando-se das muitas situações cotidianas em que se encontram figuras geométricas. Em seguida, foi discutido o aspecto de rigidez dessa figura a partir de construções de quadriláteros e triângulos feitos com palitos de picolé. Após essa introdução, a situação-problema abaixo foi entregue em uma folha de papel para cada um dos alunos:

*Situação problema 1. Uma pessoa cortou canudinhos de refrigerante em pedaços de tamanhos variados e organizou-os em quatro grupos:*

*Grupo 1: 10 cm, 10 cm e 10 cm*

*Grupo 2: 13 cm, 10 cm e 15 cm*

*Grupo 3: 9 cm, 15 cm e 15 cm*

*Grupo 4: 5 cm, 7 cm, 10 cm e 13 cm*

*Que figuras geométricas é possível formar com os canudinhos de cada um desses grupos?*

Um dos propósitos das atividades desenvolvidas a partir desta situação-problema foi levar os alunos a relacionarem a construção de um triângulo com a medida dos segmentos que o formam.

Nas primeiras tentativas de resolução da situação-problema a quantidade de segmentos era o único critério adotado pelos alunos para a formação de um triângulo. Para eles, a existência de três segmentos era condição necessária e suficiente para a construção da figura. A resolução era feita desenhando-se triângulos e indicando-se em cada um dos lados as respectivas medidas.

A atividade seguinte consistiu na entrega de canudinhos de refrigerante com o mesmo comprimento das medidas informadas nos quatro grupos da situação-problema. Teve como finalidade levar os alunos, organizados em grupos, a tentar construir objetos que representassem triângulos. O episódio<sup>19</sup> abaixo (Episódio 1) retrata, em termos gerais, o processo de resolução pela maioria dos alunos.

#### Episódio 1 - Construindo triângulos

[T1]	Pesquisador	<i>eu quero que vocês formem ... com a figura ((canudinhos)) do grupo um ... do grupo dois ... e do grupo três ... (...) quantos triângulos apenas com o grupo quatro quero que forma só com esses três canudinhos aqui ((Mauro tenta sem sucesso montar um triângulo com pedaços canudinhos medindo 5, 7 e 13 cm))</i>
[T2]	Aluno	<i>não dá não</i>
[T3]	Pesquisador	<i>será?</i>
[T4]	Mauro	<i>dá professor</i>
[T5]	Pesquisador	<i>mas não tem três pedaços?</i>
[T6]	Saulo	<i>(já fiz isso daí) e não deu não</i>
[T7]	Mauro	<i>não dá não ((após várias tentativas))</i>
[T8]	Pesquisador	<i>e aí ... qual a conclusão que a gente chega ... dá ou não dá para formar? (...)</i>
[T9]	Mauro	<i>tem que saber como ia aumentar isso aí</i>
[T10]	Pesquisador	<i>dá ou não dá para formar?</i>
[T11]	Mauro	<i>Não</i> <i>(...)</i>
[T18]	Peq.	<i>prestem atenção aqui ... eu quero que vocês anotem no material de vocês ... qual é os triângulos ... quais são os pedaços de canudinhos que dá para formar triângulo e os pedaços que não dá para formar triângulo ... (...) olha só ... a Laura anotou que um triângulo não dá para formar ... qual é Laura?</i>
[T19]	Laura	<i>que não dá para formar?</i>
[T20]	Pesquisador	<i>É</i>
[T21]	Laura	<i>um de cinco ... um de sete e um de treze</i>
[T22]	Tina	<i>ah é verdade porque os canu:: os tamanho é menor não é?</i>
[T23]	Pesquisador	<i>isso ... é isso mesmo?</i>
[T24]	Tina	<i>É</i>

Fonte: Dados da pesquisa.

<sup>19</sup> Na transcrição, a letra 'T' indica o 'turno' da fala, ou seja, a vez em que cada participante fala na interação. Os nomes dos alunos são fictícios, para preservar suas identidades.

Ao ser desafiado a formar um triângulo com segmentos de 13, 7 e 5 cm o aluno, mesmo sendo advertido pelo colega sobre a impossibilidade, tenta, em vão, construir a figura solicitada. A pergunta do pesquisador, *“mas não tem três pedaços?”* (T5), questiona a regra conhecida por eles que implicaria no sucesso da ação. Nesta performance ritualística a manipulação física de objetos é seguida da narrativa *“não dá não”* dada por Mauro (T7). É um dos primeiros momentos em que uma narrativa segue à ação.

A atividade ainda não assume neste momento uma perspectiva de exploração, pois o aluno tenta encontrar uma solução por meio de uma ação direta, aumentar o comprimento dos canudinhos (T9), ao invés de buscar uma resposta utilizando os recursos disponíveis.

A partir desta atividade os alunos perceberam que, de algum modo, os casos que não podiam formar triângulos estavam relacionados ao comprimento dos segmentos. A fala da Tina, *“o tamanho é menor, não é?”* (T22), aponta para essa conclusão. Todavia, não conseguiram associar as medidas de dois canudinhos à medida do terceiro. Ao serem questionados sobre o porquê de quando não era possível formar triângulos a resposta era *“porque são muito pequenos”*.

Posteriormente, os alunos foram questionados sobre a eficácia do método até então utilizado para conferir a existência de um triângulo, principalmente se as medidas dadas para os três segmentos fossem muito grandes. Com isso, foram instigados (Episódio 2) a buscarem padrões entre os segmentos, explicarem o porquê e a partir da comparação entre eles fazer emergir alguma explicação.

Episódio 2. - Como fazer um triângulo

[T1]	Pesquisador	(...) <i>um de quinze ... um de vinte e um dez ... como é que eu faço para saber ... sem usar os canudinhos ... se forma ou não forma triângulo?</i> (...)
[T2]	Aldo	<i>a conta professor ... a conta professor ....</i>
[T3]	Pesquisador	<i>que conta?</i>
[T4]	Aldo	<i>a conta dos números</i> <i>((alunos falando ao mesmo tempo ... barulho))</i>
[T5]	Aldo	<i>professor ...</i>
[T6]	Pesquisador	<i>veja só ... a gente vai ficar adivinhando?</i>
[T7]	Aldo	<i>não</i>
[T8]	Saulo	<i>tem que fazer a conta</i>

[T9]	Pesquisador	<i>isso ... como a gente faz para saber ... por que dá para ficar jogando ... arriscando?</i>
[T10]	Saulo	<i>não</i>
[T11]	Pesquisador	<i>não dá</i> <i>((é pedido silêncio e atenção dos alunos por causa da bagunça))</i>
[T12]	Pesquisador	<i>atenção gente ... a gente fica arriscando ... eu acho que é quinze ... eu acho que dá ... eu acho que não dá ... não tem como fazer de um outro jeito?</i>
[T13]	Toni	<i>sim</i>
[T14]	Saulo	<i>tem ... fazer a conta</i> <i>(...)</i>
[T39]	Pesquisador	<i>a gente vai pegar um ... de sete ... dez e treze ... esse forma ... o quê que tem de diferente desse para esse aqui? ... que esse dá para formar e esse não?</i>
[T40]	Tina	<i>os dois ali é menor e o treze é maior</i>
[T41]	Pesquisador	<i>bom ... mas esse de sete ... cinco e treze também é e não formou ... e tem os três tamanhos diferentes também</i>
[T42]	Tina	<i>não professor ... é porque o treze vai ficar maior</i>
[T43]	Pesquisador	<i>mas por que tu sabe?</i>
[T44]	Saulo	<i>por que o treze está em baixo e o cinco está em cima</i>
[T45]	Tina	<i>faz embaixo então professor</i>
[T46]	Saulo	<i>com treze...</i>
[T47]	Pesquisador	<i>[mas nós já fizemos olha ... a gente sabe que esse aqui não forma e esse aqui forma</i>
[T48]	Saulo	<i>o treze</i>
[T49]	Pesquisador	<i>[por que esse forma e esse aqui não forma?</i>
[T50]	Aldo	<i>porque o treze vai ficar maior ...</i>
[T51]	Pesquisador	<i>hã?</i>
[T52]	Aldo	<i>o treze vai ficar maior que os outros</i>
[T53]	Pesquisador	<i>fica maior do que qual?</i>
[T54]	Aldo	<i>do que o sete e o cinco</i>
[T55]	Toni	<i>[do que o sete e o cinco</i>
[T56]	Pesquisador	<i>olha só o que ele está dizendo</i>
[T57]	Toni	<i>[era isso que eu estava explicando:</i>

---

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta da Tina, “os dois ali é menor e o treze é maior” (T40) e “é porque o treze vai ficar maior” (T42), evidencia os primeiros indícios de que um padrão fora identificado, que a medida de um dentre os três segmentos era notadamente

maior que os outros dois juntos, sendo produzidas as primeiras narrativas, orais: “o treze vai ficar maior que os outros” (Aldo, T50). Outra fala, a do Saulo, “tem ... fazer a conta” (T14), aponta também que a atenção dos alunos também se volta para uma espécie de comparação entre as medidas de dois lados com a terceira de um possível triângulo, fato explorado nas próximas atividades (Episódio 3).

Episódio 3. - Somando lados de um triângulo		
[T1]	Pesquisador	<i>o quê que a Tina e o Aldo estão dizendo ... que o treze fica maior que quem? ... então se eu somar cinco com sete eu vou ter quanto? ((escrevendo na lousa))</i>
[T2]	Pedro	<i>Doze</i>
[T3]	Pesquisador	<i>o doze é maior ou menor do que treze?</i>
[T4]	Alunos	<i>é menor ((vários alunos))</i>
[T5]	Pesquisador	<i>e aqui ... se eu somar o sete com o dez...</i>
[T6]	Aldo	<i>vai dar dezessete</i>
[T7]	Pesquisador	<i>vai dar quanto?</i>
[T8]	Aldo	<i>Dezessete</i>
[T9]	Pesquisador	<i>dezessete ... é maior ou menor que o treze?</i>
[T10]	Aluno	<i>maior professor ((vários alunos))</i>
[T11]	Pesquisador	<i>então o dezessete é maior que o: ... ((escrevendo na forma algébrica))</i>
[T12]	Toni	<i>Treze</i>
[T13]	Pesquisador	<i>treze ... e o doze é...</i>
[T14]	Aluno	<i>Menor</i>  <i>(...)</i>
[T18]	Pesquisador	<i>Mauro ... quando eu somei dois lados ... deu maior ou menor que o terceiro lado? ((primeiro exemplo))</i>
[T19]	Alunos	<i>Menor</i>
[T20]	Pesquisador	<i>nesse caso ... formou triângulo?</i>
[T21]	Aldo	<i>Não</i>
[T22]	Mauro	<i>Não</i>
[T23]	Pesquisador	<i>aqui que eu somei os dois lados ... deu maior ou menor que o terceiro lado? ((segundo exemplo))</i>
[T24]	Alunos	<i>maior</i>
[T25]	Pesquisador	<i>formou?</i>
[T26]	Alunos	<i>formou</i>

Fonte: Dados da pesquisa.

As perguntas foram direcionadas para uma comparação, induzindo os alunos a dizerem se a soma era maior ou menor. Tais perguntas, porém, fixaram apenas o uso dos termos 'maior' e 'menor' como narrativa dita ao final da ação de comparar as medidas. Nos turnos seguintes se tenta associar tanto a ação de comparar quanto o uso destas palavras para diferenciar os dois casos, o que formava triângulo e o que não formava.

A interação retratada neste episódio fornece indícios que os alunos conseguiram compreender que nos casos exemplificados a medida 13 de um dos segmentos era maior que as outras medidas juntas. Ou seja, o foco ficou muito mais nos valores das medidas do que na comparação entre os segmentos propriamente dita. O Episódio 4 mostra as ações apresentadas para os alunos avançarem na compreensão do tema.

#### Episódio 4. - O terceiro lado do triângulo

[T1]	Pesquisador	<i>(...) o que eu posso fazer aqui para saber se forma ou não o triângulo? (...) ((escrevendo na lousa))</i>
[T2]	Aldo	<i>tem que somar os dois lados</i> <i>(...)</i>
[T3]	Pesquisador	<i>então o primeiro lado mede ... cinco ... o segundo lado mede quanto?</i>
[T4]	Saulo	<i>sete</i>
[T5]	Pesquisador	<i>sete ... isso deu quanto?</i>
[T6]	Toni	<i>doze</i>
[T7]	Pesquisador	<i>doze ... quando eu somo dois lados ... essa soma dá maior ou menor que o terceiro lado?</i>
[T8]	Saulo	<i>menor</i>
[T9]	Toni	<i>menor</i>
[T10]	Pesquisador	<i>menor que o terceiro lado ... nesse caso forma ou não forma triângulo?</i>
[T11]	Aluno	<i>Não</i>
[T12]	Toni	<i>forma</i>
[T13]	Tina	<i>forma não</i>
[T14]	Aldo	<i>não:</i>
[T15]	Pesquisador	<i>e aí ... forma ou não forma?</i>
[T16]	Aldo	<i>forma não</i>
[T17]	Pesquisador	<i>e nesse caso aqui ... o que eu tenho que fazer para saber se forma ou não forma? ((referindo-se a um exemplo citado em outro momento))</i>
[T18]	Saulo	<i>vinte mais dez</i>

- [T19] Pesquisador *eu vou somar quem? ... vinte mais dez ((escrevendo na lousa))*
- [T20] Toni *trinta*
- [T21] Aldo *vai dar de formar não*
- [T22] Tina *vai dar trinta*
- [T23] Pesquisador *deu quanto?*
- [T24] Alunos *TRINTA*
- [T25] Tina *agora eu sei*
- [T26] Pesquisador *trinta é maior ou menor que quinze?*
- [T27] Toni *maior*
- [T28] Saulo *é maior ... então forma triângulo?*  
(...)
- [T29] Pesquisador *[quando eu somei dois lados o valor que eu encontrei foi menor que o...?*
- [T30] Saulo *[três*
- [T31] Pesquisador *terceiro*
- [T32] Saulo *[terceiro*
- [T33] Pesquisador *aqui eu somei dois lados ... eu encontrei o trinta ... é maior ou menor?*
- [T34] Alunos *MAIOR*
- [T35] Pesquisador *então forma triângulo?*
- [T36] Tina *forma*
- [T37] Pesquisador *forma*
- [T38] Saulo *então ele tem que ser ma...*
- [T39] Pesquisador *quando eu somar dois lados o resultado tem que ser maior que o...?*
- [T40] Saulo *que o terceiro lado?*
- [T41] Pesquisador *que o terceiro lado ... porque se eu somar e der menor dá para formar?  
((afirmando com a cabeça))*
- [T42] Saulo *Não*
- [T43] Tina *não*
- [T44] Pesquisador *não*
- [T45] Saulo *entendi agora*

---

Fonte: Dados da pesquisa.

Com esta atividade, e mais algumas do mesmo teor, parece ter ficado claro que os alunos haviam compreendido o problema de como formar um triângulo. Assim, encerrou-se a primeira parte do trabalho com a construção de um discurso inicial sobre construção de triângulos evocada a partir da primeira situação-problema. Passou-se, então, ao trabalho com o gênero textual teorema,

ou seja, com uma narrativa de construção.

O estudo do teorema buscou mostrar suas partes constituintes e, principalmente, o fato de esse gênero estar ligado ao desenvolvimento de outra rotina, a prova. Segundo Sfard (2008, p. 201, tradução nossa), “na matemática as metarregras relevantes são aquelas que governam a atividade de provar”. Um teorema é uma afirmação condicional ou implicativa constituída por uma premissa e uma tese, a sua conclusão, que deve suscitar como ação responsiva uma prova. No caso do discurso matemático literato essa ação pode ser feita por uma demonstração, para o discurso matemático escolar uma prova é mais comumente utilizada. Prova é tomada aqui no sentido trazido por Balacheff (2000), de um processo social pelo qual um discurso que garante a validade de uma proposição muda de explicação para prova ao ser aceito por uma comunidade em dado momento, porém esta posição nunca é definitiva, além de poder ser aceita por uma comunidade, mas também pode ser rejeitada por outra. Tal enfoque visou preparar os alunos para a resolução de situações-problema futuras para que diante de uma hipótese uma prova pudesse ser elaborada, conferindo ao texto da resolução um gênero textual.

A discussão tecida inicialmente levou à conclusão de que um teorema se trata de uma afirmação que, ao contrário da definição (gênero textual já estudado pela turma anteriormente a esse momento), demanda uma prova. A partir de então, foi solicitado que reescrevessem o primeiro texto produzido na descoberta sobre o enigma da construção do triângulo: *“para que um triângulo exista é necessário o quê?”*. Antes de iniciarem a escrita, foi revisado que o triângulo é um polígono fechado de três lados, mas que nem sempre é possível fechar três segmentos de retas. Além disso, foi ressaltado que no processo de formação da figura geométrica o que interessa são as medidas dos lados e não do que um objeto triangular é feito. Desse modo, apenas podem ser chamados de lados os segmentos que de fato formarem triângulo e os que não formarem são apenas segmentos. Para esta produção, os alunos foram orientados a seguirem a estrutura de um texto dado como exemplo de prova.

Finalizada a segunda escrita, foram estudadas as partes constituintes do teorema e mostrada uma configuração gráfica (Figura 2) para o mesmo, devendo conter um nome, hipótese, prova e tese.



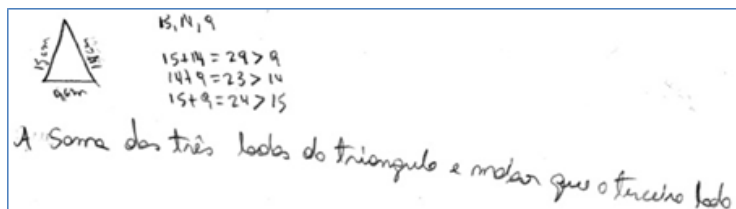
Figura 2 - Configuração gráfica do gênero textual teorema

NOME DO ASSUNTO
Hipótese
Prova
Tese

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada aluno corrigiu, individualmente, o texto de outro aluno a partir de uma grade de correção, que deu origem à primeira refacção. Esta, por sua vez, foi corrigida pelo pesquisador também com base na grade, levando-os à produção final do gênero.

Figura 3 - Produção inicial do gênero textual teorema - Aluno Pedro



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 4 - Produção final do gênero textual teorema - Aluno Pedro

### Condição de existência do triângulo

Se as somas dos dois segmentos for maior que o terceiro segmento, então forma o triângulo.

$\begin{matrix} \text{Sim} \\ \text{Não} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 15, 14, 9 \\ 15 + 14 > 29 > 9 \\ 14 + 9 = 23 > 15 \\ 9 + 15 = 24 > 15 \end{array} \right. \text{esses três segmentos forma um Triângulo}$

$\begin{matrix} \text{Sim} \\ \text{Não} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 5, 3, 9 \\ (a) 5 + 3 = 8 < 9 \text{ Não dá pra formar} \\ (b) 3 + 9 = 12 > 5 \text{ Porque dois segmentos} \\ (c) 9 + 5 = 14 > 3 \text{ juntos é menor que o terceiro} \\ \text{segmento, como mostra (A)} \end{array} \right.$

Portanto, A soma de dois segmentos são maior que o terceiro segmento para formar o triângulo

Fonte: Dados da pesquisa

A produção inicial dos alunos revela uma síntese pontual, como na escrita do Pedro: “a soma dos três lados do triângulo é maior que o terceiro lado” (Figura 3). São mais uma forma de registro de uma descoberta do que uma narrativa que tente assegurar a existência de um fato matemático. Essa pequena síntese mostra a conclusão de um argumento apresentado, uma explicação acerca do que significa o desenho e as inequações escritas a seu lado. Mas, não deixa claro que o fato da soma entre dois lados ser maior que o terceiro é o que garante a existência do triângulo. Isso não é dito no texto e deve ser feita implicitamente pelo leitor.

Expressões como ‘forma o triângulo’ começam a aparecer a partir da segunda escrita, denotando o pensamento condicional de que a existência de algo está relacionada à outra e a preocupação, advinda do estudo do gênero, de explicitá-lo para suscitar uma prova. O texto, então, constituído de uma hipótese, uma prova e uma tese, incorpora elementos que acrescem ao processo de construção do objeto matemático triângulo devido ter os elementos necessários ao endossamento.

Todavia, a solicitação de escrever um texto de acordo com o formato discutido do gênero teorema, mas ainda sem dominá-lo, talvez por ser a primeira experiência, fez com que alguns alunos recorressem aos elementos do contexto de descoberta para assegurar a validade do que estava sendo afirmado e não deixar isso a cargo somente de uma narrativa. Assim, o Pedro escreve, na segunda refacção, como hipótese que *"se um triângulo tem três canudinhos de medidas diferente, então as somas dos três canudinhos têm que ser maior que o terceiro lado para forma o triângulo"*. É como se relacionar o triângulo à soma das medidas de seus lados fosse genérico demais para ser aceito como regra do discurso. Por outras palavras, relacionar uma propriedade do objeto à própria existência do objeto. Assim, exemplificar a situação com algo palpável, os canudinhos de refrigerante, tornaria a narrativa mais plausível por referir-se diretamente ao objeto e não a uma propriedade do mesmo.

Na produção final se percebe que o objeto matemático pode ser considerado como tal e adequado às normas do discurso matemático escolar por adquirir na narrativa as características necessárias ao endosso. A hipótese, *"se a soma dos dois segmentos for maior que o terceiro segmento, então forma o triângulo"* (Pedro, Figura 4), é acompanhada de um exemplo e um contraexemplo, ou seja, há a preocupação em refutar possíveis argumentos em contrário. Cada um dos cálculos é seguido de uma explicação, *"não dá para formar porque dois segmentos juntos é menor que o terceiro segmento, como mostra (A)"* (Pedro, Figura 4), indicando a conclusão chegada com eles e conferindo maior grau de textualidade ao texto.

De um modo geral, com as reescritas há um progressivo enriquecimento do uso do vocabulário, principalmente em como as palavras são utilizadas e em como são relacionadas ao uso de mediadores visuais. O uso mais expressivo pode ser apontado para o termo 'segmento', para referir-se ao que poderia vir a ser o lado do triângulo, associado a mediadores icônicos e algébricos. Essa coerência no uso de tais ferramentas, bem como não mais o uso de palavras do contexto físico, como o termo 'canudinhos', apontam para uma objetificação na construção do objeto triângulo. Este objeto passa a ser isomórfico à narrativa criada sobre um de seus subcomponentes, a condição de existência. Esta, por sua vez, é também uma narrativa fechada, atemporal, composta por termos substantivos numa sequência do tipo: soma, dois segmentos, maior que, terceiro segmento, é um triângulo.

Essa evolução na escrita veio acompanhada de intervenções específicas entre uma refacção e outra. A partir da correção de cada texto, os problemas encontrados, tanto os de escrita quanto os conceituais, eram discutidos numa tentativa de solucioná-los. Foi assim que boa parte dos alunos conseguiram avançar qualitativamente na produção do gênero e na compreensão do conteúdo veiculado pelo mesmo, adentrando cada vez mais nas camadas do discurso sobre triângulos.

**Produção textual e objetificação do discurso matemático escolar**

As atividades discursivas desenvolvidas foram conduzidas em duas etapas. A primeira tratou de buscar respostas para situações-problema por meio da interação entre pesquisador e alunos, alternando entre interação face a face e mediada por objetos físicos. A segunda buscou aperfeiçoar na escrita as descobertas feitas na etapa anterior, tratou dos módulos de reescrita dos gêneros textuais. Nas próximas seções se apresentam algumas conclusões.

**Reescrita de narrativas como etapa de uma exploração**

Para Sfard (2008), as explorações são o tipo de rotina desejável para o trabalho com o desenvolvimento do discurso matemático escolar. As atividades foram projetadas para os alunos almejem esse tipo de rotina. Todavia, segundo a autora, nem sempre quando há esta intenção por parte do professor é de fato o que os alunos realizam. Às vezes, o que para o professor é uma exploração, para o aluno é um ato, como mostra o Exemplo 1.

Exemplo 1. - Interpretação de um excerto (T30-T44) do Episódio 1

	Turno	Fala	Condições de aplicabilidade
[T30]	Pesquisador	<i>esse daqui tem três triângulos ... dá para formar esses três triângulos com os canudinhos do grupo um?</i>	Pista
[T31]	Alunos	<i>dá</i>	Adesão imediata
[T32]	Pesquisador	<i>três triângulos? ... esses não são os mesmos triângulos não? esse aqui não é o mesmo triângulo não?</i>	Reformulação da pista

[T33]	Levi	<i>é</i>	Adesão imediata
[T34]	Aldo	<i>é professor ... girado</i>	Justificativa
[T35]	Pesquisador	<i>oi?</i>	
[T36]	Levi	<i>é girado professor</i>	
[T37]	Pesquisador	<i>se você girar ele vai deixar de ser triângulo?</i>	Adequação da pista à justificativa
[T38]	Aluno	<i>não ((mais de um aluno))</i>	Adesão imediata
[T39]	Pesquisador	<i>olha esse triângulo bem aqui ... se eu fizer assim ... ((girando na mão um triângulo feito com palitos de picolé)) ele deixou de ser o mesmo triângulo?</i>	Adequação da pista à justificativa
[T40]	Aluno	<i>não</i>	Adesão imediata
[T41]	Pesquisador	<i>e se eu fizer assim? ... e assim? ((girando o triângulo))</i>	Adequação da pista à justificativa
[T42]	Aluno	<i>não</i>	Adesão imediata
[T43]	Pesquisador	<i>continua sendo o MESMO...</i>	Formulação de uma narrativa
[T44]	Aluno	<i>triângulo</i>	

---

Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se dizer que a rotina do exemplo acima, como em boa parte das demais desenvolvidas na pesquisa de campo, foi um ritual e duas evidências são centrais para esta percepção.

A primeira é o fato de as condições de aplicabilidade da regra serem altamente situadas. Os alunos mostravam limitações quanto a encontrar no contexto das situações-problema as regras para orientarem suas ações e ficavam condicionados às pistas oriundas das perguntas feitas pelo pesquisador e das respostas dadas pelos próprios alunos, dentre outras restrições.

A segunda é quanto ao encerramento da rotina. Quase sempre os alunos: (i) não mostravam preocupação em produzirem algum tipo de narrativa para o que faziam; (ii) realizavam mudanças em seus desenhos, não como transformação direta nestes, mas por indicações do pesquisador; e (iii) respondiam com palavras curtas ao que era perguntado na tentativa de manter uma ligação com o pesquisador.

Embora se buscasse que os alunos construíssem narrativas, os textos que se obtinham eram, pode-se dizer, narrativas não finalizadas, no sentido de

ainda não apresentarem elementos minimamente necessários ao seu endosso. Estas, assim designadas por serem parciais, mais anúncios orais de descobertas do que orações completas escritas constituindo o resultado de uma investigação, ensinaram o trabalho com a escrita dos gêneros textuais. O trabalho de reescrita de narrativas de construção até assumirem a configuração de gênero textual é uma importante metodologia para levar à produção de narrativas consistentes e com as características do discurso matemático escolar. Chega-se, portanto, à percepção da *reescrita de narrativas como etapa de uma exploração*.

Tal conclusão contribui com as proposições de Sfard (2008). Para a autora, apenas atos e explorações culminam com produção de narrativas, mas somente em explorações há narrativas de construção, ou seja, há a produção de objetos matemáticos enquanto objetos discursivos. A refacção nas performances de ação pode levar o aluno a deslocar sua atenção também para a narrativa e não somente para as condições de aplicabilidade, possibilitando ao objeto primário produzido tornar-se objeto discursivo a partir do aperfeiçoamento da escrita da narrativa, antes secundária. Nas performances de exploração, a narrativa seria aperfeiçoada adquirindo nuances de gênero. Em ambas a metodologia de produção do gênero por módulos leva o aluno a ir especializando-se em produzir os textos do discurso matemático, que, ressalta-se, são por natureza escritos. Reescrever progressivamente até o texto adquirir uma configuração de gênero será uma nova descoberta para o aluno, pois a produção de regras em nível de objeto não se fixa como tal apenas com a delimitação das condições de aplicabilidade.

Portanto, a reescrita das narrativas se constitui em um processo de exploração interno às rotinas à medida que os alunos aperfeiçoam a produção oral inicial tanto para atos quanto para explorações. A partir disso os atos podem ser transformados em explorações, pois se “uma rotina discursiva conta como um ato quando o discurso daquele que a implementa é totalmente objetificado e quando do seu ponto de vista, a rotina é uma de produzir objetos ao invés de narrativas” (SFARD, 2008, p. 255, tradução nossa), então o foco no estudo das narrativas por meio de refacções pode fazer com que elas deixem de ser secundárias e assumam a importância devida na produção de objetos matemáticos.

## Continuidade do discurso por etapas

O processo de produção de narrativas com base na sua reescrita instrumentaliza, de certo modo, as proposições de Sfard (2008) sobre maneiras de fazer o aluno progredir no discurso matemático escolar. Para ela, uma boa estratégia é utilizar-se do que o aluno já sabe e ampliar esse repertório para que ele seja capaz de comunicar-se cada vez mais sobre questões mais complexas do discurso matemático. Trata-se da continuidade do discurso. Nesse sentido, a produção de gêneros do discurso matemático escolar por módulos de reescrita favorece uma *continuidade do discurso por etapas*.

Com o processo de reescrita a descoberta inicial foi sendo aperfeiçoada à medida que os módulos de reescrita foram sendo trabalhados. Neles, os problemas apresentados com a escrita parcial revelavam também certas imperfeições na constituição do objeto matemático que não eram, a priori, percebidos pelos alunos. Desse modo, os alunos puderam identificar padrões discursivos que eram tanto descobertas sobre o mundo como também formação destes padrões por meio de narrativas que criam as regras desse discurso. É um exercício necessário para compreender-se e dominar-se progressivamente as ferramentas recursivas desse discurso autopoiético.

Em cada um dos módulos de reescrita as refacções foram acompanhadas de discussões sobre as condições de aplicabilidade. Para que o texto reescrito pudesse ganhar feições de gênero textual próprio do discurso matemático escolar tais condições ganharam riquezas de detalhes e aumentou a percepção dos alunos sobre o que estudavam. Assim, pode-se dizer que cada um dos módulos se constituiu em uma etapa de aprendizagem do discurso sobre triângulos pelo aluno, de modo que a continuidade do discurso se deu não somente pelo que o aluno já sabia sobre tópicos do discurso matemático escolar ao começar o estudo, como sobre triângulos, mas também a partir de cada uma das refacções.

Para Sfard (2008, p. 202, tradução nossa), “a modificação gradual das metarregras que regem o discurso matemático do estudante é uma das metas do aprendizado escolar”. Essa modificação gradual acontece e é também consequência das atividades relacionadas aos módulos de reescrita, garantindo a continuidade do discurso.

## **Produção ritualizada de gêneros textuais do discurso matemático escolar**

Segundo Sfard (2008), além da continuidade do discurso, prerrogativa para fazer-se o aluno avançar rumo a camadas mais profundas do discurso matemático escolar, a autora também afirma que os começos ritualizados são em algumas situações uma etapa necessária. Para ela, o ritual é um estágio natural do processo de desenvolvimento da rotina e revela o caráter inerentemente social do conhecimento e aprendizado humano.

Sfard (2008) argumenta que a individualização de metarregras ocorre pelo engajamento da pessoa em um discurso cujas regras já estão postas. Não é extraordinário, portanto, que as primeiras incursões da pessoa nesse discurso ocorram por imitação, principalmente pelo reconhecimento de que o seu interlocutor é mais familiarizado com tais metarregras e de que elas têm um uso historicamente privilegiado. Os rituais são necessários, inclusive, para aquelas situações de performance de atos. Sem saber as vantagens da nova rotina como alternativa aos atos, como verificar a formação de figuras com uso de canudinhos ao invés de tentar descobrir padrões entre as medidas dos segmentos, os alunos seguem as novas metarregras e somente posteriormente, com usos dela, será reconhecida sua utilidade.

Reescrever as narrativas de encerramento por meio de módulos revelou uma *produção ritualizada de gêneros textuais do discurso matemático*. As rotinas performadas como atos pelos discentes os levaram a produção de narrativas incompletas, parciais, principalmente por serem orais. Merece relevo o fato de tais narrativas não finalizadas terem esse caráter por serem enunciadas em situações de interação face à face em que os vários elementos presentes no ambiente, como gestos, entonação da voz, dentre outros, servirem de recursos auxiliares ao endossamento da mesma. Para o aluno, a rotina pôde ser encerrada, uma vez que para ele está claro ter demonstrado ao pesquisador a compreensão do assunto.

Para o aluno não há uma razão aparente para ficar-se escrevendo e reescrevendo as narrativas. É somente com o desenrolar dessa metodologia que ele vai compreender, talvez não conscientemente ou de imediato, que por ser um discurso autossustentado as razões de escrever uma narrativa se justifica em função do próprio discurso, no caso do discurso matemático escolar – no discurso matemático cotidiano as razões são outras –, e que constituídas como uma narrativa fechada se produz ferramentas para, dentre outras razões, resolver

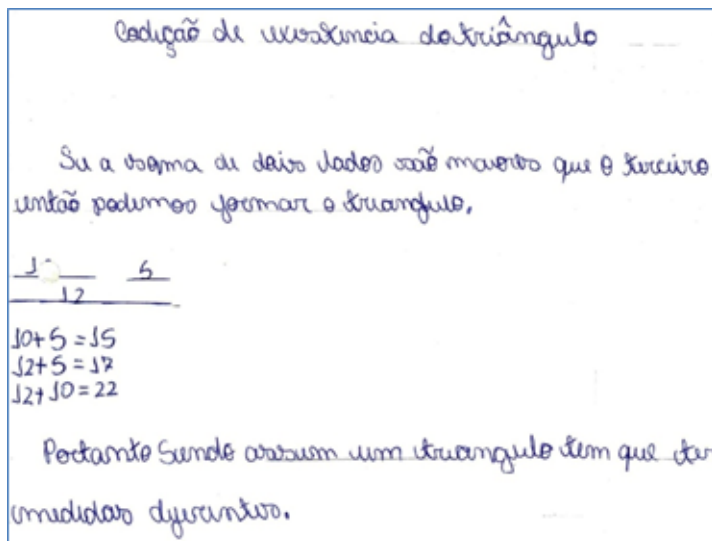


situações-problema.

A primeira refacção dos textos aponta para uma tomada de consciência do aluno da incompletude do que escrevera. Nesse momento, a reescrita não foi balizada por uma grade de correção, de modo que os critérios que o aluno dispunha para guiar a correção advieram da observação feita em outros textos do gênero. Interessante notar que diante dessas observações e discussões das características dos gêneros textuais os alunos perceberam de imediato a necessidade de aperfeiçoarem seus textos.

A partir das atividades do segundo módulo as refacções começam a apresentar traços de uma escrita ritualizada.

Figura 5 - Produção final do gênero textual teorema - Aluna Laura



Fonte: Dados da pesquisa.

Como diz Sfard (2008, p. 202), "os usos discursivos do professor são supostamente privilegiados, e conseguir dominar este privilegiado tipo de discurso é o objetivo oficial da aprendizagem". Os alunos, conscientes dessa condição, o que não se restringe ao discurso matemático escolar, repetiram o uso de termos sem necessariamente dominá-los, sem saberem os efeitos de sentido de uma oração com ou sem eles, como o exemplo da Figura 5.

Nota-se na narrativa produzida pela aluna o seu esforço para adequação de sua narrativa às características do texto estudado, um teorema. Uma evidência é que ela repete duas conjunções conclusivas (portanto, sendo assim), sem perceber, provavelmente, a redundância. Além disso, ao que parece, essa tentativa se sobrepõe às preocupações com a validade da conclusão chegada que, no caso da aluna (Figura 5), não está correta.

A ausência de mais experiências com a escrita destes gêneros não permitiu aos alunos dominá-los de uma maneira menos ritualizada. Contudo, esse contato inicial melhorou consideravelmente o trabalho dos alunos na produção de narrativas como condição de encerramento de rotinas de ação e que em atividades posteriores potencializou o uso delas para resolver situações-problema. Dizendo de outro modo, o processo de construção de narrativas pela escrita e reescrita permitiu individualizarem regras do discurso sobre triângulos e usá-las, posteriormente, com mais propriedade como narrativas de relembrar.

A circularidade do discurso matemático, a de produzir narrativas que justifiquem a si mesmas como objetos desse discurso, mostra-se uma dificuldade a ser transposta no trabalho com o ensino dos gêneros textuais do discurso matemático escolar. A situação inicial da produção (NOVERRAZ; SCHNEUWLY; DOLZ, 2004) apresenta certa complexidade devido ser difícil encontrar alguma razão que justifique a produção de textos não exceder o próprio discurso, ou seja, a necessidade de endossamento por meio de regras internas a esse discurso e que uma vez endossadas se tornarão regras para substanciar outras narrativas.

É importante destacar que as refacções não visaram somente à produção de um texto coerente e bem estruturado aos olhos do pesquisador. Mais do que isso, o processo de reescrita implicou, gradativamente, a percepção da necessidade de organizar o pensamento. Em síntese, estruturar numa sequência lógica as conexões feitas ao performar determinada rotina, uma forma de organizar as conclusões e descobertas e o raciocínio que as orientou.

## **Considerações Finais**

A pesquisa de que trata este capítulo buscou compreender como a produção textual nas aulas de matemática pode ajudar os alunos a aperfeiçoarem suas habilidades para participação no discurso matemático escolar. No âmbito deste interesse permeiam indagações quanto à compreensão de como o

aperfeiçoamento das habilidades em produzir gêneros textuais do discurso matemático escolar pode contribuir para uma ação que envolve a exploração por parte do aluno em rotinas desse discurso.

No que se refere à compreensão da relação entre produção textual com a performance dos alunos em certas rotinas do discurso matemático escolar se pode dizer que o foco na produção de narrativas ao final das atividades propiciou a eles perceberem que um texto deve ser produzido. Trata-se de construir uma preocupação em encerrar a rotina com a produção de um texto escrito mesmo que nem sempre este aluno realize uma ação ou exploração. Insistindo em propiciar atividades deste tipo, se vislumbra a criação de um hábito com a produção textual própria do discurso matemático que futuramente dará mais condições de o aluno realizar rotinas de exploração. Em outras palavras, possibilitar a ele não ritualizar suas ações ou realizá-las como atos.

Outra conclusão é que a produção textual integrada a rotinas das aulas de matemática ameniza o hiato entre produção oral de narrativas e uso delas na escrita. As narrativas produzidas oralmente pelos alunos em momentos em que o professor aborda o assunto possui pouco dos elementos que permitem a elas se tornarem endossáveis. A primeira escrita tende a revelar-se mais um procedimento de registro, um lembrete, do que a produção de um texto com elementos minimamente necessários a um processo de endosso. Com as refações, a produção assume gradativamente a configuração de um gênero textual e o objeto matemático vai sendo delineado. A familiarização com os gêneros favorecerá a consecução de rotinas de exploração devido aos esforços do aluno centrar-se também no conteúdo do texto, nos aspectos cognitivos envolvidos na produção da narrativa.

Merece destaque, nesse contexto, a importância da reescrita dos textos. Entre uma refação e outra, a correção do texto pelos próprios alunos lhes conferem o status de endossador de narrativas. Cabe a ele nessas atividades aprovar ou não o texto de terceiros. Dentre outras contribuições, permite ao aluno um estudo do gênero ao mesmo tempo que se apropria do conteúdo veiculado pelo texto, pois analisar a produção de terceiros promove a autorreflexão, um aprendizado de forma autônoma.

Para finalizar, provisoriamente, esta discussão, pode-se dizer que é possível escrever bem aprendendo matemática e que um método favorável a uma aprendizagem desse tipo é o ensino de gêneros textuais do discurso matemático escolar por meio de estratégias didáticas por módulos de escrita e reescrita.

## Referências

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Trad. Pedro Gómez). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2000. Disponível em < <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document> >. Acesso em: 15 maio de 2021

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

LEE, C. **El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas**. Madrid: Ediciones Morata, 2010.

LUERS, A. **The group structure of the pyraminx and the dodecahedral faces of M12**, Usna Honoris Tesis, 1997. Disponível em: [http://web.usna.navy.mil/~wdj/m\\_12.htm](http://web.usna.navy.mil/~wdj/m_12.htm). Acesso em: 15 maio de 2021.

MARCUSCHI, L. **Produção textual, análise de gêneros e compreensão**. São Paulo: Parábola Editorial, 2008.

MATH GOODIES... **Circumference of a Circle**. Disponível em: <http://www.mathgoodies.com/lessons/vol2/circumference.html>. Acesso em: 15 maio de 2021.

MORGAN, C. **Writing mathematically: the discourse of investigation**. London: Falmer Press, Taylor and Francis Group, 1998.

NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. In: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. (Orgs). **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas: Mercado de Letras. p. 81-108, 2004.

PIMM, D. **El lenguaje matemático en el aula**. Madrid: Ediciones Morata, 2002.

RIPARDO, R. B. **Escrever bem aprendendo matemática: tecendo fios para uma aprendizagem matemática escolar**. 314 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

SFARD, A. **Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

## **Autor**

**Ronaldo Barros Ripardo**

Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará

E-mail: [ripardo@unifesspa.edu.br](mailto:ripardo@unifesspa.edu.br)

## Capítulo 10

# ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DE VIDEOAULAS: UM OLHAR PELA PERSPECTIVA DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

*Luiz Carlos Leal Junior  
Egídio Rodrigues Martins  
Cecília Pereira de Andrade*

O movimento de estudantes buscando por videoaulas em redes sociais tem se mostrado como acontecimento e recurso para se aprender matemática. O professor que ensina Matemática torna-se um sujeito deste movimento quando indica ou discute os desdobramentos do mesmo em sala. Os efeitos disso podem ser observados em resultados ou critérios avaliativos. Trata-se de algo relacionado a processos de fragmentação e desmantelamento dos modos de ensino tradicionais vigentes em nossas escolas. Por meio de uma Análise de Discurso de cunho arqueogenealógica procura-se compreender, atritar, compor e tensionar os mecanismos que se colocam como propulsores dessa nova forma de se ensinar e aprender Matemática na atualidade. Este trabalho mostra-se como um recorte de um projeto de pesquisa atual, que se vincula e analisa-se seus efeitos nesse meio inovador sob olhares da prática docente, a qual se apresenta em alguns fatores condizentes e críticos pelo qual tantos alunos quanto professores vêm a procurar e trabalhar nesse ambiente.

*Palavras-chave:* Matemática em Redes Sociais. Prática Docente. Videoaulas de Matemática. Ensino e Aprendizagem de Matemática. Arqueogenealogia.

## Introdução

Os avanços tecnológicos têm apresentado um progresso significativo para os processos de ensino e de aprendizagem, ainda mais neste contexto de ensino emergencial, híbrido e/ou remoto instaurado em nível global devido à pandemia de COVID-19. Nunca foi tão necessário repensar as práticas que se estabeleciam no cenário educacional como na atualidade. Este artigo fora escrito num período anterior à pandemia e, por este motivo, muitas de suas considerações se dão, não visando a uma análise sobre esta nova proposta de ensino, mas tensionando aquela tradicional da escola. Contudo, ainda é possível traçarmos algumas paralelas ao tema e ligar ao que hoje vivemos na processualidade de ações educativas. Isso porque os professores, hoje em dia mais do que antes, precisam contar com recursos tecnológicos e redes sociais para atender a demanda do que deve ser ensinado e, neste caso, analisamos os processos que dizem respeito à Matemática.

Este trabalho se desdobra a partir de Leal Junior *et al.* (2018) e Martins *et al.* (2019), ambos do Grupo de Pesquisa de Educação, Matemática e Subjetividades – GPEMS – quando eles buscaram olhar para os motivos que conduziam alunos a buscarem por videoaulas, enquanto este foca a perspectiva do docente e das práticas relacionadas. Muitas práticas educacionais e docentes voltadas à formação do estudante estão também, e equivocadamente, pautadas apenas pela formação para o mercado de trabalho ou ingresso em um programa de formação profissional, negligenciando, em muitos casos, uma formação para a vida, uma formação omnilateral<sup>18</sup>. Tais práticas não possibilitam que o aluno se perceba como um sujeito social, cultural e histórico, nem ao menos permitem ao mesmo que se perceba em sua singularidade e em sua subjetividade.

Diante dos trabalhos analisados como referencial teórico, percebemos que as aulas de Matemática são aquelas que apresentam maiores problemas com dificuldades de aprendizagem e as quais possuem maior procura por apoio ou reforços. Isso, porque ela ainda carrega um estigma de componente curricular de

---

<sup>18</sup> Termo também encontrado em dicionários como onilateral, relativo a todos os lados ou todas as dimensões. Este termo advém como um adjetivo ao conceito de Omnilateralidade, que tem sido bastante trabalhado em pesquisas voltadas à Educação Profissional e Tecnológica, onde a base dos estudos seja o Materialismo Histórico-Dialético e também em outros referenciais. Este conceito se refere a uma formação em todos os campos que permeiam a vida humana, como promovendo uma formação não apenas voltada ao mercado de trabalho, mas para a vida. Ele se refere a uma formação humana oposta à formação unilateral provocada pelo trabalho alienado, pela divisão social do mesmo e por qualquer estratificação da sociedade e os processos de subjetivação.

maior complexidade. De acordo com Leal Junior (2018), grande parte do nosso ensino de matemática ainda está amarrado a estruturas rígidas, como resolução de problemas e exercícios descontextualizados e poucas interações com conceitos ou ciências de outra natureza. E precisa avançar sobre essa perspectiva, além de reconhecer os avanços e ferramentas da atualidade que podem ser agregadas ao ensino de Matemática.

Isto ainda é reflexo de uma concepção de ensino conteudista, tradicional e enciclopédico, que por si só está defasada, e acaba por não atender as demandas sociais e muito menos a formação desejada para o estudante. Trata-se de uma concepção de ensino que ainda está amarrada a perspectivas de outrora, as quais negligenciam os avanços tecnológicos e culturais. As bases desse ensino ainda repousam sobre o estruturalismo, o behaviorismo (comportamentalismo), a Gestalt e pretendem-se cognitivista. Não estamos negando estas raízes epistemológicas do ensino, mas questionamos a forma como ainda hoje ele é praticado, posto que os referenciais supracitados já apontaram que os alunos estão buscando aprender em processos que vão além da prática tradicional de ensino, e que seus princípios e pressupostos precisam ser repensados. O que se tornou evidente no cenário da pandemia

Esta visão estruturalista perpetua-se quando propõe, através de políticas educacionais (parâmetros ou bases), a Matemática como uma visão de linguagem ou de ferramentas ou técnicas para resolver problemas. Onuchic e Leal Junior (2016) e os trabalhos arrolados acima apontam que a Matemática da sala de aula está distante daquela Matemática praticada no meio social, nas ruas, e é estabelecida reduzindo-a às atividades (não práticas educacionais) de resolução de problemas ou propostas de exercícios mecânicos. Tais concepções são constituintes da Matemática, mas não a limitam, posto que podemos ter matemática em outros campos que não o da Resolução de Problemas, como a modelação e/ou modelagem, a conceitualização, a teorização, a revisão, a linguagem, a interpretação de problemas e resultados, a computação, a Matemática Aplicada dentre tantos outros que não se restringem a resolução de problemas.



## Problematizando e ensaiando

Segundo Leal Junior e Andrade (2016), essa visão tecnicista, conteudista e defasada ainda é fruto de um sistema de ensino tradicional, inadequado aos avanços sociais e justifica-se pelo condicionamento de estudantes a meros resolvedores ou solucionadores<sup>19</sup> de problemas que restringem a potencialidade de aprendizagem a meras aplicações de fórmulas e não conseguem pensar de forma inovadora e nem criticamente acerca dos problemas e conceitos. Nessa visão, relacionam-se idiossincraticamente as relações humanas de professores e estudantes a questões burocráticas com finalidade de integração, onde os interesses organizacionais vêm com mais força, ou seja, as relações que podem surgir de interações humanas na sala de aula ficam à mercê de tempo de aula, currículo, avaliação, calendário escolar etc.

Raros são os casos de organizações dentro do sistema educacional brasileiro em que se tenha um sistema de ensino com coexistência de tendências diferenciadas, e há vários motivos para isso. No geral, unem-se as partes e obtém-se um padrão que se pretende geral no desempenho escolar, o que é bastante característico de um mecanismo pautado pela psicologia estruturalista, ainda vigente, no sentido de ignorar o comportamento ou desempenho individual de cada estudante quando o sistema olha apenas para o todo (VERÍSSIMO, 2017).

Portanto, é mister que pensemos, sobretudo, eixos em torno do que é e do que pode ser ensinar, e do que é e do que pode ser aprendido ao longo do processo de subjetivações que tomam espaço dentro do cenário escolar e possa-se olhar para elementos como currículo, avaliação, grade, componentes curriculares, projetos, multidisciplinaridade e práticas educativas, por exemplo, a partir dos sujeitos que compõem este cenário, e o que temos feito além do que o sistema nos impões para desconstruir este status quo. Além disso, também pode-se pensar o que potencializamos reconstruir com os restos dessa desconstrução e com novos elementos que podemos trazer para nossa prática em sala de aula de Matemática.

---

<sup>19</sup> Os termos resolvedores e solucionadores podem ser sinônimos em muitos contextos, mas no bojo de estudos acerca de Resolução de Problemas, enquanto práticas educativas em Matemática, estes termos possuem conotações diferentes. Isso se deve à sua própria etimologia, uma vez que solucionador está ligado ao substantivo solução, resposta final que é o mote do problema e independe do processo utilizado. Por sua vez resolvidor se refere a resolução, que não se dá apenas por uma resposta final, mas perpassa um processo de resolução até chegar a uma ou mais respostas (LEAL JUNIOR, 2018).

Outrossim, pode-se perceber que muito do que se vivencia em aulas de Matemática tem raízes na teoria comportamentalista (behaviorista). Como diz Leal Junior (2018), o ensino de Matemática parte do pressuposto de que o comportamento dos estudantes é um reflexo das atividades propostas e, por sua vez, é passível de modelação, o que se caracteriza como uma visão equivocada de ensino, pois ignora processos de subjetivação e procura enquadrar os mesmos em padrões de desempenho que foram baseados em estudos de fatores ambientais (estímulos) e o comportamento observável (respostas) para situações de outro tempo e outro espaço. O que causa um movimento diferenciado dos estudantes em busca de aprender, uma vez que outros elementos que não estavam na constituição daquele pressuposto, hoje tornam-se indiscutivelmente presentes nas vidas das pessoas, como as redes sociais, ideia essa corroborada pelo trabalho de Tourinho (2011).

Essa concepção ainda pauta e orienta as aulas e o ensino de Matemática, de forma que reconhece fatores hereditários do desenvolvimento dos sujeitos, mas acredita-se que o cenário escolar, o treinamento e o comportamento dos estudantes, aliados aos traços de personalidade fazem com que os estudantes aprendam, o que não pode ser garantido, porque nesta esteira, Leal Junior e Andrade (2016) pregam que o aluno pode adquirir habilidades técnicas e competências em Matemática, mas não se pode garantir a aprendizagem, já que nem tudo que é ensinado é aprendido, a aprendizagem não acontece apenas no tempo e no espaço da escola e, sobretudo, não se apenas o que nos é ensinado. Aliado a isso, eles enfatizam:

[...] o aprender como processo, como passagem, como acontecimento, acontecimento no pensamento. Essa perspectiva é esclarecedora em relação ao aprendizado [...] em toda Matemática, na qual o estudante deve colocar seu desejo no processo de aprender e vivenciar o acontecimento, relacionar-se efetivamente com os signos através dessa disciplina e todo o trajeto trilhado nesta passagem (LEAL JUNIOR; ANDRADE, 2016, p. 559).

As bases desta perspectiva do início do século passado podem ser percebidas até hoje no ensino de Matemática, quando se utiliza métodos objetivos, como observação, experimentação e testagem para condicionar os estudantes em “bons resolvidores de problemas”, e não valorizando a introspecção. Isso aponta para o que Skinner (2003) chama de condicionamento operante, o qual não acontece automaticamente e que perpassa o estabelecimento de conexões

visando a aprendizagem, o que se dá por meio de processos de estímulo-resposta ou tentativa e erro, através de reforços positivos ou negativos e punição.

Os reforços positivos podem ser percebidos como um elogio, um presente, uma nota alta, um conceito bom ou qualquer coisa que reforce uma resposta desejada. Os reforços negativos consistem na retirada de consequências indesejáveis. Já a punição pode ser algo ruim, uma vergonha, uma nota baixa, uma reprovação etc, algo bastante evidente em nosso sistema, quando os alunos que não conseguem “aprender” o que é ensinado são punidos. Sobre este assunto indicamos a leitura de Skinner (2007), Faria e Nuñez (2004) e Vasco (2015). Isso porque nosso sistema reforça a ideologia de um ensino que prima pelo que deve ser ensinado, ao invés do que pode ser aprendido.

Este ensino tradicional com bases no estruturalismo e no comportamentalismo concebe o ensino e a aprendizagem em Matemática num esquema de estímulo-resposta, com uma idiosincrasia que a academia tem refutado há muito tempo, como um processo do desenvolvimento de reflexos condicionados que se obteriam substituindo os estímulos não condicionados por estímulos condicionados, ou seja, resolvendo problemas poder-se-ia aprender conceitos matemáticos. A aprendizagem e a interação social relacionada sempre serão resultadas do estímulo e da forma como o sujeito age e reage com o mesmo.

Essa discussão se faz pertinente para mostrar que as bases que estão engessando, engendrando e dirigindo o ensino de Matemática da atualidade tem deixado lacunas que os próprios alunos têm questionado e, prova disso é o movimento de resistência que fazem contra esta proposta enciclopédica, como evidenciado por Martins *et al.* (2019). Assim, nesta mescla de pressupostos insuficientes para dar conta da demanda por uma configuração humanística de ensino, podemos também evidenciar pontos da Gestalt que permeiam o ensino de Matemática e reforçam práticas de resolução de problemas em aulas de Matemática. Outrossim, espera-se que a percepção dos estudantes não se dê por pontos isolados dos problemas, mas no todo de conceitos que constituem os mesmos.

A aprendizagem seria dada por *insight*<sup>20</sup> ou revelação, o que chamamos de acontecimento no pensamento. Ela vem a ser, também, um processo de desenvolvimento que é explicado pela maturação do sistema nervoso e das estruturas perceptuais que o sujeito traz consigo desde seu nascimento. Uma organização (súbita) do seu campo perceptual a fim de configurar sempre uma totalidade. *Insight* este que ocorre quando se percebe a relação entre o estímulo e o campo, posto que se dá enquanto e pela instauração de campos problemáticos. Nesta perspectiva, já se pode perceber uma dissociação dos conceitos de ensino e de aprendizagem.

Para uma aprendizagem eficaz, o ensino deve partir das possibilidades e necessidades dos alunos e não da matéria, no que especificamente está estabelecido para aquele momento, necessitando haver, com isso, um rearranjo dos conteúdos. O professor deve, pois, criar situações de ensino de modo a propiciar aprendizagens que realmente tenham sentidos para os alunos. (PILETTI; ROSSATO, 2011. p. 42)

Na esteira das discussões propostas pelas referências supracitadas, pode-se evidenciar que o problema em se engessar o ensino por práticas não atuais ou que tragam elementos atuais àquelas teorias de outrora é incorrer no erro de propor ao aluno conteúdos que não lhe fazem sentido, que eles não conseguem ressignificar e produzir um conhecimento que lhe seja efetivo. No tocante à Matemática, para que haja aprendizagem, ou seja, para que os *insights* ocorram devem ser levados em consideração os fatores subjetivos e objetivos, os dados devem estar presentes e serem sempre apresentados de forma a proporcionar o entendimento. O sujeito deve estar disposto a resolver o problema ou entender a questão e, desta forma, o *insight* ocorre (LEAL JUNIOR, 2018; PILETTI; ROSSATO, 2011).

Entretanto, não há como ter garantias de que haja tais percepções, disposições e motivações. Essa perspectiva leva em conta o fato de o aluno estar na aula já motivado, como se o cenário fosse quase sempre favorável a ter alguma

---

<sup>20</sup> *Insight* é um conceito muito relevante tanto na Psicologia da Gestalt quanto em práticas metodológicas de Resolução de Problemas. Leal Junior (2018) aponta que esta última trabalha o termo *insight* a partir de elementos da Gestalt mas não fica a ela restrita. Este termo indica a apreensão da essência ou da verdadeira natureza de algo, alguma coisa, algum conceito, através de uma compreensão intuitiva ou percepção através dos sentidos ou pensamento. Para Piletti e Rossato (2011) a palavra também remete para uma visão ou ideia mental, ou até discernimento que permite aos sujeitos a visualização, pensamentos, capacidades, habilidades de perceber situações ou verdades que estão escondidas, não tão evidentes ou até subliminares.

aprendizagem mediante o ensino. O que é bem discutido nos trabalhos até aqui arrolados. O que entra em foco é que o aluno passa a não perceber sentido nem na resolução de problemas nem na Matemática, e, tampouco, consegue compreender os significados da Matemática escolar. A esse respeito, Carraher, Carraher e Schliemann (1988) consideram que:

O problema perde o significado porque a resolução de problemas na escola tem objetivos que diferem daqueles que nos movem para resolver problemas de matemática fora da sala de aula. Perde o significado também porque o que interessa à professora não é o esforço de resolução do problema por um aluno, mas a aplicação de uma fórmula, de um algoritmo, de uma operação, predeterminados pelo capítulo em que o problema se insere ou pela série escolar que a criança frequenta (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1988, p. 22).

Muitas outras correntes epistemológicas poderiam ser arroladas aqui, como a psicanalítica, a cognitivista e a humanista, mas fizemos estas considerações teóricas para mostrar que o cenário e seus aparelhos têm se mostrado defasados e carecem ser repensados no que tange ao ensino de Matemática. Posto que sua essência pode ser quaisquer uma daquelas correntes, porém precisa avançar e reconhecer que muito se evoluiu e muito há para ser acrescentado, e que uma forma diferenciada de ensino e práticas docentes precisam emergir. E reconhecer a influência das tecnologias, das redes sociais e dos avanços em novas perspectivas educacionais é um dos passos para efetivar esta necessária transformação educacional.

A seguir, expressamos algumas ideias relacionadas a Teorias e Escolas Epistemológicas e da Psicologia que podem ser percebidas através de suas influências em práticas de ensino e da pesquisa da atualidade que, muitas vezes, são efetivadas de forma superficial sem conhecimento próprio de seus praticantes como professores que trazem suas crenças e filosofias de vida para seu trabalho, ou de outros profissionais que simplesmente reconhecem alguns princípios e pressupostos e procuram aplicá-los, sem ao menos procurar entender as misturas de propostas e de incoerências que se manifestam nos cenários educacionais e de pesquisa, como já apontaram Leal Junior (2018), LeFraçois (2016), Coll *et al.* (2008) e Cosenza e Guerra (2011), com quem temos dialogado e trazemos um deslocamento conceitual, aqui, para o campo da Educação Matemática acerca da aprendizagem.

O Quadro 1, a seguir, apresenta um resumo sobre algumas perspectivas em Educação Matemática que dialogam com a psicopedagogia e a neuropsicologia acerca de princípios e pressuposto sobre aprendizagem que ainda baseiam as práticas educacionais na atualidade.

Quadro 1 - Resumo de algumas perspectivas voltadas à Educação Matemática

(continua)

A aprendizagem depende da maturação, experiências e crescimento. Ela é uma capacidade que se coloca em ação todos os dias para responder de forma adaptada às solicitações, aos desafios e aos problemas que se levantam devido as interações com o meio.	
<b>Teoria Comportamentalista (behaviorista)</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• O conhecimento será aprendido a partir de associações;</li><li>• Repetição constante e reforçamento, práticas comuns em Matemática, implicam em aprendizagem;</li><li>• Prima por formação técnica e envolve diferentes recursos didáticos.</li></ul>
<b>Teoria Cognitivista</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Essencialmente opõe-se ao comportamentalismo;</li><li>• A aprendizagem ocorre a partir do pensamento e do processamento de informações, além de necessitar compreender problemas e suas resoluções para potencializar alguma aprendizagem em Matemática;</li><li>• Reorganização da informação implica em novas explicações ou adaptação de outras antigas, o que dificulta a aprendizagem quando o aluno não consegue resolver os problemas matemáticos e nem mesmo organizar ideias para sua resolução;</li></ul> <p>Muitos referenciais da literatura colocam Piaget como um nome deste movimento, o que propõe que nosso crescimento e maturidade dependem de estágios de desenvolvimento cognitivo.</p>
<b>Teoria Construtivista</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Muitas referências colocam o sociointeracionismo nesta escola epistemológica, e trazem Vygotsky como uma referência devido a influência do materialismo histórico-dialético. Aproxima-se do cognitivismo e concorre, cada uma a seu jeito, princípios e pressupostos, os estudos de Piaget e Vygotsky;</li><li>• A aprendizagem é construída (necessita de uma base) com base em nosso conhecimento e experiências prévias;</li><li>• Torna-se um arcabouço teórico para propostas educacionais acerca da Matemática com métodos baseados em Resolução de Problemas, como pode-se perceber em estudos de G. Polya;</li><li>• A aprendizagem é orientada pela interação do indivíduo com a cultura;</li><li>• Onde confluem e são engendrados estudos acerca do desenvolvimento da linguagem e o desenvolvimento da inteligência, relacionando-os ou tencionando-os.</li><li>• Procuram considerar a maturação dos indivíduos e seus estágios de desenvolvimento. No caso da Matemática, sobre os casos e níveis de propostas de problemas e instauração de campos problemáticos a partir ora da idade dos sujeitos, ora de suas vivências em sociedade.</li></ul>

## Quadro 1 - Resumo de algumas perspectivas voltadas à Educação Matemática

(conclusão)

<p><b>Teoria Humanista</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Todo aluno deve ser compreendido pelo educador como um sujeito com potencial para aprendizagem;</li> <li>• Valorizar o estabelecimento de uma ou mais relações entre expectativas e coerência de conteúdo (currículo), numa visão político-educacional, e/ou conceitos, numa perspectiva de formação do sujeito aprendente;</li> <li>• O Aluno posicionado no "centro" dos processos de aprendizagem e de ensino, o que não ocorre geralmente, pois há notoriedade para o global em detrimento das partes, ou seja, valoriza-se a média ou desempenho global e relega-se o desempenho individual;</li> <li>• Respeito às singularidades dos alunos em seus processos de subjetivação. Suas experiências e individualidades devem ser reconhecidas e consideradas na proposição de um ambiente que proporcione experiências educacionais de aprendizagem.</li> </ul>
<p>Na prática, como apontam as referências supracitadas, a aprendizagem é um processo que depende de elementos biológicos, neurológicos, psicológicos e, sobretudo, sociais e culturais. Leva em consideração que os educadores (pais, intercessores, professores e etc) são figuras importantes no aporte dos elementos sociais envolvidos neste processo. Repensar o trabalho para com a aprendizagem é essencial na atualidade, considerar novas ferramentas é também necessário. A influência da cultura é indispensável. Para a Neuropsicologia, o cérebro entende também sua necessidade de desenvolvimento através da aprendizagem, e isso perpassa métodos, formas, experiências, emoções, atenção e maturidade. Assim, ele busca processos que atendam sua necessidade tanto para subjetivação quanto para desenvolvimento. Isso, considerando, o que lhe seja coerentes com sua expectativa, motivação, capacidade e potência através de meios, tempos e espaços que lhe exijam menos dor, negações, frustrações, esforços e, sobretudo, que possibilitem uma tomada de consciência do processo, e que consiga analisar as possibilidades que atendam a sua expectativa. Onde acreditamos que aulas enciclopédicas têm se mostrado desmotivadoras e a mente dos estudantes tem guiado os mesmos à procura de novas opções, como as videoaulas e redes sociais.</p>	

Fonte: Produção dos autores baseada nas referências supracitadas.

Estas vertentes epistemológicas não previam, em seus princípios, a influência dos avanços tecnológicos em torno da produção do conhecimento e dos modos de ensinar e das práticas que podem potencializar a aprendizagem. A metamorfose que sofre a cultura também é um fator que precisa ser analisado para entender como tais perspectivas continuam ao absorver os novos elementos trazidos, construídos e produzidos constantemente para o cerne do desenvolvimento humano. O que se efetiva pelo engendramento questionável do ensino com a aprendizagem, que por si só, são disjuntos, mas podem confluir em algumas ideias dentro de teorias e da política de educação. Não obstante, tais escolas ou teorias epistemológicas serviram de base para se pensar, desconstruir e reconstruir alguns pressupostos que o sistema educacional insiste em engessar para promover sua estrutura rígida de manutenção e subjetivação na sociedade. Como no caso da Matemática, a sua proposta essencial de técnicas

e resolução de problemas, as quais restringem-na a um conceito de não vivência e experimentação do mundo, mas de algo que é apresentado como essencial e importante, mas que acaba por não produzir sentido, como assesta Leal Junior (2020).

Contudo, voltando-nos ao trabalho escolar, em vários segmentos pode-se perceber que muitas tarefas que eram feitas com recursos manuais cederam espaço a mecanismos, máquinas e softwares. Inúmeros procedimentos são operacionalizados com maior precisão, com redução de tempo e custo. Segundo Papert (1994), houve um progresso expressivo em setores como economia, medicina, astronomia, informática, indústrias e muitos outros. Contudo, nessa evolução, a educação não tem seguido o mesmo ritmo, ficando à mercê de práticas desatualizadas e sem consonância aos avanços tecnológicos.

Papert (1994), em seu livro “A máquina das crianças”, realiza, em forma de parábola, uma analogia ao propor uma viagem no tempo de um grupo de médicos e um de professores, em que todos, supostamente, saíssem do final do século XIX e fossem transportados ao final do XX. Ele assevera que os primeiros ficariam surpresos com tanto aparato tecnológico e que dificilmente conseguiriam exercer a sua profissão devido à necessidade de saber a operacionalidade desses equipamentos, carecendo, assim, de reciclagens em suas formações para o desenvolvimento de práticas relacionadas à sua profissão. Quanto aos docentes, estes poderiam até encontrar um ou outro equipamento moderno, porém nada impediria o desenvolvimento de suas funções e, de certo modo, conseguiriam lecionar tranquilamente sem que houvesse maior desafio, além de estudos, para incorporar em sua prática docente.

A despeito de uma concordância plena ou parcial com a menção do texto de Papert (1994), ela se torna interessante ao apontar para a questão, muitas vezes dual, entre formação e prática, que pode acontecer concomitante, mas que precisa de conscientização, contextualização e desenvolvimento, o que se refere idiossincriticamente às relações que emergem do processo que permeia o ensino e aprendizagem, o professor e a sua formação. A temática formação do professor tem sido evidenciada em muitas discussões, ocupando lugares de destaque, seja em encontros e congressos educacionais ou publicações de livros e artigos. Contudo, de acordo com Fiorentini (2008), fazendo uma análise mais detalhada das publicações, constata-se que a maior parte delas tem pouca confirmação investigativa ou coerência teórica. O autor continua sua reflexão ao relatar a presença de modismos, tais como: formação do professor crítico e



investigador de sua prática, que esse profissional não pode ser detentor do saber e sim produtor de saberes, considerando esses termos peças-chaves à inovação curricular e principal responsável para a melhoria na formação do docente.

De acordo com Borba (2010), dentre os profissionais de educação, possivelmente, o professor de Matemática é o que tem recebido as maiores críticas. Estas têm sido atribuídas também ao seu formador por, supostamente, preservar uma matriz curricular sem inovações ou que contemple uma efetiva formação que não rompa com as tradições pedagógicas. Assim, os docentes, frutos dessa formação, levam à escola essa prática e, conseqüentemente, são vistos como conservadores, ou seja, avessos às novidades curriculares e à integração com outras disciplinas. Contudo, o mesmo autor ilustra estudos que apontam resquícios de que isso é contestável, ressaltando que os educadores matemáticos, talvez, sejam um dos grupos profissionais que mais buscam e ousam novos caminhos e olhares em relação à formação do educador, aos seus saberes e à sua prática docente.

O Portal do Ministério da Educação (Brasil, 2017, p.1), diz que “Educação a distância é a modalidade educacional na qual alunos e professores estão separados, física ou temporalmente e, por isso, faz-se necessária a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação”, mesmo que o ensino remoto não seja essencialmente um ensino a distância, ele tem compartilhado de estrutura e diretrizes semelhantes neste momento que vivemos. Diz ainda que essa modalidade é regulada por uma legislação específica e pode ser implantada na educação básica (educação de jovens e adultos, educação profissional técnica de nível médio) e na educação superior.

Moran ainda acrescenta:

É ensino/aprendizagem onde professores e alunos não estão normalmente juntos, fisicamente, mas podem estar conectados, interligados por tecnologias, principalmente as telemáticas, como a Internet. Mas também podem ser utilizados o correio, o rádio, a televisão, o vídeo, o CD-ROM, o telefone, o fax e tecnologias semelhantes. (MORAN, 2002, p. 1)

Na educação a distância ou ensino remoto, o foco dos processos de ensino e de aprendizagem deve ser o aluno, uma vez que ele necessita ter organização para separar um espaço adequado para estudar, disciplina para encaixar um horário de estudo na sua rotina e também estar motivado para estudar, uma vez que já tem o que deve ser feito e só depende dele a execução.

O que tem apontado mais prementemente para a necessidade de se pensar na proposta do focar no que pode ser aprendido, ao invés de focar no que deve ser ensinado. Além disso, questões em torno de tempo e espaço nunca estiveram tão em evidência para se analisar o cenário educacional, posto que de uma forma isolada professores e alunos passam a deparar-se com muitos outros problemas que podem movê-los em diversas direções que não aquelas de disposição e motivação para aprender ou ensinar algo.

Além disso, Formiga (2009, p. 23) complementa que o trabalho remoto “requer profissionais e atores sensíveis e dispostos à inovação, porque atuam em um setor de transitoriedade, no qual a única certeza é a permanente mudança, cujas influências chegam pelos diferentes idiomas dos países que produzem conhecimento exponencial para a área.” Mas, na prática, segundo Nova e Alves (2003), a experiência tem mostrado que os sujeitos que atuam como docentes na EAD ou no ensino remoto ou híbrido reproduzem as suas práticas como se estivessem em uma sala de aula convencional, esquecendo-se das peculiaridades deste ambiente. Entendendo por ensino convencional, ou presencial, aquele em que professores e alunos estão no mesmo local e ao mesmo tempo e, sobretudo, a partir de onde devem ser respeitadas suas singularidades e subjetividades.

A respeito do ensino híbrido, Blended Horn e Staker (2015) afirmam que “é qualquer programa educacional formal no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino on-line, com algum elemento de controle dos estudantes sobre o tempo, o lugar, o caminho e/ou ritmo” (HORN; STAKER, 2015, p. 34). Todas essas modalidades apresentam vantagens e desvantagens. Na presencial, os alunos têm a oportunidade de discutir, em tempo real, com o professor e também com os colegas, o conteúdo trabalhado. Porém, o aluno precisa se deslocar até a escola, em um horário pré-determinado, para participar dos encontros, o que tem sido inviável para este momento de pandemia.

Já na educação à distância ou remota, o aluno estuda no lugar que desejar e no tempo que tiver disponível (caso seja possível), porém só poderá falar com o professor, que é chamado professor-tutor, nos momentos em que ele disponibiliza para essa interação. Na maioria das vezes não existe a convivência entre colegas da mesma turma. O ensino híbrido busca mesclar o melhor dos dois mundos, tendo menos encontros presenciais, mas, ainda assim, existindo momentos de trocas presenciais, mas que ainda pode apresentar certos riscos.

Acerca do que é vital para este período turbulento da história da humanidade, em termos de educação, muito há que se discutir e inovar, mas,

aqui, nos dedicaremos a discutir processos relacionados à formação do professor e do estudante, e como o primeiro pode colaborar com novas propostas. Lèvy (1999, p. 174) afirma que “está sendo constituído um ‘continuum’ entre tempo de formação, por um lado, e tempo de experiência profissional e social de outro”. No centro desse ‘continuum’, “todas as modalidades de aquisição de competências (incluindo a autodidática) vêm tomar o seu lugar.” O que carece que pensemos, então, nas ferramentas que podem auxiliar nesses processos formativos.

Na esteira dessa contextualização, podemos evidenciar que, conforme apontam Martins (2018), Leal Junior et al. (2018), Lefrançois (2016) e Martins et al. (2018), cada vez mais instrumentos e ferramentas de ensino para potencialização da aprendizagem vêm sendo desenvolvidos e tornam-se necessários diante dos problemas que permeiam a sociedade. Aulas em vídeos têm ganhado espaço nas redes sociais e o número de professores que ensinam Matemática por meio delas, bem como aqueles divulgados e promovidos em plataformas de compartilhamento de vídeos, a exemplo do YouTube, tem ganhado proporções significativas. Não diferente disso, estão os números de acessos e inscritos que esses vídeos vêm adquirindo através de seus canais. O que ficou ainda mais em destaque agora neste período pandêmico.

No cenário acadêmico, particularmente na Educação Matemática, esta discussão emerge de forma embrionária sobre a temática de videoaulas. Os trabalhos supracitados apontam para uma tendência de se conceber a Matemática de forma metonímica, ou seja, tomando-a por uma prática intrinsecamente constitutiva, através da resolução de problemas, que é percebida por muitos atores do cenário educacional como a essência da própria Matemática que é ensinada nas escolas. Assim, muitos alunos compreendem que saber resolver problemas matemáticos é saber matemática. Com o que não concordamos, uma vez que o que acontece nas escolas acerca de resolução de problemas está relacionado a saberes e técnicas, procedimentos e heurísticas, ficando aquém de problematizações e conceitualizações que emergem e pressupõem a Matemática como um conhecimento acerca do mundo e de sua representação (LEAL JUNIOR, 2018).

Outrossim, sendo esta a visão predominante nas concepções de gestores educacionais e profissionais da educação acerca da Matemática, o que é transmitido também a estudantes, os meios de se atingir competências e habilidades nesse panorama passam a ponderar e valorizar mais o que deve ser ensinado, do que potencializar o que pode ser aprendido. Assim, outros elementos

entram em cena e podem impedir e prejudicar a produção de conhecimentos matemáticos, a saber: grade de curso, currículos, proposta institucional, carga horária docente, número de aulas semanais, dentre outros conforme relatamos no desenvolvimento deste capítulo (ONUCHIC; LEAL JUNIOR; PIRONEL, 2017).

Tais motivos supracitados, os quais permeiam o sistema educativo atual, conduzem a algumas alternativas para contrapor-se a esse status quo ou potencializar alguma de aprender enquanto produção de conhecimento. Isso, não se detendo apenas a técnicas e ao que está institucionalmente posto, mas concatenando a resolução de problemas enquanto uma filosofia que dá vida à Matemática, não como um modelo de ensino, mas uma forma de se pensar o mundo diante de problematizações e instauração de campos problemáticos. Tal proposta está vinculada a eixos culturais, sociais e históricos que constituem os sujeitos em seus processos de subjetivações como o é o sistema escolar e, consequentemente, a Matemática escolar (CASTORINA; CARRETERO, 2014).

Emergem, então, desse cenário, trabalhos que visam a subverter e potencializar modos novos de se pensar e aprender Matemática, como as videoaulas. Os motivos que levam às produções das mesmas são variados, e as razões que conduzem os seguidores a eles também o são. Um dos objetivos deste capítulo é dar continuidade às pesquisas que vêm sendo produzidas pelo GPEMS. Um primeiro artigo, Leal Junior et al. (2018), já publicado por este grupo, tratou da busca por videoaulas na prática de estudantes. O segundo artigo, Martins et al. (2019), em consequência desse primeiro, foi o movimento de professores e produtores de videoaulas em redes sociais. No momento, esta terceira produção, em forma de capítulo, visa ao encerramento de um ciclo daquele projeto, tratando da visão dos professores acerca do acontecimento e agenciamento das videoaulas e seus desdobramentos sobre o que acontece em sala de aula.

Assim, buscamos refletir sobre o que tem impulsionado essa prática e uma compreensão sobre como os docentes reagem a isso em suas práticas educacionais. Por este motivo, como pesquisadores imbricados em estudos sobre o tema, tal temática tem se mostrado bastante relevante, uma vez que interfere diretamente em uma prática autônoma de alunos, que não depende de prévia orientação nem indicação docente, na busca por uma aprendizagem ou na produção de algum conhecimento.

Ao professor é atribuída a função de formar o indivíduo crítico e integrado de forma global para atender às demandas da sociedade e do mercado. Para isso, é necessário desenvolver habilidades e capacidades que permitam a sobrevivência

em uma sociedade na era da informação e da comunicação (FIORENTINI, 2008). A sociedade enxerga, na docência, não somente uma forma para o desenvolvimento intelectual do indivíduo, mas, também, o desenvolvimento humano e a formação de valores. Em contraponto a toda esta valorização da figura do professor, várias atitudes vão de encontro à valorização dos mesmos, uma vez que esses professores são os primeiros a sofrer com as políticas governamentais de corte de gastos na educação pública, passando por reduções de salários e más condições de trabalho, segundo o mesmo autor.

## **Procedimento e condução da pesquisa**

Esta pesquisa é uma tessitura no âmbito de uma análise do discurso de cunho arqueogenealógico pautada pelas teorizações de Michel Foucault, como proposto por Leal Junior e Onuchic (2020). Para tanto, analisamos algumas falas de entrevistas com seis professores que ensinam matemática. Uma professora, que será chamada de Vilma, atua no Ensino Superior em uma universidade estadual do estado de São Paulo e em uma escola de Educação Básica da rede privada no interior paulista; três professores atuam na rede federal de ensino nos estados de São Paulo e Minas Gerais, os quais serão chamados de Clara, João e Pedro, e desenvolvem atividades em níveis da Educação Básica de Ensino Técnico e do Ensino Superior; e, por fim, dois deles lecionam na rede pública estadual em curso de Ensino Médio propedêutico, os quais serão chamados de Angélica e Fábio.

Esses professores tornaram-se participantes desta pesquisa porque, dentre os entrevistados, numa população de 16 professores, foram aqueles que perceberam a influência das videoaulas no desempenho de seus estudantes, ou foram os que, em algum momento indicaram ou propuseram esse recurso em suas práticas.

Não daremos destaque a identificação de sujeitos da pesquisa, posto que em uma pesquisa arqueogenealógica dá-se prioridade, ao que é dito e não a quem diz. Isso porque o foco desta análise do discurso incide sobre os sujeitos como efeitos enunciativos, pois eles são constituídos diante de práticas que os movimentam na sociedade à medida que fomentam e corroboram os discursos (FONSECA-SILVA, 2004). Aqui, não daremos conta de todos os discursos que permeiam nossos objetos de interesse, mas apresentamos uma pequena parcela

deles, a qual acreditamos ser interessante à problemática que estamos levantando.

Para desenvolvimento deste trabalho, dedicamo-nos à análise das enunciações e dizibilidades<sup>21</sup> desses professores entrevistados sobre como percebiam os desdobramentos resultantes da busca de alunos por videoaulas e como isso influenciava ou interferia em suas práticas em sala de aula, o que emerge dessa nova forma de se “ensinar” e de “aprender” Matemática, bem como de seus pressupostos, mesmo que, em muitos casos, eles não sejam tão evidentes e ocorram de forma inconsciente tanto para os professores quanto para os alunos. Algumas interrogações que nos propusemos a conversar com os docentes foram: Como essa nova prática tem funcionado em suas aulas? Quais suas potencialidades? Como esse movimento dos estudantes operam valores, conhecimentos, poderes e saberes?

Segundo Martins et al. (2018), esse movimento é natural como prerrogativa discente, mas ele ainda é balizado pelo trabalho docente em sala de aula. Desta forma, surgiram-nos as ideias de pesquisa e os questionamentos que queríamos trabalhar com os docentes a modo de levantar algumas compreensões acerca do mote da pesquisa, que foi motivada pela crescente procura, tanto por parte de alunos quanto de professores, por videoaulas em redes sociais. Esta que foi realizada no período compreendido de março de 2018 até dezembro de 2019.

Para tanto, apegamo-nos a uma proposta de Análise do Discurso arqueogenealógica como proposta por Foucault (2014, 2015). Nesse tipo de análise sobre nosso campo problemático, ou seja, as videoaulas e os discursos relacionados dos docentes, os discursos não se referem a um objeto único, pois vários objetos podem entrar em cena e possibilitar um imbricamento de/em outros discursos. Uma vez que se transformam sob a designação de diferentes sentidos e significados que estão limitados ao tempo e ao espaço, a uma certa localidade ou regionalidade, mesmo que este material esteja subsidiado à rede mundial de computadores e às salas de aula, sempre engendra discursos a partir de algum contexto e pode apresentar-se como regularidades discursivas.

---

<sup>21</sup> Termo emblemático em análises de discursos de matiz Foucaultiano, como a arqueogenealogia. Diz dos enunciados que compõem os discursos, das falas e dos dizeres que expressam movimentos e práticas. É um termos aliado a visibilidades, que estão relacionadas a práticas discursivas de ver e fazer ver, enquanto dizibilidade foca no falar e no fazer falar, como pode ser conferido em Foucault (2014).

## Contextualizando em tessituras e regularidades discursivas

Segundo Ferreira (2015), com “o passar do tempo, surgem as Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (NTIC), consideradas como geração digital, onde estão inseridos: a multimídia (imagem, texto e som), os softwares, a realidade virtual, o armazenamento em nuvens etc.” Todavia, na educação matemática o uso das NTIC:

linicia-se em 1999 com o advento da internet e apresenta uma evolução, começando pelo computador que aparece como uma ferramenta marcante para o ensino e aprendizagem intensificando o uso de softwares matemáticos educacionais, jogos, planilhas e imagens; na sequência pela internet que traz a realidade virtual, a realidade aumentada, os blogs, os simuladores, os vídeos educacionais e continua com o smartphone que veio para facilitar o uso da calculadora, do gravador de áudio e vídeo e da internet. (FERREIRA, 2015, p.4)

Corroborando esse pensamento, podemos perceber que alguns pesquisadores já vêm buscando estudar a influência de formas outras de ensino e de aprendizagem de Matemática, como Garcia e Penteadó (2006, p. 44), que propõem que, de forma diferente das inovações tecnológicas anteriores:

[...] ela [a internet] integra as várias formas de comunicação - escrita, oral e audiovisual - numa mesma rede interativa mundial, que possibilita o compartilhamento de informações e a comunicação de muitos com muitos em tempo real, rompendo as barreiras geográficas de espaço e tempo. Outro fato é que, a comunicação via Internet não precisa ocorrer em um só sentido, como em outros meios de comunicação (televisão, rádio, jornal). Cada usuário pode traçar seu próprio caminho para o acesso aos conteúdos, e decidir quais informações quer receber, deixando de lado a postura do receptor passivo (espectador).

Isso parece dar espaço para discussões que ultrapassam aquilo que se tem limitado pelos muros da escola, onde politicamente acredita-se que é o lugar em que se dá o ensino e a aprendizagem de Matemática, ignorando toda e qualquer influência dos contextos daqueles que fazem acontecer e interferem na processualidade do ensino e da aprendizagem. Falar em metodologias, como resolução de problemas, modelagem e etc., às vezes torna-se algo que vai além do que pode o professor em sala de aula, mas pode acontecer como algo mais

dinâmico e ativo se for pensado para além das limitações que se estabelecem no cotidiano das salas de aula.

A título de exemplo, como mencionado pela professora entrevistada Clara, podemos pensar que videoaulas e o movimento dos estudantes para sua procura fazem parte do trabalho docente a partir de metodologias ativas, como é o caso da sala de aula invertida. Para isso ela cita, enquanto pesquisadora do tema, que “o conteúdo e as instruções são estudados on-line antes de o aluno frequentar a sala de aula, que agora passa a ser o local para trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas e projetos, discussão em grupo, laboratórios, etc.” (VALENTE, 2014, p. 85). Para essa determinada professora, como promotora da busca por videoaulas:

*[...] o material produzido a serviço ou como resultante de videoaulas também pode ser disponibilizado de maneira impressa, mas com a facilidade de acesso à internet, não é muito utilizado atualmente. As atividades são disponibilizadas geralmente nos ambientes virtuais de aprendizagem, de maneira que, além de ter acesso ao conteúdo, o aluno pode fazer uso do ambiente para discussões e questionamentos com o professor e outros colegas” (CLARA, Professora entrevistada).*

Para o Professor João, as videoaulas vêm se constituindo como um novo horizonte que pode auxiliar o trabalho em classe, uma vez que:

*“não se consegue, pelo menos em minha instituição, nas aulas do ensino médio técnico, abordar todo o conteúdo com apenas três aulas semanais. Temos uma gama de conceitos que são negligenciados, sendo apenas abordados por resolução de problemas.” (JOÃO, Professor entrevistado).*

Isso, para ele, não permite a construção de conhecimentos, mas constitui-se uma mola propulsora para aplicação de fórmulas e técnicas para resolver determinados tipos de problemas. Ele relata que, por exemplo, no segundo ano do Ensino Médio, tem uma proposta curricular estruturada por conceitos de Trigonometria, Geometria Plana, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares que é impossível de trabalhar em três aulas semanais durante o ano letivo.

*“Eu percebi que, no primeiro bimestre desse ano tivemos muitos feriados ou aulas que não foram dadas, mas que uma parcela de meus alunos estudou o assunto através de videoaulas. O desempenho deles foi muito bom, pois conseguiram resolver os problemas propostos enquanto os*



*demais apresentou dificuldades" (JOÃO, Professor entrevistado).*

A concepção de bom desempenho deste professor está bastante relacionada ao fato de os alunos conseguirem resolver problemas propostos e, sobretudo, bastante alinhada à proposta curricular de Matemática. Todavia, há a questão da conceitualização da Matemática, que fica à mercê de heurísticas e que o próprio professor não consegue expressar sua apreensão em sua fala. Ele ressalta que esse movimento dos alunos buscarem por videoaulas é benéfico, demonstra um interesse do estudante em aprender e a questão de se entender conceitos, os quais não são possíveis de trabalhar em aula, pode ser sanada.

*"Não é possível afirmar que os estudantes certamente sabem o conceito, mas que sabem resolver o que se propõe, pois não conseguimos fazer uma avaliação que seja justa, pois as salas de aula são heterogêneas" (JOÃO, Professor entrevistado).*

No parágrafo anterior, entram em cena outros elementos, como a avaliação, que é um dos balizadores da busca por videoaulas. Nenhum dos entrevistados afirmou que os estudantes apenas buscam por videoaulas por causa da avaliação, mas reconhecem, unanimemente, que o currículo escolar ainda é o maior direcionador de tal movimento e que as avaliações são a motivação de se buscar por elas. Reconhecem que os alunos que assim procedem têm um fator de interesse e atenção que muitas vezes não se mostram em sala de aula, o que entra em consonância com os trabalhos desenvolvidos de nosso grupo de pesquisa que já foram mencionados acima.

O Professor Pedro é um dos que indica videoaulas diante de um cenário com alunos que apresentam dificuldades no componente curricular de Matemática. Ele relata que:

*"temos recebido bastante alunos com uma defasagem de Matemática no ensino médio e em cursos de licenciatura, até mesmo de Matemática. Não conseguimos atender essa demanda conceitual. Não há tempo para isso!" [...] "As salas são mistas, não é possível nivelar a todos. Cada indivíduo traz consigo uma bagagem diversa de saberes, os quais apresentam fragilidades. No próprio curso de licenciatura em Matemática temos alunos que não sabem regra de três, ou não compreendem o conceito de proporcionalidade. Como resolver isso se o tempo é curto para cumprir as ementas? Por isso indico videoaulas aos alunos e, durante as aulas, acabamos por discutir o que fora estudado e apreendido." (PEDRO,*

*Professor entrevistado).*

Para ele a iniciativa do estudante em procurar é um fator determinante para o progresso do trabalho em sala de aula, pois:

*"essa ferramenta disposta nas redes sociais é um aliado do professor, uma vez que tudo o que não consigo fundamentar devido a defasagem dos estudantes, eu posso indicar a eles e fica a cargo deles a decisão por buscar por isso ou não" (PEDRO, Professor entrevistado).*

No Ensino Médio "é percebido um movimento mais fluido nessa direção, os alunos têm procurado mais por videoaulas e de forma mais independente, autônoma", diz o Professor João. Eles mesmos relatam que, devido à concorrência dos cursos que almejam ingressar a uma vaga nos vestibulares, precisam procurar por conhecer melhor e com mais profundidade aquilo que não é possível de se ver em sala de aula. E, para Pedro, é aí que o professor também pode atuar, ao indicar aos alunos o que procurar para estudos complementares ou suplementares. Permitindo que eles possam mobilizar-se na produção de novos ou outros conhecimentos que não apenas aqueles transmitidos em aula.

Na sequência da fala da professora Vilma, ela se preocupa com a qualidade dos materiais dispostos como pano de fundo do trabalho de sala de aula e daquilo que é tratado em redes sociais. Ela relata que:

*"Eu assisti algumas videoaulas em que o professor ensinava uma Matemática de forma bem técnica, ou seja, utiliza-se uma forma de um "pseudodeterminante" para determinar a equação de uma reta, mas que, ao mesmo tempo, é uma ferramenta, não se discute conceitos nem porque aquilo funciona. Eu já tinha tido contato com isso enquanto estudante secundarista, mas me preocupa o fato desse procedimento estar sendo perpetuado como uma Matemática formal, quando na verdade não o é [Nesse momento, pedimos a ela que especificasse o dito e ela enfatizou] "o professor youtube faz em papel uma matriz de ordem  $2 \times 4$ , onde na primeira coluna ele colocava, , as coordenadas de um ponto dado do plano cartesiano, na segunda coluna, que era a regra, colocava as variáveis "x" e "y", e disse que elas sempre deveriam estar nessa posição (na segunda coluna), na terceira coluna ele dispunha o outro ponto dado e, por fim, na quarta coluna repetia as coordenadas do primeiro ponto da primeira coluna. Depois disso o aluno deveria proceder como a Regra de Sarrus que, ao igualar este determinante a zero resultava na equação da*

*reta que passa pelos dois pontos dados." (VILMA, Professora entrevistada).*

Esta professora alegou que, desse modo, fica difícil conceitualizar, quando se produz como regra algo que já está conceitualmente posto na Matemática, como determinantes, equações de retas e um resultado que alie os dois conceitos. Ou seja, o conceito de determinante traz como princípio primeiro a exigência de uma matriz quadrada, o que fora negligenciado nessa proposta de modelo para resolver problemas. Não fora, também, trazido uma conceitualização acerca de uma equação de reta em termos das variáveis postas como coluna naquela matriz e, sobretudo, a obtenção da equação geral da reta, que pode ser obtida por um determinante de ordem 3, ao compor as duas primeiras colunas da matriz com 'x' e 'y' na primeira linha, seguidos pelas coordenadas dos pontos dados nas linhas seguintes, e a inclusão de uma terceira coluna composta por 1.

Para ela, os desdobramentos desse resultado da Matemática do Ensino Médio foram negligenciados, porque não aconteceu uma discussão acerca dos conceitos, apenas a exposição de um procedimento, o qual poderia ter potencializado outras discussões e, que não havia sido explanado nem explorado naquela videoaula, podendo gerar equívocos, o que dificultaria sobretudo uma conceitualização da própria Matemática. Este enunciado aponta para que o professor possa oportunizar a formação de alunos críticos, algo que permita aos sujeitos analisar aquilo que se mostra, saber diferenciar o que é uma ferramenta do que é conceito. Vilma prega que:

*"permitir ou não a busca por videoaulas não é prerrogativa docente, mas analisar com o aluno o que está sendo exposto, torná-lo crítico é papel do professor. Isso, para que não se tenha que lidar com alguém que apenas repita ou imite o que se faz, que pode ser prejudicado por não entender nem fazer sentido para um conceito tão essencial" [ Para ela ] "de nada adianta captar a essência de uma técnica de resolução de problemas se, ao mudar o contexto ou a situação de um problema, o aluno não conseguir perceber a diferença nem os elementos que constituem os mesmos." (VILMA, Professora entrevistada).*

O Professor Fábio apontou que videoaulas corroboram muito do que se tem discutido em trabalhos acadêmicos, embora seja um tema recente, sua demanda é grande, como vimos apontando. Ele enfatiza que a vantagem principal é o fato de o estudante poder voltar ao conceito trabalhado em sala de aula quantas vezes desejar. Diz ainda que essas aulas funcionam como uma

espécie de monitoria, ou como um tutor, que ajudará o aluno a compreender o que não tenha ficado claro durante as aulas.

*“Os alunos, depois de motivados em aula, podem se voltar para aqueles problemas ou explicações que não tenham entendido. Quando ele faz isso, já está, de alguma forma, interessado em aprender. Isso porque não se consegue sanar nem trabalhar todas as dúvidas em aula” (FÁBIO, Professor entrevistado).*

Na hora da aula muitos alunos detêm-se a copiar o exposto, não têm tempo de refletir nem praticar o que se propõe”, diz ele. “Quando eles chegam em casa, depois de tentar estudar ou refazer os exemplos, percebem dificuldades e, ao não ter acesso ao docente, recorrem às videoaulas”, coloca o Professor Fábio. Também aponta que, em muitos casos, percebe que os estudantes apenas procurarão por este recurso em datas próximas às provas, buscando por um saber-fazer, um procedimento que lhes permita chegar a um resultado, deixando de lado grande parte de uma Matemática, em detrimento de um modelo. Nesse quesito, a Matemática passa a ser, apenas, uma resolução de problemas.

As professoras Angélica e Clara apontaram que os formatos de muitas videoaulas não se diferenciam daquilo que é realizado nas salas de aula tradicionais. Muitas delas valem-se de recursos pouco avançados, restringindo-se a resoluções em lápis e papel. Há aqueles que apelam para recursos computacionais que permitem uma melhor visualização de conceitos, mas que o fator preponderante e que conduz estudantes a essa nova possibilidade de aprender está posto na escolha do aluno, na interação que ele tem com a rede social e em como ele é afetado pela linguagem do professor youtuber e pelos recursos técnicos utilizados. Angélica diz que:

*“eu recomendo as videoaulas que eu já tenha assistido e saiba que os interlocutores utilizem conceitos de forma correta e não sigam na linha de uma técnica, [...] que o professor youtuber caminhe na mesma direção que eu. Eu não conheço muitos canais, mas tenho aqueles que sei que as coisas são feitas com seriedade e podem auxiliar meu trabalho de sala de aula [...] contudo, percebo que meus alunos até tentam seguir os mesmos canais que eu indico, mas eles se dedicam às suas próprias escolhas, aqueles canais que mais lhes agradam. Muitas vezes eles, em sala de aula, acabam indicando outros canais que dizem ser mais interessantes, mas que não consigo encontrar tempo para assistir. [...] acredito que*

*sejam bons, pois seus resultados tanto nas discussões de sala de aula quanto nas avaliações são bastante significativos" (ANGÉLICA, Professora entrevistada).*

Por outro lado, a Professora Clara diz que utiliza videoaulas para rever, visitar e aprender alguns conceitos que não lembra, para aprender alguma técnica que porventura não saiba e possa utilizar para melhor trabalhar a Matemática de sala de aula. Encontrar exemplos interessantes ou potencializar discussões. Isso porque:

*"muitas vezes ficamos desatualizados ou esquecemos algo, e as videoaulas nos ajudam a rever. Não tenho receio e, inclusive, indico os mesmos canais a meus alunos. Já me deparei com exemplos muito interessantes com uma roupagem atual, coisas novas que não tinha pensado. [...] mas infelizmente nem sempre tenho tempo de recorrer a isso e preparar aulas com tais recursos. Por isso indico aos meus alunos e percebo que eles têm tido bons aproveitamentos, principalmente quando trazem algumas propostas de discussões a partir do que assistiram nas videoaulas" (CLARA, Professora entrevistada).*

Então, é mister que se reconheça o momento histórico que estamos vivendo e pensemos sobre as práticas que estão sendo efetivadas. Reconheçamos que, mesmo a contragosto de alguns, é inegável que os alunos buscam por formas diferentes de aprender. Seus motivos, disposições e interesses são diferentes e incompatíveis com aquela Matemática tecnicista que é implementada na escola. Vários são os motivos que os movem à esta busca, como já mencionamos acima, mas nós, enquanto professores, poderíamos nos valer desses mecanismos de videoaulas para incrementar nossas aulas, pensar nas vivências e experiências que podemos indicar a nossos alunos. Reconhecendo que precisamos avançar sobre uso de tecnologias e seus benefícios à aprendizagem, tanto nossa quanto dos estudantes.

## **Considerações Finais**

Neste trabalho, procuramos apresentar algumas anuências do Ensino de Matemática por intermédio de videoaulas e nele, buscamos enfatizar o olhar pela perspectiva dos professores que ensinam Matemática em sala de aula. Algumas

evidências apontam para uma tendência de se conceber a Matemática de forma metonímica, tomando-a por uma prática intrinsecamente constitutiva, ou seja, a resolução de problemas é percebida por muitos atores do cenário educacional como a essência da própria Matemática que é ensinada nas escolas. Assim, muitos alunos compreendem que, saber resolver problemas matemáticos é saber matemática. Com o que não concordamos, uma vez que o que acontece nas escolas acerca de resolução de problemas está relacionado a saberes e técnicas, procedimentos e heurísticas, ficando aquém de problematizações e conceitualizações que emergem e pressupõem a matemática como um conhecimento acerca do mundo e de sua representação.

O que temos analisado aponta que alguns professores de sala de aula seguram seu papel formador e têm dificuldades de reconhecer que a aprendizagem dos estudantes perpassa os muros e os tempo da escola. Há muitas ferramentas que lhes são oferecidas para aprender algo. Mantendo o status quo do ensino tradicional, estamos promovendo “ensinagem” - um ensino apenas como transmissão de regras e normas, como numa linguagem-, se opõe à aprendizagem, que implica sempre num encontro com os signos da matéria objetivada, no caso da Matemática, que só pode ser realizada pela experiência, pela afecção, pelo contato, conexão, conjunção, conforme dizem Leal Junior e Andrade (2016) amparados pela Filosofia da Diferença.. Na aprendizagem, o contato tem que ser imediato entre os pontos notáveis do aprendiz e os aspectos singulares da ideia objetiva (os signos), que acontecem sempre de uma forma singular e até mesmo involuntária ou inconsciente, quando o aluno se dá conta de que pode pensar sobre e problematizar isso, o que pode perfeitamente acontecer através de videoaulas em redes sociais. Mas, também há aqueles professores que reconhecem os benefícios e entendem seu papel diante desse cenário.

Caberia ao professor favorecer a oportunidade para que os alunos se encontrem com signos, sejam afetados por signos, decifrem os signos, apresentando-lhes a matéria a partir da qual esses signos possam ser atualizados, nesses “encontros” independente do meio, do tempo e do local, se na sala de aula ou através de tecnologias ou redes sociais. Se nós, enquanto docentes, não nos conscientizarmos de nosso papel agenciador, os próprios alunos podem descobrir formas de ter contato com os signos da Matemática (uma visão benéfica) ou podem deixar de aprender por não terem obtido o agenciamento necessário por parte do professor, o que pode acontecer de formas que vão de encontro com a proposta educativa que é objetivada para eles diante do papel didático-pedagógico que

desempenhamos na sociedade. Por isso, é interessante participarmos disso, de maneira a oferecer-lhes caminhos e orientar suas caminhadas pelas redes sociais ou com trabalhos através de tecnologias em busca de alguma aprendizagem em Matemática.

Devido à grande quantidade de materiais disponíveis na rede, muitos professores não elaboram seu próprio material, apenas analisam o que existe e indicam aos alunos o que é mais apropriado. No geral, são utilizados vídeos de curta duração. Estes pesquisadores propuseram que a mobilização em torno das videoaulas, na visão dos professores de sala de aula, é próxima com respeito aos resultados. No entanto, muitos deles não conhecem tal ferramenta. Esses professores conseguem perceber diante de conversas com os alunos que se trata de um subsídio que pode auxiliar nos processos de aprendizagem. Que se trata de um ambiente no qual o próprio aluno mobiliza-se e movimenta-se para conseguir apreender algo que não tivera a oportunidade de compreender no curto período do trabalho em classe.

Certo é que, mesmo durante ou após o cenário da pandemia de COVID-19, há a extrema e premente necessidade de se repensar as práticas concernentes ao ensinar e ao aprender matemática. Já não podemos manter aquele modelo tradicional pré-pandemia nem tampouco ignorar as influências das tecnologias e das redes sociais nessa processualidade. E, então, há a inevitabilidade de trabalhar, independente dos princípios e pressupostos que apoiam a prática educacional a partir de escolas e teorias epistemológicas, os avanços culturais e sociais para poder potencializar a aprendizagem de uma forma mais próxima do inegável movimento que fazem os alunos em busca de desenvolver e aprender, que podem estar mais próximos da proposta de ensinar.

## Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho. (Org). **Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática**. 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. **Ministério da Educação e Cultura**. Portal MEC, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12823:o-que-e-educacao-a-distancia>. Acesso em: 13 maio. 2021.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David Willian.; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez. 1988.

CASTORINA, José A.; CARRETERO, Mario. **Desenvolvimento Cognitivo e Educação**: O Início do Conhecimento, v.1. Penso Editora, 2014.

COLL et al. **Psicologia do Ensino**. Trad. Cristina M. de Oliveira. Porto Alegre. Artmed Ed. 2008.

COSENZA, R. M.; GUERRA, L. B. **Neurociência e Educação**: Como o cérebro aprende. Porto Alegre. Artmed Ed. 2011.

FARIA, Tereza Cristina Leandro de; NUÑEZ, Isauro Beltrán. **O ensino tradicional e o condicionamento operante**. Porto Alegre. Ed. Sulina, 2004.

FERREIRA, E. F. P. Integração das Tecnologias ao Ensino da Matemática: percepções iniciais. In: **Anais...** XIX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática EBRAPEM, Juiz de Fora, 2015. Disponível em <[http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd6\\_esmenia\\_ferreira.pdf](http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd6_esmenia_ferreira.pdf)>. Acesso em Novembro/2018

FIORENTINI, Dario. (Org.). **Formação de Professores de Matemática**: Explorando novos caminhos com outros olhares. 1ª reimp. - Campinas-SP: Mercado de Letras, 2008.

FONSECA-SILVA, M. C. **Foucault e a arqueogenealogia do sujeito**. Sujeito, identidade e memória, Uberlândia, p. 27-69, 2004.

FORMIGA, M. A terminologia da EAD. In: LITTO, Frederic M.: FORMIGA, Marcos. (Org.). **Educação a distância**: o estado da arte. São Paulo: Pearson Education do Brasil, p. 39 – 46, 2009.

FOUCAULT, M. **A Ordem do Discurso**. 24. Ed. São Paulo: Loyola Ed., 2014.

FOUCAULT, M. **Arqueologia do Saber**. 8. Ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária Ed., 2015.



GARCIA, T. M. R.; PENTEADO, M. G. **Internet e formação de professores de Matemática**: desafios e possibilidades. 2006. Disponível em: <[http://www.ufrj.br/emanped/páginas/conteudo\\_producoes/docs\\_29/internet.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/páginas/conteudo_producoes/docs_29/internet.pdf)>. Acesso em: 25 nov. 2018.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended**: Usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso. 2015.

LEAL JUNIOR, L. C. **Psicopedagogia e Educação Matemática**: Uma arqueogenealogia das pesquisas relacionadas na última década. Trabalho Acadêmico (Especialização). Centro Universitário Barão de Mauá. Ribeirão Preto. 2020.

LEAL JUNIOR, L. C. **Tessitura sobre discursos acerca de Resolução de Problemas e seus pressupostos filosóficos em Educação Matemática**: cosi è, se vi pare. 325f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Rio Claro. 2018.

LEAL JUNIOR, L. C.; ANDRADE, A. S. Ensino e aprendizagem de Análise Matemática como encontro com os signos na perspectiva de Gilles Deleuze. **Rev. Inter-Ação**, v. 41, n. 3, 545-564, Goiânia, set-dez. 2016.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. A way to do research in Mathematics Education as an Archeogenealogy: Report, challenge and opportunities wearing the lens of a Discourse Analysis. **International Journal of Latest Research in Humanities and Social Science (IJLRHSS)**. v.3, n. 5, 1-14, 2020.

LEAL JUNIOR, L. C.; ANDRADE, C. P.; MARTINS, E. R.; SILVA, L. E. Ensino de matemática através de videoaulas: um olhar pela teoria da atenção Tangram, **Revista de Educação Matemática**, v.1, n. 3, pp. 40-62, Dourados, 2018.

LEFRANÇOIS, G. R. **Teorias da Aprendizagem**: o que o professor disse. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

LÈVY, P. **Cibercultura**. Rio de Janeiro: Editora 34, Tradução de Carlos Irineu da Costa, 1999.

MARTINS, Egídio Rodrigues. **Possibilidades do uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em um Curso de Licenciatura Matemática na Rede Federal de Educação Tecnológica no Estado de São Paulo**. 220f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Rio Claro, 2019.

MARTINS, E. R.; ANDRADE, C.; SILVA, L. E.; LEAL JUNIOR, L. C. Ensinar e aprender Matemática através de videoaulas: Um panorama de Resolução de Problemas e da Teoria da Atenção. **Revista Hipótese**, v. 5, p. 372-384, 2019.

MORAN, José Manuel. **O que é educação a distância**. 2002. Disponível em: <<http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/dist.pdf>>. Acesso em: 13 maio. 2021.

NOVA, C.; ALVES, L. **Educação a Distância**: uma nova concepção de aprendizado e Interatividade. São Paulo: Futura. 2003.

ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C. A Influência da Leitura na Resolução de Problemas: Questões de sentidos, significados, interesses e motivações. **REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 11, n. 21, 24- 46, set. 2016.

ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. Introdução ao Livro Perspectivas para Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, p. 13-20. 2017a.

PAPERT, Seymour. **A Máquina das Crianças**: Repensando a Escola na Era da Informática; trad. Sandra Costa – Porto Alegre: Arte Médicas, 1994.

PILETTI, N.; ROSSATO, M, S. **Psicologia da Aprendizagem**: Da Teoria do Condicionamento ao Construtivismo. São Paulo: Editora Contexto, p. 35-46, 2011.

PINTO, N. Erro: uma estratégia para a diferenciação do ensino. In: ANDRÉ, M. E. D. A. de (Org.). **Pedagogia das diferenças na sala de aula**. Campinas: Papirus, 1999, p. 47-80.

SKINNER, B. Seleção por consequências. **Revista Brasileira de Terapia Comportamental e Cognitiva**, [S. l.], v. 9, n. 1, p. 129-137, 2007.

SKINNER, B. F. **Ciência e comportamento humano**. Tradução: J. C. Todorov & R. Azzi. São Paulo: Edart Ed. 2003.

TOURINHO, E. Z. Notas sobre o Behaviorismo de Ontem e de Hoje. **Psicologia, Reflexão e Crítica**, v. 24, n. 1, 186-194. 2011.

VALENTE, J. A. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, Edição Especial n. 4/2014, p. 79-97. Editora UFPR. Disponível em: <<http://ojs.c3sl.ufpr.br/ojs/index.php/educar/article/view/38645>>. Acesso em: 25 nov. 2018.

VASCO, Edinei. Uma Crítica ao Behaviorismo de Sidney Bijou: O (des) favor que a psicologia pode fazer à educação. **Revista Espaço Livre**, v. 10, n. 20, p. 66-78, 2015.

VERISSIMO, Danilo Saretta. A revisão das antinomias na psicologia: Do racionalismo cientificista ao estruturalismo. **Psicologia Argumento**, v. 31, n. 74, 2017.

## **Autores**

### **Luiz Carlos Leal Junior**

Instituto Federal de São Paulo, Campus Sertãozinho

E-mail: [lealjuniorluizcarlos@gmail.com](mailto:lealjuniorluizcarlos@gmail.com)

### **Egídio Rodrigues Martins**

Instituto Federal Norte de Minas Gerais, Campus Januária

E-mail: [egidio.martins@ifnmg.edu.br](mailto:egidio.martins@ifnmg.edu.br)

### **Cecília Pereira Andrade**

Instituto Federal de São Paulo, Campus Campinas

E-mail: [cecilia.andrade@ifsp.edu.br](mailto:cecilia.andrade@ifsp.edu.br)

# **SOBRE AS ORGANIZADORAS E OS AUTORES**

## **Sobre as organizadoras**

### **Sandra Maria Pinto Magina**

Graduada e Mestre em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco, Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres, Inglaterra, tendo realizado um Pós-doutorado na Universidade de Lisboa, Portugal e outro na Universidade de Salamanca, Espanha. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Santa Cruz, Bahia. É líder do Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento Ação Reflexão em educação Matemática: uma espiral dialética para a formação e desenvolvimento de conceitos matemáticos – RePARE em EdMat. Este grupo é certificado pela UESC e está no Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil do CNPq. Atua como coordenadora do GT 9 - Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática – da SBEM (2018-2021; 2021-2024). Atualmente pesquisa sobre o raciocínio algébrico de estudantes desde a Educação infantil até o final do Ensino Fundamental, bem como dos docentes que atuam nesses seguimentos. E-mail: [smpmagina@uesc.br](mailto:smpmagina@uesc.br)

### **Síntia Labres Lautert**

Graduada em Pedagogia (UNISINOS) e Psicologia, com Mestrado e Doutorado em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Pós-doutorado pela Tufts University – Poincaré Institute for Mathematics Education, USA. Docente do Departamento de Psicologia e da Pós-graduação em Psicologia Cognitiva da UFPE. Líder do *Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática* (NUPPEM/UFPE), cadastrado no diretório dos grupos de pesquisa do CNPq desde 2006. Atuou como vice coordenadora do GT09 Processos cognitivos e linguísticos (SBEM) em diferentes gestões. Atualmente pesquisa sobre campo conceitual multiplicativo e estatístico, ansiedade matemática e a tomada de decisão e a formação de conceitos de conceitos econômicos de estudantes da

escola básica.

E-mail: [sintria.lautert@ufpe.br](mailto:sintria.lautert@ufpe.br)

### **Alina Galvão Spinillo**

Graduada e Mestre em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco, Doutora em Psicologia do Desenvolvimento pela Universidade de Oxford, Inglaterra, tendo realizado Pós-doutorado na Universidade de Sussex, Inglaterra. Professora Titular do Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco. Lider do *Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM/UFPE)*. Pesquisadora Nível 1 do CNPq, realizando investigações na área de Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e Psicologia da Aprendizagem sobre os seguintes temas: Psicologia da Educação Matemática, produção e compreensão de textos de diferentes gêneros em crianças, e letramento em uma perspectiva psicológica. A partir de estudos de intervenção na área de linguagem e de conceitos matemáticos tem examinado as relações entre aprendizagem e desenvolvimento cognitivo, extraindo implicações educacionais relativas à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental.

E-mail: [alinaspinillo@hotmail.com](mailto:alinaspinillo@hotmail.com)

## **Sobre os autores**

### **Airton Carrião Machado**

Licenciado em matemática, mestrado e doutorado em Educação na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Atuou como professor da Educação Básica no Colégio Técnico da UFMG e no Programa de Mestrado Profissional em Educação e Docência (PROMESTRE) da UFMG. Desenvolve pesquisa na área de aprendizagem matemática na perspectiva sócio-histórico-cultural e na área de currículo e materiais curriculares.

E-mail: airtoncarriao@gmail.com

### **Antônio César Nascimento Teixeira**

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Grande ABC – UniABC; Mestre em Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. Membro dos grupos de pesquisa RePARE e GPEMEC, Professor substituto da Universidade Federal do Sul da Bahia – UFSB.

E-mail: cesarteixeira@gfe.ufsb.edu.br

### **Amarildo Melchiades da Silva**

Doutor em Educação Matemática pela UNESP Rio Claro/SP e Pós-Doutorado pela Rutgers University/USA. Professor Titular do Departamento de Matemática e do PPG em Educação Matemática da UFJF. Líder do Núcleo de Investigação, divulgação e estudos em Educação Matemática e um dos editores da Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática/ RIDEMA.

E-mail: xamcoelho@terra.com

### **Cecília Pereira Andrade**

Doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP (2013). Mestrado em Matemática Aplicada pela UNICAMP (2009). Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia – UFU (2005). Atualmente é professora efetiva do Instituto Federal de

Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Campinas. Tem experiência na área de Educação e Matemática, com ênfase em Resolução de Problemas.

E-mail: cecilia.andrade@ifsp.edu.br

### **Egídio Rodrigues Martins**

Doutor em Educação Matemática - UNESP Rio Claro. Mestrado em Ensino de Ciências Exatas pela Univates - Lajeado -RS. Especialista em Matemática e Estatística (2008), Informática na Educação (2006), pela Universidade Federal de Lavras. Possui Graduação de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia (2004). Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais. Campus de Januária. Ensina Matemática nos cursos Técnicos Integrado ao Ensino Médio e Licenciatura em Matemática. Orienta TCC nos cursos de Licenciatura em Matemática. Membro do GTERP. Grupo de Trabalho e Pesquisa em Resolução de Problemas - UNESP Rio Claro. Atua nas linhas de Pesquisas: Formação do Professor de Matemática e Resolução de Problemas.

E-mail: egidio.martins@ifnmg.edu.br

### **Ernani Martins dos Santos**

Graduado em Matemática pela UFRPE, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela UFRPE e Doutor em Psicologia Cognitiva pela UFPE. Líder do grupo de pesquisa NEPEJA (UPE) e pesquisador vinculado ao NUPPEM (UFPE), desenvolve pesquisas na área de Psicologia da Educação Matemática com enfoque no ensino e na aprendizagem matemática na perspectiva conceitual, abordagens matemáticas na ótica cultural, bem como sobre a formação de professores que ensinam matemática na vertente colaborativa. Professor Associado da Universidade de Pernambuco - UPE, atuando no Programa de Pós-Graduação em Formação de Professores e Práticas Interdisciplinares (PPGFPI) e na graduação em Matemática, atualmente é Pró-Reitor de Graduação da Universidade, gerenciando programas de fomento à formação de professores como a Residência Pedagógica e o PIBID e programas de fomento à graduação como o PET e a BIA-FACEPE. É o Vice-Diretor da Regional da SBEM em Pernambuco em seu segundo mandato.

E-mail: ernani.santos@upe.br

### **Fernanda Maurício Simões**

Professora da Rede Municipal de Santa Luzia (MG); graduação em Pedagogia, Mestrado e Doutorado em Educação (UFMG). Pesquisadora do Grupo de Estudos sobre Numeramento (GEN) – CNPq.

E-mail: simoesamaral@gmail.com

### **Irene Mauricio Cazorla**

Bacharel em Estatística pela Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima - Perú, Mestre em Estatística e Doutora em Educação pela UNICAMP e Pós-doutora em Educação Matemática pela PUC-SP. Membro do Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. Atua na linha de pesquisa em Educação Estatística, com foco na construção e desenvolvimento de sequências de ensino pautadas no letramento e pensamento estatísticos. É autora dos livros “Estatística para os anos iniciais do ensino fundamental”, “Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico” e “Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio.”

E-mail: icazorla@uol.com.br

### **Janete Bolite Frant**

PhD em Educação Matemática pela New York University. Professora adjunta na UFRJ na Faculdade de Educação e no Programa de Pós em Educação Matemática PEMAT e no Complexo de Formação de Professores da UFRJ. Atuou anteriormente no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula como professora e como coordenadora do programa de pós graduação em Educação Matemática (1994- 2000), no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da PUC\_SP (2001 - 2007), Pós Graduação em Educação Matemática da Uniban/ Anhanguera (2007/8, 20016). Nesses programas atuou orientando dissertações e teses, e como orientadora recebeu prêmio CAPES de melhor tese do ano em 2016. Desde 2000 as pesquisas recaem sobre Educação Matemática: Corpo, tecnologia e linguagem. Utilizando e contribuindo para a Teoria da Cognição Corporificada, e a relação desse prisma teórico com tecnologias digitais.

E-mail: janetebf@gmail.com



### **Leidy Johana Peralta Marín**

Graduada em Linguística pela Universidade Nacional de Colômbia, Mestre e Doutora em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco. Professora substituta no Departamento do Curso de Letras-Espanhol da Universidade Federal de Pernambuco. Tem experiência em pesquisa na área de Psicologia, com ênfase em Psicologia Cognitiva, Psicologia da Educação Matemática e Linguística Aplicada. Membro do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM/UFPE).

E-mail: ljperaltamarin@gmail.com

### **Lígia Sousa Bastos**

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. É membro do grupo de pesquisa RePARE e professora do apoio técnico da área de Matemática da equipe do Projeto TV Paraíba Educa da Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba.

E-mail: ligiasousabastos@gmail.com

### **Luiz Carlos Leal Júnior**

Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP, graduado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo - USP e Especialista em Psicopedagogia pela Centro Universitário Barão de Mauá. Atualmente, Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo- IFSP, orientador e pesquisador do ProfEPT. Tem experiência na área de Educação e Matemática, com ênfase em Resolução de Problemas, Filosofia da Educação Matemática e Análise Real. Foi Visiting Scholar na Rutgers University (EUA) e é líder do Grupo de Pesquisa em Educação, Matemática e Subjetividade - GPEMS.

E-mail: lealjuniorluizcarlos@gmail.com

### **Maria Conceição Ferreira Reis Fonseca**

Professora titular da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG); graduação em Matemática (UFMG); mestrado em Educação Matemática (UNESP-Rio Claro); doutorado (Unicamp) e pós-doutorado (Unisinos) em Educação. Líder do Grupo de Estudos sobre Numeramento (GEN) – CNPq; Credenciada no Programa de Pós-graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social (UFMG). Coordenadora do Programa de Educação Básica de Jovens e Adultos da UFMG (2005-2021). Atua como vice coordenadora GT09 Processos cognitivos e linguísticos (SBEM).

E-mail: mcfrfon@gmail.com

### **Monica Rabello de Castro**

Doutora em Psicologia pela PUC Rio, pós-doutorado em Comunicação pela Université de Montréal, Canadá. DEA em Ciências da Educação pela Université de Strasbourg, França. Mestre em Educação pela UGV e graduação em Matemática pela PUC Rio. É editora da Revista Educação e Cultura Contemporânea, desde a sua fundação. Atualmente é colaboradora do grupo de pesquisa GEMat-UERJ: Tem larga experiência na área de Educação e Comunicação, sobretudo nos processos argumentativos, atuando principalmente com os seguintes temas: educação matemática, representações sociais do trabalho docente, formação de professores, processos cognitivos e linguísticos em educação e escolarização de crianças de rua e indígenas.

E-mail: rabellomonica@uol.com.br

### **Ronaldo Barros Ripardo**

Graduado em Letras (UFPA) e em Matemática (Uepa). Mestre em Educação em Ciências e Matemática (UFPA). Doutor em Educação (USP). Professor Adjunto IV da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (Unifesspa), vinculado ao Instituto de Ciências Exatas (ICE), atuando como professor junto à Faculdade de Matemática (Famat) e ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM), do qual foi coordenador. Coordena a Rede de Educação Matemática e Científica (Recima). É líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Gepem). Pesquisa nas áreas de processos linguísticos em educação matemática e linguística textual.

E-mail: ripardo@unifesspa.edu.br

### **Vanessa Tomaz**

Professora Associada da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Licenciada em matemática, mestrado, doutorado e pós-doutorado em Educação. Membro do Grupo Teoria Histórico Cultural da Atividade na Pesquisa em Educação (CHATER) e líder do Grupo Estudos e Pesquisa em Educação Escolar Intercultural Indígena (GEPEEI). Atua como docente nas licenciaturas intercultural indígena e do Campo e no Programa de Pós-graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social. Coordena o Programa de Formação Continuada no nível de Especialização em Docência na Educação Básica (LASEB) e desenvolve pesquisas dentro da temática da aprendizagem matemática na perspectiva sócio-histórico-cultural e da Educação matemática e cultura: interfaces com a educação indígena ou com a educação do campo.

E-mail: vanessatomaz@gmail.com

### **Vera Lucia Merlini**

Graduada em Bacharelado em Matemática pela Faculdade de Filosofia e Letras da Fundação Santo André, Mestre e Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP. Líder do grupo de pesquisa RePARE (UESC) desenvolve pesquisas na área da Educação Matemática com enfoque no ensino e na aprendizagem Matemática na perspectiva da formação conceitual, bem como da formação de professores que ensinam matemática na vertente colaborativa. Atualmente sua pesquisa está atrelada à Estrutura Multiplicativa e a *Early Algebra* no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio algébrico. Professora Adjunto da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, atuando no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) e em cursos da graduação.

E-mail: vlmerlini@uesc.br

### **Vitor Rezende Almeida**

Doutorando em Ciências da Educação pela Universidad Nacional de Rosario - UNR, Argentina e mestre em Educação Matemática pela UFJF. Professor de Matemática na Educação Básica da Prefeitura de Juiz de Fora e do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais.

E-mail: xyvitor@gmail.com

**Viviane Cristina Almada de Oliveira**

Doutora e mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP/Rio Claro), graduada em Matemática com bacharelado em Informática e Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora. Atualmente é professora associada da Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ).

E-mail: [viviane@ufsj.edu.br](mailto:viviane@ufsj.edu.br)

Este Livro foi composto com a família tipográfica Segoe UI.



**Sociedade Brasileira de  
Educação Matemática**