(Organizadoras)

Nilce Fátima Scheffer | Rosane Rossato Binotto

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

Uma articulação entre Pesquisa e Extensão

Biblioteca do Educador

Coleção SBEM

Volume 27

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

(Organizadoras)
Nilce Fátima Scheffer
Rosane Rossato Binotto

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

Uma articulação entre Pesquisa e Extensão

Biblioteca
do Educador
Coleção SBEM
Volume 27

Sociedade Brasileira de
Educação Matemática

(Organizadoras)
Nilce Fátima Scheffer
Rosane Rossato Binotto

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:

Uma articulação entre Pesquisa e Extensão

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

2025

Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM

Universidade de Brasília - Campus Darcy Ribeiro

Caia Postal 4332 - AC UNB - CEP 70842-970 - Asa Norte/DF
www.sbembrasil.org.br | sbem@sbem.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Tecnologias digitais na formação de professores de matemática [livro eletrônico] : uma articulação entre pesquisa e extensão / Nilce Fátima Scheffer...[et al.] ; organização Nilce Fátima Scheffer, Rosane Rossato Binotto. -- Brasília, DF : SBEM Nacional, 2024. -- (Biblioteca do educador. Coleção SBEM ; 27)
PDF

Outros autores: Rosane Rossato Binotto, Pedro Augusto Pereira Borges, Vitor José Petry, Gabriela Finn, Mateus Henrique Zeiser, Sandy Maria Gaio.
Bibliografia.
ISBN 978-65-87305-20-2

1. Extensão universitária 2. Matemática - Ensino 3. Professores - Formação 4. Tecnologias digitais I. Scheffer, Nilce Fátima. II. Binotto, Rosane Rossato. III. Borges, Pedro Augusto Pereira. IV. Petry, Vitor José. V. Finn, Gabriela. VI. Zeiser, Mateus Henrique. VII. Gaio, Sandy Maria. VIII. Binotto, Rosane Rossato. IX. Série.

24-244700 CDD-370.71

Índices para catálogo sistemático:

1. Professores de matemática : Formação : Educação 370.71

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Obra publicada como produto da ação formativa "Formação de Professores de Matemática da Educação Básica, ações com Tecnologias Digitais e Objetos de Aprendizagem no contexto da Política Educacional da BNCC", submetida e aprovada no Edital SBEM-DNE 01/2021 - Formação continuada em serviço para professores que atuam na disciplina matemática nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio.

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Águas que iluminam, que fortalecem, que movem moinho.

Prefaciar uma obra é sempre uma honra, uma alegria e um desafio. Este último, sobretudo, por possibilitar ao prefaciador uma postura instigadora, suscitada pela leitura da obra.

Fruto de um projeto de extensão universitária – de 60 horas e realizado *online* –intitulado *Formação de Professores de Matemática da Educação Básica*, este livro traz reflexões e possibilidades inovadoras para o trabalho com áreas, algoritmos de multiplicações diversas, cônicas, equações, frações, pontos notáveis de triângulos.

A formação – inicial e continuada – de professores para atuarem em cenários educacionais cada vez mais impregnados de tecnologia é um desafio que não é apenas de equipamentos e de conectividade. Os programas formativos também devem superar a visão instrumental das tecnologias digitais, ou seja, aquela que as considera um mero adorno e objeto de ilustração, mas não promovem mudança na matemática ensinada e aprendida.

Além de reflexões que suscitam a necessidade de superarmos perspectivas instrumentalistas, outra primeira relevância desse e-Book é ser produto de uma iniciativa desenvolvida sob a Coordenação de Docentes do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, *Campus* Chapecó/SC, articulada ao Programa SBEM-FormAção2 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e com a parceria da Secretaria Municipal de Educação e da Gerência Regional de Educação, ambas da cidade de Chapecó.

Com a demanda atual - da curricularização da Extensão - de vincular as atividades de ensino, de pesquisa e de inovação com as extensionistas e inserir tecnologias digitais, aumenta a relevância desta obra para a formação docente em particular.

Ao ler mais um e-Book que situa a tecnologia em seus capítulos, fica o convite para que as formas de divulgação de nossas obras sejam ainda mais potencializadas pelas tecnologias digitais. Por exemplo, observar diretamente na tela – sem sair da obra – o movimento de um aplicativo ou de uma construção, um vídeo curto etc. Os livros eletrônicos já democratizaram bastante o acesso às publicações acadêmicas, e cabe agora gerarmos obras ainda mais dinâmicas com o favorecimento da integração tecnológica.

Ao prefaciar esta obra em um momento tão difícil para o estado do Rio Grande do Sul, deixo um abraço às colegas gaúchas e aos colegas gaúchos e faço aos educadores e educadoras matemáticas o convite para reflexão sobre a matemática que ensinamos e a real melhoria das condições socioambientais de nossos(as) discentes e da população. Ou, será que nossa área de conhecimento não tem responsabilidade nessas causas?

Que a sua leitura seja inspiradora. Por enquanto, minha inspiração e solidariedade aos colegas do RS vêm ao ouvir Kleiton e Kledir:

Lagoa Dos Patos[1]

Lá no fundo da lagoa
Dorme uma saudade boa
Longe desse céu sereno
O coração pequeno
E vazio ficou

Sei que a vida içou as velas
Mas em noites belas
Sou navegador

Lá no fundo da lembrança
Dorme um resto de esperança
De voltar à vida a toa
À beira da lagoa
Só molhando o pé

Seja em Tapes
São Lourenço
Barra do Ribeiro
Ou Arambaré

---

1 Disponível em: https://www.letras.mus.br/kleiton-e-kledir/165288/ Acesso em: 4 jun.2024

Lagoa dos Patos
Dos sonhos, dos barcos
Mar de água doce e paixão

Ah! Essa canção singela
Eu fiz só pra ela
Não me leve a mal
Ela que é filha da lua
Que ilumina as ruas
Lá do Laranjal

Marcelo Almeida Bairral
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Outono

APRESENTAÇÃO

Os trabalhos apresentados neste livro constituem-se em resultados de ações do Projeto de Extensão *Formação de Professores de Matemática da Educação Básica*, ações essas, que contemplaram atividades com Tecnologias Digitais e Objetos de Aprendizagem, considerando um olhar para o contexto da área de Matemática na Política Educacional da Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

A realização de projetos de extensão enfrenta uma série de desafios principalmente quando se trata da formação de professores de matemática para a utilização de Tecnologias Digitais. Parte significativa dos grupos de docentes e discentes da Licenciatura que atuam na extensão iniciaram esse processo não apenas por um desejo de contribuir para a transformação da escola, mas principalmente por perceber as lacunas existentes na formação.

A formação, acaba sendo fortemente direcionada, pelo excesso de trabalho teórico dando conta das disciplinas mais específicas em detrimento da prática exploratória que envolve, no caso da área de Matemática, a resolução de problemas, a representação geométrica e a investigação Matemática. A extensão no caso da universidade pública brasileira é uma das atividades que forma o tripé da universidade junto com o ensino e a pesquisa.

Tradicionalmente o campo das Tecnologias Digitais sempre envolveu uma discussão a respeito de interesses relacionados a prática de sala de aula, da qualidade dos profissionais e das instituições da área de formação de professores, motivo pelo qual a extensão assume seu papel na universidade.

A extensão é, portanto, um potencial espaço para os estudantes da licenciatura vivenciarem a prática, inserirem-se no contexto e compartilharem experiências com professores que estão atuando na realidade escolar. E seu objetivo é contribuir efetivamente para a melhoria daquele ambiente, colocando-se à prova da prática, do diálogo e da vivência na realidade escolar. Por outro lado, é fundamental que a extensão esteja vinculada a um objetivo concreto de necessidade social.

O exercício de vincular as atividades de ensino e pesquisa com ações de extensão tem um impacto muito positivo na universidade, principalmente para os cursos de Licenciatura, pois a extensão se torna um espaço de aproximação da universidade com a realidade a ser campo profissional dos futuros professores.

Quanto ao ensino, em lugar de travar o debate com os estudantes a partir de hipóteses teóricas ou de casos não vivenciados, é possível trazer uma problemática real e experimentada pelos estudantes, tornando o debate sobre a teoria mais próximo da realidade, e o conhecimento gerado nesse processo publicado em livros e periódicos.

Para tornar essa apresentação mais concreta, neste livro colocamos em destaque algumas experiências de extensão com e sem tecnologias digitais desenvolvidas no âmbito dos participantes do Grupo de Pesquisa em Tecnologias da Informação e Comunicação, Matemática e Educação Matemática – GPTMEM junto a professores da rede pública, garantindo a contribuição da universidade para o contexto educacional.

Assim, constituímos esse livro com reflexões teórico-práticas sobre a extensão, aspectos da BNCC para a área da Matemática, princípios das Tecnologias Digitais e exemplos inspiradores de Objetos de Aprendizagem que os professores discutiram no coletivo como possibilidades de enriquecimento à prática pedagógica em matemática, para, com essa experiência buscar novos caminhos para a dinâmica escolar.

No primeiro capítulo, "**PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA EM FORMAÇÃO: Uma Ação de Extensão**", de Nilce Fátima Scheffer, a autora apresenta uma reflexão a respeito da formação do professor de Matemática, das tecnologias digitais, dos objetos de aprendizagem de Matemática e das ações de extensão que foram promovidas pelo projeto de Extensão da UFFS em parceria com a SBEM.

No segundo capítulo, "**A BNCC E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**", de Gabriela Finn, a autora promove uma reflexão a respeito de pesquisa realizada a respeito da BNCC e suas contribuições para a área de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental no que tange a utilização das tecnologias digitais.

No terceiro capítulo, "**OBJETOS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**", de Nilce Fátima Scheffer e Mateus Henrique Zeiser, os autores problematizam conceitos matemáticos relacionados às grandes áreas da Matemática presentes nos Anos Finais do Ensino Fundamental, e tratam de recortes de quatro objetos de aprendizagem - OA produzidos em pesquisa realizada junto ao Curso de Licenciatura Matemática da UFFS, no período de 2020 a 2022, os quais, foram apresentados, discutidos e testados com os professores participantes da Ação de Extensão.

No quarto capítulo, "**CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS E ALGORITMOS NA MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES**", de Pedro Augusto Pereira Borges, o autor apresenta uma reflexão sobre uma parte de uma apostila voltada para Atividades de ensino de frações: construção de conceitos e algoritmos, que foi elaborada no Laboratório de Educação Matemática (LEM) do Curso de Matemática Licenciatura da UFFS/Chapecó em 2018, com o objetivo de reunir materiais e procedimentos de ensino que constituíssem uma base material para representar e discutir os conceitos, as propriedades e os algoritmos das operações com frações.

No quinto capítulo, "**OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM CONSTRUÍDOS NO GEOGEBRA: Uma Proposta para o Estudo de Cônicas**", de Vitor José Petry, Rosane Rossato Binotto e Sandy Maria Gaio, os autores colocam em destaque seis objetos virtuais de aprendizagem (OVA), construídos no *software* GeoGebra, para o estudo de cônicas. Os OVA apresentados resultam de atividades de pesquisa desenvolvida na Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), no período de 2020 a 2022, que foram apresentados e discutidos com os professores que participaram da Ação de Extensão.

No sexto capítulo, "EXPLORANDO PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO" de Nilce Fátima Scheffer e Gabriela Finn, as autoras promovem uma discussão a respeito de alguns dos pontos notáveis do triângulo, que são explorados no estudo apresentado, com a valorização da visualização e representação que é possível a partir de construções no GeoGebra, colocando em destaque algumas das atividades desenvolvidas com os professores em uma das Ações de Extensão.

Convidamos, os leitores a compartilhar conosco deste diálogo que busca repensar a prática pedagógica do professor de matemática com tecnologias digitais.

Nilce Fátima Scheffer

Rosane Rossato Binotto

Janeiro de 2023.

CAPÍTULO 1

PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA EM FORMAÇÃO: UMA AÇÃO DE EXTENSÃO

Nilce Fátima Scheffer[2]

1. INTRODUÇÃO

O Projeto de Extensão "Formação de Professores de Matemática" envolveu um curso com professores, na Modalidade On-line, totalizando 60h, um público de aproximadamente 60 participantes entre Professores de Matemática dos níveis de Ensino Fundamental II e Médio, no período de 10/09/2021 a 10/06/2022. A Ação de Extensão foi realizada sob a Coordenação de Docentes do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, *Campus* Chapecó/SC, em Edital de Extensão

2 Doutora em Educação Matemática pela UNESP e Pós-Doutora em Educação Matemática pela RUTGERS, EUA. Professora Adjunta da UFFS, dos Cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia. Professora permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE no *Campus* Chapecó/SC e Professora permanente do Programa de Pós Graduação Profissional em Educação - PPGPE, no *Campus* Erechim/RS. Líder do Grupo de Pesquisa GPTMEM - Grupo de Pesquisa em TIC, Matemática e Educação Matemática nilce.scheffer@uffs.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9199-9750.

da UFFS, juntamente com Edital específico de Formação da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, e contou com a parceria da Secretaria Municipal de Educação do município e da Gerência Regional de Educação, ambas da cidade de Chapecó. Os professores da área foram convidados a participar da Ação por meio do e-mail das escolas e dos próprios professores, além da divulgação ocorrida nas páginas da UFFS e da SBEM.

A formação, bem como o estudo realizado, tiveram por Objetivos: 1- Analisar e discutir com Professores de Matemática a Política Educacional da BNCC - Base Nacional Comum Curricular, inserção e utilização das Tecnologias Digitais – TD e Objetos de Aprendizagem – OA, aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática para o Ensino Fundamental II e Médio; 2- Identificar e analisar competências e habilidades propostas na BNCC para a utilização das TD nas áreas temáticas do ensino de Matemática para o Ensino Fundamental II e Médio; 3- Investigar e construir OA que se constituam em opções aos processos de ensino e de aprendizagem Matemática do Ensino Fundamental II e Médio; e 4- Participar como sujeito da pesquisa a ser realizada por meio da descrição e discussão de dados obtidos com os professores participantes nos encontros de formação.

O estudo realizado com os professores participantes teve avaliação e aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFFS – Registro CAAE: 50898721.80000.5564, Número do Parecer: 4.990.198, de 09 de setembro de 2021.

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão teórica a respeito do tema da proposta desenvolvida na Ação de Formação com os professores, tendo em vista informar ao leitor a nossa postura diante das TD para o ensino de Matemática, bem como caracterizar e fundamentar a definição assumida pelo grupo quanto à Extensão em formação de professores e a definição assumida para OA, que conduziu todos os encontros e a discussão estabelecida, resultando na prática a ser descrita em nos capítulos deste livro.

2. A EXTENSÃO PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E OS OBJETOS DE APRENDIZAGEM

2.1. A EXTENSÃO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A extensão é um espaço para a vivência prática da formação profissional oferecida pelo curso proporcionado dentro do Projeto de Formação, momento em que o futuro professor, no caso deste trabalho, se depara com a realidade, e seu objetivo é contribuir efetivamente com aquele ambiente, possibilitando a prova do conhecimento científico na relação dialógica com o contexto. Por outro lado, o vínculo da extensão com o curso e com um objetivo concreto de impacto na transformação social é o que dá sentido para esse tipo de projeto e, com certeza, um de seus maiores desafios, enquanto as políticas educacionais e outras diretrizes da universidade apresentam a transformação social como um dos objetivos da Extensão Universitária.

Ao olhar para a formação de professores de Matemática num período pós-pandemia, quando inúmeros estudantes ficaram sem condições de acompanhar aulas remotas por problemas com acesso às tecnologias e, também, pelo despreparo de muitos professores para as aulas remotas. Reconhecidamente a extensão assume sua importância pois é uma atividade que forma o tripé da universidade pública brasileira junto com o ensino e a pesquisa. Apesar disso, ela é o pilar mais fragilizado dessa estrutura, principalmente no campo tecnológico (ADDOR, 2021).

Sob tal ótica, a extensão – na rede pública de ensino para formação de professores de Matemática – tem sido uma prática do Curso de Matemática Licenciatura da UFFS, a qual será descrita neste livro, que envolve, principalmente, uma discussão a respeito da Política Educacional da BNCC e a utilização de OA na área de Matemática. Nossa preocupação com essa ação extensiva teve o foco nas tecnologias digitais, na utilização de alternativas digitais, na formação dos professores de Matemática, na construção de OA e na interpretação de competências e habilidades presentes na BNCC.

As atividades de extensão, quando bem planejadas e bem estruturadas, permitem à universidade socializar e democratizar os conhecimentos dos diversos cursos e áreas e, também, preparar seus profissionais, futuros professores, no caso das licenciaturas. É com esse propósito que a extensão universitária interliga a Universidade nas suas atividades com as demandas da população escolar regional.

No processo, a atividade formativa dessa ação se apresentou para a formação inicial e continuada de professores considerando a construção de novas práticas e ações pedagógicas. Nesse sentido, considera o conhecimento matemático para o ensino, que, a partir de Moreira e David (2005), promove uma reflexão profunda sobre o papel da Matemática escolar no currículo da licenciatura e sobre como ela pode contribuir para introduzir uma referência mais direta e intrínseca da prática escolar no processo de formação inicial do professor.

Desse modo, as ações baseadas na utilização de recursos digitais e objetos de aprendizagem situam o professor e o futuro professor de Matemática como um profissional que deve constantemente aprender a aprender e, principalmente, refletir criticamente sobre a sua prática, como evidenciado pelos estudos de Tardif (2008), Fiorentini e Oliveira (2013) e Abreu e Bairral (2010). Nesse sentido, passa a ser essencial propor essa reflexão pensando nos professores de Matemática em ação nas escolas, considerando como ponto de partida, obrigatoriamente, as crenças dos professores e submetê-las a um trabalho de reflexão e possível transformação, principalmente quanto à prática reflexiva sobre o conhecimento matemático.

Ações de Extensão, como as previstas no Edital[3] da SBEM, têm, por princípios, "atender as necessidades e as singularidades educacionais; e funcionar como um convite a reflexões necessárias para o exercício de sua atividade profissional". Além do desenvolvimento profissional de professores, as ações previstas no projeto funcionaram como um convite a reflexões necessárias

3 Edital SBEM-DNE 01/2021, Programa – SBEM – FormAção2, www.sbembrasil.org.br

para o exercício da atividade profissional docente para ensinar Matemática nos níveis Fundamental e Médio. Assim, de acordo com o Edital que conduziu este trabalho, o professor, em processo de desenvolvimento profissional, passa a ser produtor de conhecimento a partir de situações vivenciadas em espaços formais (escolas, institutos, universidades) e/ou não formais (museus, centros de cultura) de aprendizagem.

Assim, a Universidade, no seu papel de entidade formadora do conhecimento, comprometida com a transformação social, propõe, a partir de um projeto de extensão, ações, propiciando reflexão quanto ao ensino de forma integrada; neste caso, com componentes matemáticos e suas relações com o mundo digital. Nesses termos, um projeto de extensão que foca na atuação do acadêmico em ações no contexto escolar considerando o Educador Matemático em formação, garante uma possibilidade de preparo do profissional à prática docente, bem como aproxima a universidade do contexto escolar.

2.2. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E OS OBJETOS DE APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A atividade profissional pode ser aperfeiçoada proporcionando diversas inovações, dentre elas a presença das tecnologias digitais, que possibilitam a ampliação do impacto positivo sobre os processos de ensino e aprendizagem. Para Addor (2021), é fundamental que haja um processo de democratização do ensino tecnológico e que esse processo tenha como elemento central a extensão universitária no campo tecnológico, ou melhor, a extensão tecnológica.

O êxito da interação entre as tecnologias e o ensino de Matemática depende de vários aspectos, dentre eles a qualidade do recurso utilizado e a preparação do professor. Nessa ótica, Bairral (2009) destaca que a tecnologia por si só não muda a natureza da escola, tampouco, da formação profissional. Para este autor, é preciso que os docentes desenvolvam conhecimento crítico para incorporá-lo em seu cotidiano, propondo diferentes situações de aprendizagem a partir da interação com esses ambientes de tecnologias digitais, tendo em vista o enriquecimento da construção conceitual.

Para Giraldo e Muruci (2010), os resultados do uso de ambientes computacionais são consequências não de características intrínsecas dos próprios ambientes, mas sim da abordagem pedagógica em que estes estão inseridos. Por outro lado, para Miskulin (2003), o ambiente, por mais rico e construtivo que seja, por si só não é suficiente para promover contextos propícios à construção do conhecimento; a partir disso, pode-se dizer que a formação, aplicação e discussão estabelecida por uma prática de extensão tem seu papel para o professor em formação.

Dessa forma, para que os recursos tecnológicos sejam alternativas que realmente tornem o processo de ensino e de aprendizagem mais significativo, é fundamental que os professores estejam preparados, o que requer que, nos Cursos de Licenciatura, sejam utilizadas as TD, ou seja, desde o processo de formação docente. Para Bairral (2009), muitas vezes, na formação de professores, as iniciativas de utilização das TD tendem apenas a promover reflexões teóricas sobre a importância da informática sem uma implicação direta no contexto da formação inicial. Nesse sentido, vale destacar Maltempi (2008) quando afirma que a formação inicial dos cursos de Licenciatura em Matemática, no geral, pouco mudou, nas últimas décadas, no que se refere à incorporação das tecnologias na prática docente; consequentemente, continua-se formando professores cujo referencial de prática pedagógica é aquele no qual as tecnologias não fazem parte.

Tendo em vista a mudança dessa perspectiva, na última década estudos como de Scheffer (2015, 2016) e Scheffer e Heineck, (2016) acenam que os docentes que atuam em Cursos de Licenciatura em Matemática estão diante de um desafio, pois têm o compromisso de educar e, também, de preparar professores em formação contínua e futuros professores à prática profissional, incluindo o uso e a aplicação de tecnologias digitais no ensino, proporcionando o desenvolvimento de atividades investigativas. Outro aspecto a considerar, que se apresenta nos dias atuais, volta-se para a reflexão a respeito das propostas da Política Educacional da BNCC para a Educação Básica.

O trabalho apresentado a partir da prática do projeto de Formação aqui destacado volta-se para a discussão e construção de OA e sua aplicabilidade em percursos de aprendizagem e desenvolvimento de conceitos que podem se constituir em suporte para o ensino de matemática. Esses OA, principalmente na Educação Básica, consideram a realidade do contexto escolar, a faixa etária dos estudantes, a utilidade para as diferentes áreas e as possíveis alternativas que possam emergir a partir de recursos de vídeos, materiais manipulativos e tecnologias digitais (SCHEFFER et al., 2018).

Desse modo, o professor torna-se crítico em relação ao seu próprio trabalho e ao contexto no qual o mesmo ocorre (USTRA; PACCA e TERRAZZAN, 2016). Seguindo essa linha de raciocínio, este trabalho volta-se para a formação inicial e continuada de professores considerando a inclusão e a utilização de TD para o ensino de Matemática na Educação Básica.

A incorporação de novas propostas e recursos tecnológicos digitais aos materiais já utilizados nas aulas de Matemática, a partir de aplicação em atividades práticas, é uma possibilidade que se apresenta como resultado da criação de OA, que leva ao desenvolvimento de novos conceitos, exploração de diferentes métodos e consolidação da aprendizagem a partir de correções em suas aplicações na resolução de problemas. Assim, o educador passa a se envolver com a aplicação de TD na prática pedagógica.

As TD vêm ganhando espaço no cotidiano das pessoas, principalmente quando se trata de jovens e crianças. Por essa razão, é muito discutida a necessidade de utilizá-las na sala de aula, tendo em vista que, se bem exploradas, podem contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem se torne mais atraente, crítico, dinâmico e significativo. Perrenoud e Thurler (2000) já confirmavam isso quando apontavam que as tecnologias não transformam somente as formas de comunicação, mas também as formas de trabalhar, de pensar e de decidir, o que inclui mudanças significativas nas maneiras de ensinar.

Maltempi (2008) também confirma isso quando se refere às tecnologias como uma oportunidade para mudanças na educação, em especial na prática docente, de forma a atender aos desejos e demandas de conhecimento do estudante. Esse autor diz que as

TD fortalecem os processos de ensinar e de aprender, de forma que ideias para trabalhos pedagógicos, que antes eram inviáveis por limitações de custo, tempo, recursos físicos, dentre outros, tornam-se possíveis com a utilização das TD.

Desse modo, os recursos tecnológicos oferecidos podem enriquecer o trabalho exploratório desenvolvido pelo professor na sala de aula e fornecer ao estudante maior possibilidade de aprendizagem. De acordo com Mangan; Sarmento e Mantovani (2010), a informática na educação cria um ambiente facilitador, instigador, de reflexão crítica, de prazer pela pesquisa e de aprendizagem contínua e autônoma.

Outro aspecto que torna as TD aliadas da educação é destacado por Borba e Penteado (2007) quando afirmam que, devido às cores, ao dinamismo e à importância dada aos computadores pela sociedade, a sua utilização pode ser a solução para a falta de motivação dos alunos, fazendo com que eles se envolvam mais e continuem buscando soluções para os problemas apresentados. Nesse sentido, a abordagem visual tem demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações e explicações de resultados, oferecendo maior espaço à reflexão.

Assim, uma nova cultura profissional se estabelece com a disseminação de TD. Aspecto que Miskulin (2003) já destacava, ao voltar o olhar para o professor em formação, quando destacava que tudo isso implica um novo cenário, uma nova linguagem, novos conhecimentos e maneiras para atuar no meio profissional, aspecto que um trabalho de Extensão com as características aqui apresentadas desencadeia, ao partilhar saberes projetados em ações pedagógicas futuras.

3. O ESTUDO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

As TD se tornam acessíveis aos futuros professores, para que esses, em suas práticas educativas, utilizem os recursos de forma consciente e crítica na exploração e construção de conceitos matemáticos, criando cenários interativos de aprendizagem condizentes com os anseios e necessidades da nova cultura profissional advinda do avanço e da influência da Ciência e da Tecnologia.

Diante da importância de utilizar as TD nos cursos de formação docente e que estas sejam, para o futuro professor, um recurso importante para sua própria aprendizagem e para a construção de conhecimento em sala de aula, é válido que o professor tenha consciência do papel dessa implantação e saiba como fazê-lo para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem Matemática.

Bairral e Henrique (2021) destacam que as possibilidades da régua e compasso, por exemplo, já foram inovações, assim como os *softwares* de geometria dinâmica. Todos, permitiram novas abordagens e problematizações para o ensino de geometria e, atualmente, essas possibilidades estão disponíveis para professores e estudantes na versão aplicativos para *smartphones* ou *tablets*, o que demanda um (re)pensar do fazer Matemática.

Nesse sentido, Henrique (2021) nos leva a uma reflexão a respeito do valor de inovar nas aulas de Matemática, destacando que os *smartphones* inauguram uma nova era para os Laboratórios de Informática na Educação, valorizando, assim, o papel da visualização na tela do *smartphone* com o intuito de orientar o trabalho docente.

Em relação à visualização, de acordo com Settimy (2021), ela passou a ser vinculada a processos cognitivos e compreendida como um meio para a resolução de problemas, como papel e lápis e outros recursos tecnológicos. A visualização, posteriormente, teve a atenção destinada às dificuldades provenientes do ato de visualizar, porque envolvia muitos aspectos, como formar imagens mentais e interpretar desenhos que dependiam do recurso didático que estava em mediação.

No entanto, mais recentemente, os estudos convergiram para o resgate de habilidades relacionadas ao raciocínio geométrico, valorizando possibilidades variadas, como é o caso do GeoGebra, utilizado para os estudos e a construção dos OA que foram apresentados e utilizados com os professores nas ações realizadas no Projeto de Extensão.

As TD já deixaram de ser modismo e fazem parte das necessidades básicas do professor de Matemática e da vida das pessoas, conforme Lütchemeyer e Scheffer (2011) e Scheffer (2015), o que implica novas atitudes humanas e exige um outro perfil do indivíduo, principalmente dos profissionais da educação, na construção de conhecimentos.

Os OA representam iniciativas para os processos de ensino e de aprendizagem nas diferentes disciplinas. São recursos interativos que se voltaram, nos últimos anos, para os processos metodológicos que foram avaliados como entidade, digital ou não digital, e podem ser utilizados e reutilizados ou referenciados como suporte tecnológico à ação escolar. Portanto, para uma atividade ser considerada OA, por exemplo, dentro de um módulo de estudo, desde sua concepção, precisa seguir, de acordo com Miranda (2009), determinados princípios e normas, podendo ser reaplicada em outros contextos.

Segundo alguns estudos, de González e Ruggiero (2009) e Lütchemeyer (2012), os OA são recursos com funções e objetivos determinados que podem ser combinados com outros objetos. São considerados instrumentos de apoio às aulas, para interpretação, exploração e contextualização de conteúdos escolares, potencializando-os, a partir de mapas, gráficos e demonstrações, que podem ocorrer mediante vídeos, simulações interativas ou materiais manipulativos. Consequentemente, os OA são atividades que empregam diferentes mídias e recursos educacionais que podem se apresentar de diversas maneiras, constituindo parte do cenário de investigações e relações vividas pelo professor.

Um OA pode ser programado para utilizar materiais pedagógicos auto instrutivos do laboratório de ensino, ou até mesmo envolver programas mais elaborados que exigem um entendimento de linguagens de programação, ambiente natural e de formação e atuação, tornando possível a visualização, aspecto que fortalece a aprendizagem e a atribuição de significados matemáticos. Os OA e sua aplicabilidade envolvem percursos de aprendizagem no desenvolvimento de conceitos que podem se constituir em suporte para o ensino, principalmente na Educação Básica (SCHEFFER e ZEISER, 2022).

Nesse sentido, os saberes que os professores produzem e executam nos OA passam a assumir seu valor por estarem relacionados com as suas próprias histórias, vivências e culturas. Outro aspecto relacionado aos OA diz respeito ao ato de planejar suas aulas com o uso de tais objetos, conseguindo maior flexibilidade para se adaptar ao ritmo e ao interesse dos estudantes, tendo em vista seus objetivos de ensino. Então a utilização desses objetos poderá ressignificar a prática pedagógica, pois assim o processo de ensino e aprendizagem beneficia-se de várias linguagens para motivar ou contextualizar um tema; portanto, o uso desses objetos em sala de aula pode ser um facilitador, pois o professor pode utilizar aquele que melhor atender aos seus objetivos.

No que diz respeito à construção em matemática, principalmente quando se trata da análise, associação, construção geométrica, resolução de problemas e busca de diferentes soluções, esses OA têm contribuído de forma dinâmica para a aprendizagem em interação com as TD.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A reflexão aqui apresentada considera a prática profissional do professor, a docência, a variedade de recursos que temos à nossa disposição e que permitem uma discussão voltada à inserção das TD na escola. Além disso, outro aspecto a considerar é a atitude docente de perspicácia quanto à matemática contemplada nos OA e a validade da realização de intervenções no trabalho escolar, uma vez que pondera o papel do planejar, elaborar e construir objetos interativos tendo em vista o próprio contexto da prática educativa.

Diante disso, os OA com animação e possibilidades de simulação interativa auxiliam na compreensão e construção de significados. Os estudantes têm a oportunidade da visualização, de forma dinâmica e animada, de modo a testar e construir seus significados de maneira autônoma e interativa. Assim, os OA proporcionam a observação detalhada de certos fenômenos, reações ou acontecimentos a partir de simulações, de vivências e de intervenções. Nessa perspectiva, os objetos oferecem maior facilidade à compreensão de fenômenos e conceitos relativos aos temas em estudo.

Em um trabalho com estas características, as iniciativas de utilização das TD tendem a promover reflexões a respeito da importância da informática para a visualização e representação Matemática, desde a formação inicial do professor, implicando em novas atitudes humanas, além de outro perfil de indivíduo e de profissionais da educação.

Para concluir, podemos dizer que outra possibilidade que se apresenta é testar diferentes caminhos, acompanhar a evolução temporal das relações para a educação, de visualizar construções de diferentes pontos de vista, de comprovar hipóteses a partir de animações e simulações. Assim, as atividades interativas oferecem inúmeras oportunidades de exploração de fenômenos e conceitos muitas vezes inviáveis ou inexistentes em outras abordagens. Consequentemente, os OA ofereceram aos professores participantes da Ação de Extensão, uma visão diferente para o tratamento dos conceitos matemáticos da Educação Básica, relacionando-os com as tecnologias digitais.

5. REFERÊNCIAS

ABREU, P. F.; BAIRRAL, M. A. O uso que professores de matemática fazem da informática educativa em suas aulas. In: BAIRRAL, M. A. (org.). **Tecnologias informáticas, salas de aula e aprendizagens matemáticas**. Rio de Janeiro: Edur, 2010.

ADDOR, F. Extensão tecnológica e Tecnologia Social: reflexões em tempos de pandemia. **Revista NAU Social**, Salvador, v.11, n. 21, p. 395-412, nov. 2020/abr. 2021.

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática**. Rio de Janeiro: UFRRJ, 2009.

BAIRRAL, M. A.; HENRIQUE, M. P. **Smartphones com toques da Educação Matemática**: mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam. Curitiba: CRV, 2021.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3ª ed. 2ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema** [online], Rio Claro, vol.27, n.47, 2013, p. 917-938.

GIRALDO, V.; MURUCI, M. L. Funções reais em ambientes de geometria dinâmica: tecnologia e saberes docentes. In: JAHN, A. P.; ALLEVATO, N. S. G. **Tecnologias e educação matemática**: ensino, aprendizagem e formação de professores. Recife: SBEM, 2010.

GONZÁLEZ, L. A. G.; RUGGIERO, W. V. Collaborative e-learning and Learning Objects. **IEEE Latin America Transactions,** v. 7, n 5, p. 569-577, set 2009.

HENRIQUE, M. P. Estratégias, aplicativos e tarefas matemáticas. In: BAIRRAL, M. A.; HENRIQUE, M. P. **Smartphones com toques da Educação Matemática**: mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam. Curitiba: CRV, 2021, p.17-31.

LÜTCHEMEYER, R. R.; SCHEFFER, N. F. Objetos de aprendizagem na construção do conceito de logaritmos. In: **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**. Santo Ângelo, RS. v. 1, n. 2, p. 1-6, jul./dez. 2011.

LÜTCHEMEYER, R. R. **Investigar a conceituação de logaritmos e sua aplicação a partir da utilização de um Objeto de Aprendizagem**, 2012. 112f. Dissertação (Mestrado em Ensino Científico e Tecnológico) - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - Câmpus de Santo Ângelo, Santo Ângelo, RS. 2012.

MALTEMPI, M. V. Educação Matemática e Tecnologias Digitais: Reflexões sobre prática e formação docente. **Acta Scientiae**, Canoas, RS, v.10, p. 59-67, jan./jun. 2008.

MANGAN, P. K. V.; SARMENTO, P. F.; MANTOVANI, A. M. As tecnologias da informação e da comunicação: recortes de experiências no contexto da formação inicial do professor. **Colabor@ - Revista Digital da CVA – Ricesu**. v. 6, n. 22, 2010. Disponível em: http://pead.ucpel.tche.br/revistas/index.php/colabora/article/view/129/113. Acesso em: 01 nov. 2011.

MIRANDA, G. M. Concepção de Conteúdos e Curso Online, In: MIRANDA, G. M. **Ensino online e aprendizagem multimédia**. Lisboa: Relógio D`Água, 2009. p. 81-110.

MISKULIN, R. G. S. As possibilidades dialético-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org). **Formação de Professores de Matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

MOREIRA, P. C. e DAVID. M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PERRENOUD, P.; THURLER, M. G. **As competências para ensinar no século XXI**: A formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.

SCHEFFER, N. F. As TIC na formação do professor de Matemática: um olhar para a investigação de conceitos geométricos**.** In: LOSS, A. S.; CAETANO, A. P. V.; PONTE, J. P. P. (Org.). **Formação de professores no Brasil e em Portugal**: pesquisas, debates e práticas. Curitiba: Appris, 2015. p. 273-288.

SCHEFFER, N. F. A corporeidade e argumentação, na discussão da representação matemática com TIC. In. XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2016. **Anais**. São Paulo, SP, jul. 2016.

SCHEFFER, N. F.; HEINECK, A. E. Ambientes Informatizados de Aprendizagem na investigação de construções geométricas: uma experiência com professores do Oeste Catarinense. **Caminho Aberto -** Revista de Extensão do IFSC, SC, ano 3, n. 4, p. 16-22, jul. 2016.

SCHEFFER, N. et al. Uma interação com objetos virtuais de aprendizagem na discussão de conceitos geométricos. In: SCHEFFER, N.; COMACHIO, E.; CENCI, D. (Org.). **Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática**: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018, p. 31-61.

SCHEFFER, N. F.; ZEISER, M. H. A Pesquisa em Tecnologias Digitais e o Ensino de Matemática: uma discussão a respeito de objetos de aprendizagem. In SCHEFFER, N. F.; PASA, B. C. **Educação Básica, Educação Matemática e Objetos de Aprendizagem**. Curitiba: CRV, 2022, p. 17-36.

SETTIMY, T. Visualizar é mais do que ver: papel, lápis e o aplicativo GeoGebra 3D no desenvolvimento do pensamento visual. In: BAIRRAL, M. A.; HENRIQUE, M. P. **Smartphones com toques da Educação**

Matemática: mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam. Curitiba: CRV, 2021, p. 101-120.

TARDIF, Maurice Princípios para guiar a aplicação dos programas de formação inicial para o ensino. In: XIV Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino – XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. **Anais**, Porto Alegre: EDIPUCRS, 2008, p. 17-45.

USTRA, S. R. V.; PACCA, J. L. de A.; TERRAZZAN, E. A. Diários da prática pedagógica: pressupostos e contribuições para uma formação continuada emancipatória. In: GÜLLICH, R. I. da C.; HERMEL, E. do E. S. (Org.) **Educação em ciências e matemática**: pesquisa e formação de professores. Chapecó: UFFS, 2016, p. 35-58.

CAPÍTULO 2

A BNCC E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Gabriela Finn[4]

1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta um recorte de uma pesquisa qualitativa de análise documental, apresentada em curso de formação de professores de Matemática, relativa ao texto da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, levando em consideração a investigação da valorização e do incentivo que essa política curricular emprega à utilização de tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

4 Mestre em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE da UFFS *Campus* Chapecó/SC. Membro do Grupo de Pesquisa GPTMEM. gabifinn94@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-4224.

Para a composição dos dados, foram considerados os entendimentos presentes no texto da BNCC, utilizando-se da categorização e da Análise de Conteúdo de Bardin (2016) para o tratamento dos dados e resultados. Durante a pesquisa, destaca-se a importância da utilização das tecnologias digitais nos ambientes educacionais, como possibilidade de construção de saberes e de desenvolvimento do estudante em suas diferentes linguagens, especialmente nas aulas de Matemática.

Assim, este capítulo está constituído de partes que contemplam discussões a respeito da presença das tecnologias digitais no contexto escolar a partir da BNCC; do caminho metodológico da pesquisa; de um recorte de dados e resultados com sua discussão; categorização; e, por fim, explicitando as considerações finais.

2. REFLEXÕES EM RELAÇÃO ÀS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A BNCC

Com a redemocratização do Brasil e a promulgação da Constituição Federal de 1988, algumas mudanças positivas ocorreram no campo educacional (BRASIL, 2000), com alterações nos textos jurídicos, a área educacional foi marcada por avanços significativos. Exemplos disso são: a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB – Lei n.º 9.394/1996) e a aprovação do Plano Nacional de Educação (PNE – Lei n.º 10.172/2001).

Na perspectiva de melhorar a qualidade do sistema educacional brasileiro, em 2014 foi aprovado, pelo Congresso Nacional, o Plano Nacional de Educação (PNE – Lei n.º 13.005/2014), com vigência de 2014-2024. Norteado por diretrizes e metas, atenta-

-se também à importância do estímulo tecnológico educacional do país, com a BNCC sendo uma de suas principais estratégias. Finalizado em 2018, esse documento passou a ser considerado uma "referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares" (BRASIL, 2018, p. 8), indicando habilidades e competências, que os estudantes devem desenvolver no decorrer da Educação Básica.

Pautada por competências gerais da Educação Básica, a BNCC ressalta o uso das tecnologias digitais para "exercitar a curiosidade intelectual" (BRASIL, 2018, p. 9), além de incentivá-las para uma comunicação "crítica, significativa, reflexiva e ética" (BRASIL, 2018, p. 9).

Na BNCC, a Matemática do Ensino Fundamental tem como meta o "letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente" (BRASIL, 2018, p. 266), evidenciando que "os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem" são essenciais para o desenvolvimento das competências, do letramento digital e do Pensamento Computacional (BRASIL, 2018, p. 266). A partir dessas finalidades, o documento introduz as competências específicas para a área da Matemática, que destacam que o conhecimento tecnológico deve estar associado ao cotidiano dos estudantes para que ocorra o desenvolvimento do Pensamento Computacional (BRASIL, 2018).

Essa postura educacional vai ao encontro do entendimento de que as tecnologias digitais em ambientes escolares podem modificar as práticas pedagógicas, possibilitando diferentes modos de aprendizagem e resultando em ambientes mais interativos e dinâmicos (SCHEFFER e HEINECK, 2016). Assim, vale a pena analisar o que o documento assume como tecnologias digitais e a maneira como elas são propostas para as práticas pedagógicas.

3. CAMINHOS METODOLÓGICOS

Por ser de cunho qualitativo e baseado na análise documental, esta pesquisa "[...] é desenvolvida através da discussão que os temas e os dados suscitam" (SÁ-SILVA; ALMEIDA e GUINDANI, 2009, p. 11). Nessa perspectiva, a organização dos dados é realizada a partir da Análise de Conteúdo que, de acordo com Bardin (2016) é um conjunto de técnicas e procedimentos de análise, seu conteúdo, suas significações – explícitas ou ocultas, além de que "[...] favorece a observação do processo de maturação ou de evolução de indivíduos, grupos, conceitos, conhecimentos, comportamentos, mentalidades, práticas, entre outros" (SÁ-SILVA; ALMEIDA e GUINDANI, 2009, p. 2).

Baseada na leitura flutuante, iniciou-se o processo de codificação em nível semântico, considerando o tema de tecnologias digitais e palavras relacionadas ao tema "[...] que compõem a comunicação e cuja presença, ou frequência de aparição, podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido" (BARDIN, 2016, p. 135).

Com a finalidade de analisar os verbos que acompanhavam os termos relacionados às tecnologias digitais, empregou-se a taxonomia elaborada por Bloom (1956), onde seu objetivo foi de auxiliar nos planejamentos educacionais e na organização dos objetos de aprendizagem. Denominada por Taxonomia de Bloom, relaciona a atividade educacional com três desenvolvimentos: o cognitivo, o afetivo e o psicomotor. A partir do objetivo desta pesquisa, os objetos de conhecimento matemático relacionados às tecnologias digitais foram analisados a partir do domínio cognitivo.

Para Bloom (1956), o domínio cognitivo compreende a habilidade que o estudante tem de dar sentido aos conhecimentos escolares de maneira que façam parte de atividades do cotidiano, dando significado àquele conhecimento. Nessa perspectiva, a partir da leitura do documento, foram destacadas as competências e/ou habilidades que faziam referência ao uso de tecnologias digitais. Com esses dados, iniciou-se o processo de análise e categorização dos verbos considerando a Taxonomia de Bloom.

A partir desse aporte metodológico, o estudo investiga os verbos presentes nos objetos de conhecimento matemático relacionados às tecnologias digitais considerando as categorias propostas pela Taxonomia de Bloom para o domínio cognitivo, contemplando os Anos Finais do Ensino Fundamental, na área de Matemática.

No próximo item, são discutidos e analisados os verbos que fazem referência às tecnologias digitais, considerando as unidades temáticas da Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental.

4. DISCUSSÃO DOS DADOS

Para a interpretação dos verbos presentes nas habilidades da BNCC, utilizou-se a Taxonomia de Bloom (1956), da qual um dos objetivos é chamar a atenção dos educadores em relação a um processo evolutivo dos objetos de conhecimento e que envolve três domínios: o cognitivo, o afetivo e o psicomotor. Para o domínio cognitivo, a Taxonomia de Bloom prevê seis principais categorias: o conhecimento, a compreensão, a aplicação, a análise, a síntese e a avaliação. Para cada nível, associou-se um conjunto de ações (verbos) que auxiliam na classificação em cada um dos níveis da taxonomia.

De acordo com Bloom (1956), a categoria *conhecimento* refere-se ao reconhecimento de informações e conteúdos já abordados; a *compreensão* refere-se à significação do conteúdo através da interpretação do que foi entendido; a *aplicação* considera a habilidade de utilizar o conhecimento adquirido em outras situações (resolução de problemas); a *análise* compreende o processo de separar o conteúdo em partes e relacioná-los, identificando possíveis generalizações; a *síntese* abrange a combinação de partes isoladas e relacionadas a fim de formar um todo; e a *avaliação* refere-se à apresentação e defesa de opiniões baseadas em critérios específicos.

No Quadro 1, apresentam-se os verbos encontrados e os termos relacionados às tecnologias digitais referentes às habilidades. Nas colunas, apresenta-se as unidades temáticas da área de Matemática, dos Anos Finais do Ensino Fundamental, as unidades de significação a partir da Taxonomia de Bloom e a frequência dos termos relacionados entre as unidades de significação e as tecnologias digitais.

Quadro 1: Relação entre os verbos e os termos referentes às Tecnologias Digitais por Unidade Temática de Matemática e ano escolar do Ensino Fundamental – Anos Finais

Unidades temáticas	**Ano Escolar**				**Unidades de significação**	**Frequência entre as unidades de significação e as tecnologias digitais**
	6° Ano	7° Ano	8° Ano	9° Ano		
Números	Resolver e elaborar (4 vezes)	Resolver e elaborar	Resolver e elaborar	Resolver e elaborar	Compreensão Aplicação Síntese Avaliação	Calculadora (5 vezes) Tecnologias digitais (2 vezes)
Álgebra			Resolver e elaborar		Compreensão Aplicação Síntese Avaliação	Tecnologias (1 vez)

Geometria	Construir Utilizar	Reconhecer e construir Verificar	Construir Reconhecer e construir	Resolver Descrever	Conhecimento Compreensão Aplicação Síntese Avaliação	Softwares (8 vezes) Tecnologias Digitais (1 vez)
Grandezas e Medidas	Determinar			Reconhecer e empregar	Compreensão Aplicação	Tecnologias digitais (1 vez) Informática (1 vez) Computadores (1 vez)
Probabilidade e Estatística	Planejar e coletar	Planejar e realizar		Escolher e construir Planejar e executar	Conhecimento Compreensão Aplicação Síntese Avaliação	Planilhas eletrônicas (4 vezes)

Fonte: FINN (2022, p. 77).

De acordo com Quadro 1, a unidade temática Números apresenta os verbos *resolver* e *elaborar*, que têm uma frequência juntos, oito vezes no texto da BNCC, nos diferentes anos escolares. Aspecto que sugere ao estudante resolver e elaborar problemas com o uso de calculadora ou outra tecnologia digital em todos os Anos Finais do Ensino Fundamental. Já os verbos *resolver* e *elaborar* aparecem no texto da Base por quatro vezes no 6º Ano, uma vez no 7º e no 8º Ano e duas vezes no 9º Ano. Na perspectiva da Taxonomia de Bloom, esses verbos assumem o sentido de compreensão, aplicação, síntese e avaliação, sugerindo o uso de calculadora ou outra tecnologia digital para realizar cálculos e resolver problemas, dando significado ao conteúdo mediante a aplicação de conceitos.

Na unidade temática Álgebra, os únicos verbos presentes são *resolver* e *elaborar*, que aparecem apenas uma vez, no 8º Ano. Nesta habilidade, os verbos também assumem o sentido de compreensão, aplicação, síntese e avaliação de um objeto de conhecimento matemático que pode ter auxílio de tecnologias, não especificadas se são digitais ou não.

A unidade temática Geometria possui a maior variedade de verbos: *construir, utilizar, reconhecer, verificar, resolver* e *descrever*. No 6º Ano, os verbos *construir e utilizar* assumem o sentido de compreensão, aplicação e síntese dos objetos de conhecimento utilizando as tecnologias digitais ou *softwares*. No 7º Ano os verbos *reconhecer* e *construir* aparecem juntos e assumem o sentido de conhecimento, compreensão, aplicação e síntese dos objetos de conhecimento, enquanto o verbo *verificar* remete à ideia de avaliação a partir da verificação de propriedades e aplicação de conceitos. No 8º Ano, os verbos *construir* e *reconhecer* aparecem juntos e o verbo *construir* aparece sozinho e, assumem o sentido de compreensão, aplicação e síntese dos objetos de conhecimento. No 9º Ano os verbos são *resolver* e *descrever* e, assumem o sentido de conhecimento, compreensão e avaliação.

Na unidade temática Grandezas e Medidas, os verbos que aparecem são: *determinar, reconhecer* e *empregar*. No 6º Ano, o verbo *determinar* assume o sentido de compreensão e sugere o uso de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem. Para o 9º Ano, os verbos *reconhecer* e *empregar*, que aparecem juntos, assumem o sentido de compreensão e de aplicação, respectivamente, dos objetos de conhecimento.

Na unidade temática Probabilidade e Estatística, os verbos junto aos termos são *planejar, coletar, realizar, escolher, construir* e *executar*. No 6º Ano, os verbos que aparecem juntos são *planejar* e *coletar* e assumem o sentido de síntese e de conhecimento, respectivamente. No 7º Ano, os verbos *planejar* e *realizar* aparecem juntos e manifestam o sentido de síntese e de aplicação. No 9º Ano, aparecem juntos os verbos *escolher* e *construir*, dando o sentido de compreensão, avaliação e aplicação. Ainda no 9º Ano, os verbos *planejar* e *executar* também aparecem juntos e expressam o sentido de síntese e de aplicação.

5. CATEGORIZAÇÃO

A análise documental da BNCC relativa à área da Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental, considera as interpretações relacionadas à presença das tecnologias digitais para o ensino da matemática tendo em vista a pesquisa. Com base na Análise de Conteúdo de Bardin (2016), analisou-se as significações dos termos encontrados ao longo do texto da Base. Essa análise transita entre a interpretação dos dados presentes no documento da Base e a fundamentação teórica sobre o tema.

As categorias de análise foram estabelecidas a partir dos termos relacionados às unidades temáticas determinadas no documento e das tecnologias digitais para o ensino de Matemática, levando em conta a interpretação dos verbos presentes nas habilidades e competências da Base, considerados a partir da Taxonomia de Bloom (1956) assumida no referencial da pesquisa, que foram definidas pela frequência dos verbos presentes no texto da Base em relação as categorias do domínio cognitivo de Bloom.

Dessa maneira, foram consideradas três categorias: **as tecnologias digitais e a aplicação matemática**, que se refere à aplicação de métodos, regras e teorias; **as tecnologias digitais e a compreensão Matemática**, que é a capacidade de dar significado aos conteúdos estudados; e **as tecnologias digitais e a síntese Matemática** que se refere a habilidade de associar os conteúdos estudados e estabelecer relação entre eles. Elas se apresentam nessa ordem pela maior ocorrência de verbos na categoria de aplicação, seguida pela categoria de compreensão e de síntese.

Nos itens a seguir, são analisadas as categorias definidas anteriormente.

5.1. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A APLICAÇÃO MATEMÁTICA

Essa categoria fundamenta-se na aplicação de tecnologias digitais no ensino da Matemática, considerando a Taxonomia de Bloom (1956) e o levantamento dos verbos relacionados à aplicação das tecnologias digitais e aos objetos de conhecimento. Os verbos que estão contemplados – nas habilidades e competências – na unidade de significação e aplicação são: resolver, elaborar, construir, utilizar, empregar, realizar, escolher e executar. Para Bloom (1956), esses verbos contemplam a capacidade de aplicar o conhecimento aprendido em outras situações.

Nas habilidades EF06MA03, EF06MA09, EF06MA11, EF06MA13, EF06MA21, EF06MA22, EF07MA02, EF07MA21, EF07MA36, EF08MA04, EF08MA09, EF08MA15, EF08MA18, EF09MA05, EF09MA11, EF09MA18, EF09MA22 e EF09MA23 estes verbos estão associados ao uso de calculadora, *softwares* ou tecnologias digitais na resolução ou elaboração de problemas, o que reforça a ideia de aplicação do conteúdo aprendido.

Nessa perspectiva, incentivar o uso da calculadora, dos *softwares* e das planilhas eletrônicas, quando combinados à um bom planejamento, "[...] tornam-se poderosos instrumentos para despertar novas opiniões, relacionar conceitos, despertar a curiosidade e resolver problemas" (SCHEFFER, 2020, p. 79).

Ainda, o uso das tecnologias digitais nas atividades escolares

> [...] contribui para que os processos de ensino e aprendizagem da Matemática se tornem uma atividade experimental e rica, quando instiga o educando a desenvolver processos fundamentais que caracterizam o fazer matemático, tais como experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar, demonstrar, dentre outros (MOTTA, 2017, p. 178).

Isto é, o uso das tecnologias digitais em ambientes escolares pode oferecer diferentes oportunidades de abordagem e investigação dos conceitos e propriedades matemáticas. Vivenciando diferentes experiências e estratégias é que o estudante poderá estabelecer relações entre o conhecimento matemático a partir das tecnologias digitais. Com essa análise, as tecnologias digitais, na BNCC, atuam como recursos de apoio no desenvolvimento das habilidades e competências propostas.

5.2. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A COMPREENSÃO MATEMÁTICA

Baseada nos termos relacionados à matemática e às tecnologias digitais, e nos verbos encontrados nas habilidades, a partir da classificação de Bloom (1956), pode-se observar a unidade de significação: compreensão no desenvolvimento dessa categoria. Os verbos encontrados para essa unidade de significação foram construir, reconhecer, resolver e descrever. De acordo com o autor, essa unidade de significação refere-se ao significado dado ao conceito a partir da interpretação do estudante.

Nas habilidades EF06MA03, EF06MA09, EF06MA11, EF06MA13, EF06MA21, EF07MA02, EF07MA21, EF08MA04, EF08MA09, EF08MA15, EF08MA18, EF09MA05, EF09MA11, EF09MA15 e EF09MA22 recomenda-se a utilização de calculadora, *softwares*, planilhas eletrônicas ou outras tecnologias digitais e, também, menciona a informática e computadores.

Nesse sentido, Scheffer e Pasin (2013) defendem que “o uso das tecnologias como aliadas do ensino de Matemática, e como parte integrante do processo da descoberta, incentiva a compreensão, a significação e a construção dinâmica na tela do computador” (SCHEFFER; PASIN, 2013, p. 11). Isto é, as tecnologias digitais podem propiciar a investigação e exploração ampla dos conhecimentos escolares, indo ao encontro de Duval (2012, p. 270), que assume ser “[...] essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...)”.

Nessa perspectiva, o documento assume as tecnologias digitais como instrumentos que podem ser favoráveis no desenvolvimento de determinadas habilidades, principalmente a partir da visualização de objetos matemáticos.

5.3. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A SÍNTESE MATEMÁTICA

Considerando a Taxonomia de Bloom (1956) na análise dos verbos presentes nos objetos de conhecimento relacionados às tecnologias digitais e à Matemática, fundamenta-se a unidade de significação síntese. Nessa unidade de significação, os verbos encontrados foram: elaborar e construir. Segundo Bloom (1956), a unidade de significação síntese compreende a ideia de unir partes para formar um todo.

Nas habilidades EF06MA03, EF06MA09, EF06MA11, EF06MA13, EF06MA21, EF07MA02, EF07MA21, EF08MA04, EF08MA09, EF08MA15, EF08MA18, EF09MA05 e EF09MA22 são sugeridas a utilização de calculadora, *softwares*, planilhas eletrônicas e outras tecnologias digitais. Nessas habilidades, as tecnologias digitais assumem o papel de descrição de entendimentos, sendo utilizadas para auxiliar no desenvolvimento de síntese de determinados conhecimentos matemáticos.

Isto é, o uso das tecnologias digitais pode facilitar que o estudante combine e relacione os conhecimentos adquiridos, promovendo a criatividade e a investigação, uma vez que podem envolver diferentes conceitos. Além disso, as tecnologias digitais podem ser consideradas para além do ambiente escolar, podendo levar à discussões e reflexões também de assuntos do cotidiano.

Nesse sentido, a BNCC sugere que as tecnologias digitais podem auxiliar na descrição de entendimentos, servindo como suporte para determinadas relações entre os conhecimentos estudados.

6. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A BNCC – uma das estratégias do PNE em vigência para o fomento de uma educação de qualidade para todos – se apresenta como uma possibilidade de promover um avanço na utilização das tecnologias digitais para além de um suporte no processo de aprendizagem (BRASIL, 2018).

A perspectiva dada às tecnologias digitais na Base ainda está relacionada a verbos que se denominam habilidades e competências e a um instrumento de apoio para atividades, restrito a alguns conteúdos e conceitos matemáticos, como observamos nas análises das categorias. Isso nos mostra que a Base não tem uma definição do que assume como tecnologia digital e que pouco são recomendadas. Quando são mencionadas, estão reduzidas a um utilitarismo que, se mal aproveitadas, pouco contribuem para a criatividade e criticidade do estudante, características que o documento reconhece importantes ao usar as tecnologias digitais.

Com essa análise, sabe-se quais as tecnologias digitais são indicadas pela Base por Unidades Temáticas e ano escolar. A escolha da Taxonomia de Bloom (1956) para a análise dos verbos encontrados nas habilidades da Matemática que relacionam as tecnologias digitais, vai ao encontro de uma concepção comportamentalista que se aproxima da concepção assumida pelo texto da BNCC, ao considerar a aprendizagem baseada em competências e habilidades. Com essa análise, observamos que o texto da Base correlaciona as tecnologias digitais em apenas 23 das 121 habilidades previstas para a matemática e remete, principalmente, aos verbos *resolver* (nove vezes), *elaborar* (oito vezes) e *construir* (quatro vezes) como consta no Quadro 1.

Apesar da Base indicar o uso das tecnologias digitais em todos os anos finais do Ensino Fundamental, percebe-se que ainda há "[...] um utilitarismo tecnológico que remete a um uso ferramental da tecnologia, porém não a considera em sua dimensão simbólica, não física, isto é, como uma extensão do nosso corpo" (BAIRRAL, 2021, p. 105). Isto é, as diversas pesquisas que indicam o uso das tecnologias digitais para além de complemento de atividades escolares não foram consideradas pelo documento.

Dessa maneira, entende-se que a Base recomenda as tecnologias digitais na aplicação, resolução e elaboração de problemas e na construção de objetos matemáticos para auxiliarem na compreensão e síntese dos conteúdos e conceitos dos anos finais do ensino fundamental, mas com uso pouco abrangente nos objetos de conhecimento matemáticos.

7. REFERÊNCIAS

BAIRRAL, M. A. Currículo de matemática com tecnologias: Roda Viva Utilitária. **EMR-RS**, v. 2, n. 22, p. 92-110, 2021.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BLOOM, B. S. Taxonomy of educational objectives, handbook I: The cognitive domain. New York: David McKay Co Inc, 1956.

BRASIL, Ministério da Educação. **Lei n.º 010172, de 9 de janeiro de 2001**. Aprova o Plano Nacional de Educação.

BRASIL, Ministério da Educação. **Lei n.º 13.005, de 25 de junho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação.

BRASIL, Ministério de Educação e Cultura. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

BRASIL. Constituição. **Constituição da República Federativa do Brasil**. 25. ed. São Paulo: Saraiva, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC: Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc. Acesso em: 20 dez. 2022.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Méricles T. Moretti. REVEMAT, Florianópolis, SC, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012.

FINN, G. **A presença das tecnologias digitais para o ensino de matemática na Base Nacional Comum Curricular**. p. 106. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. Chapecó, 2022.

MOTTA, M. S. Formação inicial do professor de matemática no contexto das tecnologias digitais. **Contexto & Educação**, Ijuí, RS, v. 32, n. 102, p. 170-204, 2017.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. Revista Brasileira de História & Ciências Sociais, Rio Grande, RS, ano I, n. 1, p. 1-15, 2009.

SCHEFFER, N. F. Objetos de aprendizagem na pós-graduação: uma discussão a respeito de significados matemáticos. **Revista Perspectiva**, Florianópolis, SC, v. 44, n. 167, p. 71-81, 2020.

SCHEFFER, N. F.; HEINECK, A. E. Ambientes Informatizados de Aprendizagem na investigação de construções geométricas: uma experiência com professores do Oeste Catarinense. Caminho Aberto: Revista de Extensão do IFSC, ano 3, n. 4, p. 16-22, jul. 2016.

SCHEFFER, N. F.; PASIN, P. A argumentação de professores de matemática suscitada pelo uso de softwares dinâmicos: construindo significados. **Vidya**, Santa Maria, RS, v. 33, p. 9-17, 2013.

CAPÍTULO 3

OBJETOS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Nilce Fátima Scheffer[5]

Mateus Henrique Zeiser[6]

1. INTRODUÇÃO

A formação de professores em tecnologias digitais nos dias atuais constitui uma das principais frentes de trabalho para as Políticas Educacionais. Para início de conversa, vale destacar que, neste capítulo, vamos apresentar alguns recortes de Objetos de Apren-

5 Doutora em Educação Matemática pela UNESP e Pós-Doutora em Educação Matemática pela RUTGERS, EUA. Professora Adjunta da UFFS, dos Cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia. Professora permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE no *Campus* Chapecó/SC e Professora permanente do Programa de Pós Graduação Profissional em Educação - PPGPE, no *Campus* Erechim/RS. Líder do Grupo de Pesquisa GPTMEM- Grupo de Pesquisa em TIC, Matemática e Educação Matemática. nilce.scheffer@uffs.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9199-9750.

6 Mestrando em Matemática Aplicada, IME-USP. Licenciado em Matemática pela UFFS, *Campus* Chapecó/SC. mateushenriquezeiser@outlook.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0861-2218.

dizagem – OA construídos em pesquisa realizada no Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, já citada no primeiro capítulo.

Esses OA foram instrumentos-base da Ação de Extensão que se transformou em uma ampla discussão a respeito da prática pedagógica dos professores de Matemática com tecnologias digitais, tendo em vista a formação continuada integrada com a formação inicial promovida pelo projeto de parceria entre UFFS e SBEM.

Neste capítulo, problematizamos conceitos matemáticos relacionados à área da Matemática e tratamos de recortes dos quatro OA produzidos na pesquisa realizada no Curso de Matemática Licenciatura da UFFS, *Campus* Chapecó/SC, no período de 2020 a 2022, os quais foram apresentados, discutidos e testados com professores, por serem objetos produzidos para cada um dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Considerando esse contexto, o capítulo contempla a discussão e exploração da Matemática, prevista para cada um dos OA propostos na sua estrutura e características previstas. E para finalizar, apresentamos uma análise dos objetos indicados na formação de professores de Matemática por meio de um trabalho colaborativo, e de estratégias de análise propostas.

2. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES – IMPLICAÇÕES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

As Políticas Educacionais voltadas para a formação de professores, principalmente aquelas direcionadas para a inclusão digital na Educação Básica, estão em acordo com a Resolução nº. 2/2015, (BRASIL, 2015), que determina as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial de professores em nível superior. No caso, dos cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica e cursos de segunda licenciatura, elas propõem a prática enquanto componente curricular nos cursos de formação inicial (SCHEFFER, SPERANDIO e BATTISTI, 2021).

A partir dessa Resolução, um novo olhar se lançou na direção da formação de professores, valorizando o planejamento, a formação didático-metodológica e o incentivo à formação continuada a partir dos cursos de extensão. Momento em que ocorreu a homologação da formação que articulava a teoria e a prática, na busca de profissionalização do professor (NÓVOA, 2002), sendo que, o maior beneficiado dos processos pedagógicos foi o professor, influenciado pelas mudanças do cenário social.

As relações estabelecidas nos OA, que serão apresentados neste capítulo, referem-se à investigação de conceitos relativos ao *Estudo de Frações*, no caso, considerando a *Equivalência*. Ao estudo de *Equações do Primeiro Grau*, quando discutimos um pouco da história das equações e explicitamos também algumas aplicações de equações, como consta nos capítulos do livro digital que compõe o OA construído no GeoGebra. Outro objeto refere-se ao estudo de Áreas de Figuras Planas e, por último, destacamos alguns dos exemplos que compõem o objeto construído para a *Análise Gráfica*.

2.1. O ESTUDO DE FRAÇÕES

2.1.1. NÚMEROS RACIONAIS E FRAÇÕES, ALGUMAS DISCUSSÕES INICIAIS

Os números racionais estão relacionados às diferentes representações, como as dízimas periódicas, os decimais e a porcentagem. Além disso, os alunos não estão acostumados com termos relacionados a frações, como *quinto*, *quarto*, etc. (KIEREN, 1980). Segundo Lamon (2012), o sentido de frações e números racionais é um tema complexo que confunde professores e alunos.

Nesse sentido, a fração é um Número Racional, quando escrita na forma a/b, em que a e b são números naturais e b é diferente de 0. Por outro lado, se substituirmos o valor de a ou de b por um número irracional, a fração não representa um número racional. No entanto, a fração para representar o conjunto dos Irracionais não é comumente usada (SILVA, 2005).

Igualmente, Powell (2018b; 2019a) reafirma a complexidade das frações, pois, conforme avançamos na escolarização, sua compreensão se torna importante e está presente em conceitos mais avançados de Matemática. Para o autor, negligenciar esse conteúdo traz implicações negativas na aprendizagem da Álgebra, pois os números racionais são uma base para esse ramo da Matemática (POWELL, 2018b). Tais aspectos são determinantes para o futuro acadêmico, profissional e social dos estudantes.

Quando olhamos para Powell (2018a; 2019b), que realizou um estudo em que os alunos tiveram inicialmente o contato com frações na perspectiva da medida, utilizando as *Barras Cuisenaire*, observamos ter o autor constatado que “os participantes se apropriam da ideia de magnitude de frações-de-quantidade com base nas imagens evocadas das barras e, por si mesmos, [vão] construindo expressões de comparações fracionárias” (2019b, p. 50).

Por outro lado, quando observamos a produção brasileira relacionada a esse tema, a maioria das publicações brasileiras “fundamentam-se em autores que se referem à construção do conceito e da noção de fração, principalmente aqueles que estabelecem relação com a interpretação parte-todo” (SCHEFFER e POWELL, 2020, p. 18).

O Objeto de Aprendizagem relativo ao estudo de Frações pode ser utilizado no 6º Ano do Ensino Fundamental e faz parte da Unidade Temática – Números, (BRASIL, 2018). Esse Objeto foi construído no GeoGebra em forma de livro digital, que pode ser acessado pelo link: https://www.geogebra.org/m/mupb9pdc. O *software Mathigon* e o *Google Slides* também foram utilizados para configurar e gerar algumas ilustrações. Esse livro digital conta com sete capítulos, que, de forma geral, são descritos por:

1º capítulo – Ideias introdutórias sobre frações. Este capítulo busca introduzir a ideia principal da fração, na relação e representação das partes com o todo.

2º capítulo – A equivalência. Como o próprio nome sugere, este capítulo busca intuitivamente explorar a ideia de frações equivalentes.

3º capítulo – Tipos de frações. Busca definir, mediante exemplos, frações próprias e impróprias, características, representações e diferenças.

4º capítulo – Simplificação de frações. Este capítulo, a partir de exemplos e perguntas exploratórias, apresenta modos de representar frações e como encontrar uma fração irredutível a partir do conceito de equivalência.

5º capítulo – Adição e subtração de frações. Neste capítulo, as operações de adição e subtração são estudadas a partir de frações equivalentes e exemplos geométricos.

6º capítulo – Multiplicação e divisão de frações. Este capítulo parte da representação geométrica de frações para ilustrar as operações de multiplicação e divisão de frações.

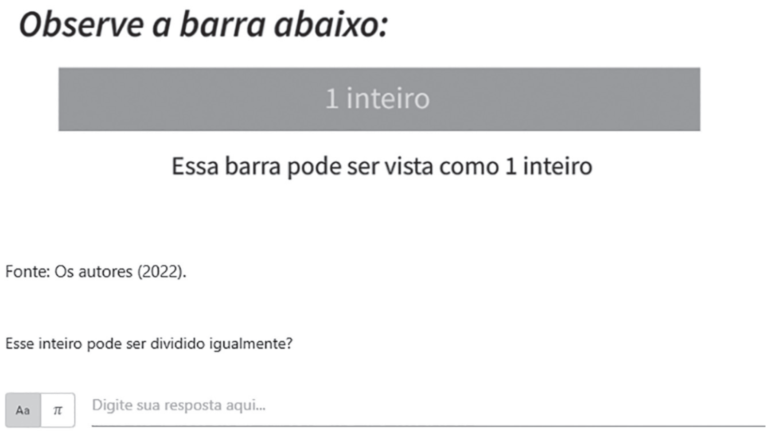
7º capítulo – Exercícios aplicados sobre Frações. Neste capítulo, são propostos alguns problemas aplicados sobre frações.

O primeiro recorte a ser apresentado aqui faz parte do 2º capítulo do livro digital para o *Estudo de Frações*, que trata do tema equivalência, descrito de forma mais detalhada a partir de capturas de tela retiradas da sua composição no GeoGebra.

2.1.2. A EQUIVALÊNCIA

Apresentamos uma discussão sobre equivalência de frações que se apoia nas representações da régua de frações. Em um primeiro momento, há a introdução do conceito de um inteiro, conforme a Figura 1.

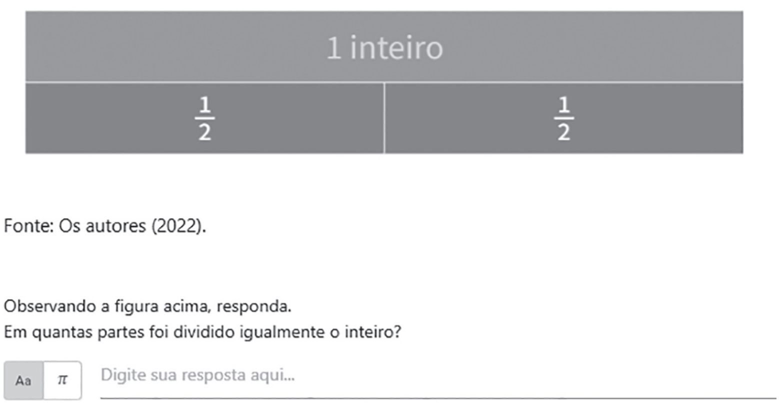
Figura 1 – Um inteiro.



Fonte: Os Autores (2022).

A partir da Figura 1, discutimos a ideia da divisão de inteiros, como está apresentada na Figura 2.

Figura 2 – O inteiro dividido em duas partes iguais.



Fonte: Os Autores (2022).

Na Figura 2, o inteiro é apresentado dividido em meios. Um processo semelhante é feito para a divisão do inteiro em terços, quartos e quintos e, da mesma forma que para a divisão em meios, exploramos o número de partes em que o inteiro foi dividido. Na sequência deste capítulo, são feitas comparações entre frações equivalentes, como no exemplo da Figura 3.

Figura 3 – Um meio é equivalente a dois quartos e 1 inteiro é igual a quatro quartos.

Veja que o $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (um meio é igual a um quarto mais um quarto).

Observe que $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (um inteiro é igual a um quarto mais um quarto mais um quarto mais um quarto, ou seja, um inteiro é igual a quatro vezes um quarto).

$\frac{1}{1} = 4.\frac{1}{4} = 1$

Fonte: Os Autores (2022).

Diante dessas representações propostas na Figura 3, perguntas exploratórias buscam relacionar a representação geométrica da fração comparando com o inteiro e com a representação numérica Figura 4.

Figura 4 – Comparação de frações.

Observando as atividades anteriores podemos perceber que:

$\frac{1}{2}$ é igual a?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ $\frac{1}{4}$

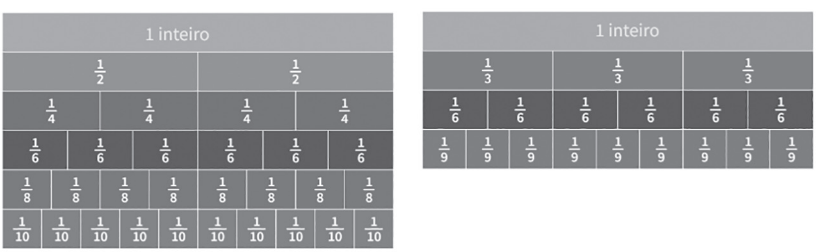
B ☐ $\frac{2}{4}$

C ☐ $\frac{2}{2}$

Fonte: Os Autores (2022).

Na Figura 4, temos a partir das representações presentes na Figura 3, atividade exploratória do número de partes a ser dividido um inteiro em quatro partes iguais, o que é equivalente a um meio. Na sequência deste capítulo, são construídas as classes de equivalência, como podemos observar na Figura 5.

Figura 5 – Classes de Equivalência em relação ao inteiro.



Fonte: Os Autores (2022).

Na Figura 5, primeiro apresentamos a divisão do inteiro em meios, quartos, sextos, oitavos, décimos e, na sequência, em terços, sextos e nonos. A partir disso, podemos observar as relações de comparação com o inteiro, ou seja, por exemplo, três terços representam um inteiro. Após essas representações, são feitas algumas perguntas exploratórias, de modo a construir conclusões sobre a equivalência, como observamos na Figura 6.

Figura 6 – Perguntas exploratórias e conclusões a respeito de classe de equivalência.

Você acha que há uma nomenclatura para definir a seguinte sequência equivalência entre frações?

$\left\{\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=\frac{6}{6}=\frac{8}{8}=\frac{10}{10}\right\}$ e $\left\{\frac{1}{1}=\frac{3}{3}=\frac{6}{6}=\frac{9}{9}\right\}$

Aa π Digite sua resposta aqui...

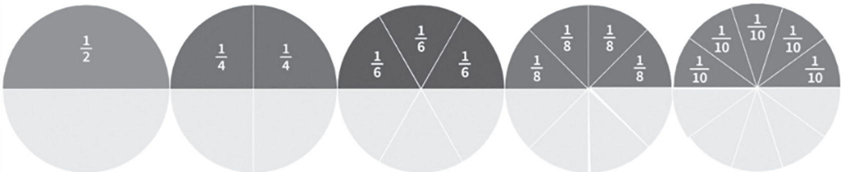
Se você respondeu que há uma nomenclatura, você acertou.

As frações que representam mesmas quantidades como $\left\{\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=\frac{6}{6}=\frac{8}{8}=\frac{10}{10}\right\}$ e $\left\{\frac{1}{1}=\frac{3}{3}=\frac{6}{6}=\frac{9}{9}\right\}$ são chamadas de classes de equivalência, pois representam as mesmas quantidades, note que todas as frações acima representam um inteiro.

Fonte: Os Autores (2022).

A partir da forma numérica de representação para a classe de equivalência de frações presente na Figura 6, podemos observar outra forma de representação, no caso, por meio de discos e equivalência de áreas de setores circulares, Figura 7.

Figura 7 – Classe de equivalência relativa à fração um meio.



Fonte: Os Autores (2022).

Na Figura 7, apresentamos a classe de equivalência relativa à fração (um meio), representada em discos de frações. A pergunta dada na Figura 8 promove a identificação de correspondência de frações a partir das representações geométricas das classes de equivalência nos discos.

Figura 8 – Exercício de aplicação das classes de equivalência.

Qual das sequências abaixo pode ser chamada de classe de equivalência?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{7}{14}$

B ☐ $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{6}$

C ☐ $\frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \frac{1}{8}$

Fonte: Os Autores (2022).

Com a pergunta apresentada na Figura 8, é finalizado o capítulo sobre equivalências. Os demais itens desenvolvidos para o estudo de frações, como simplificação, operações e aplicações estão apresentados de forma interativa e com representações geométricas utilizando-se dos controles deslizantes do GeoGebra, que fazem parte do OA denominado Estudos de Frações já mencionado.

Para finalizar vale destacar que, ao manipular, observar e comparar os materiais digitais no OA e os materiais manipulativos possíveis de associar ao estudo de frações, os professores que participaram da Ação de Extensão, estabeleceram as relações entre eles ao realizarem as tarefas e tiveram a possibilidade de construir ideias relacionadas às frações, como no caso da equivalência apresentada neste capítulo do livro digital. Desse modo é possível compreender a diferença dos números naturais para os fracionários, reconhecendo as frações equivalentes e operando com números fracionários. Estas são atividades que possibilitam entender os erros cometidos ao operar com frações e utilizar propriedades dos números naturais.

2.2. EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

A equação do 1º grau possui incógnita de grau 1. Equações são sentenças matemáticas que possuem incógnitas, as quais são representadas por letras que correspondem a valores desconhecidos e igualdade. A sentença matemática da equação do 1º grau tem características do tipo: ax+b, em que a e b são números reais, com a diferente de **0 e x é a incógnita**. Resolver uma equação do 1º grau é encontrar o valor da incógnita que satisfaz essa equação. Esse valor é conhecido como solução ou raiz da equação.

As questões que envolvem equações do 1º grau exigem a transformação de situações-problema em equação, a partir dos dados presentes no enunciado. Na BNCC, a competência da Área de número cinco da Matemática envolve a necessidade de "Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas" (BRASIL, 2018, p.267).

Assim, a partir disso, é possível modelar situações-problema do nosso cotidiano e resolvê-las utilizando uma equação. Nessa competência, existem duas habilidades específicas envolvendo equações, que são as habilidades 13 e 18 do sétimo ano: "(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade. "(BRASIL, 2018, p.303).

O OA para equações elaborado pode ser utilizado no 7º Ano do Ensino Fundamental, foi construído no GeoGebra em forma de livro digital. O *software Mathigon* e o *Google Slides* também foram utilizados para configurar e gerar algumas ilustrações. O OA pode ser acessado em sua forma completa pelo link: https://www.geogebra.org/m/qy8bzb9b.

O livro digital que contempla esse tema é dividido em quatro capítulos.

1º capítulo – História da equação.

2º capítulo – A igualdade nas equações.

3º capítulo – Como resolver uma equação.

4º capítulo – Exercícios aplicados sobre equações.

Apresentamos um recorte do 1º capítulo desse Objeto.

2.2.1. A HISTÓRIA DA EQUAÇÃO

Inicialmente, neste capítulo do livro digital, apresentamos um pouco de histórica da equação do 1° grau, disponível no papiro de Rhind, com base no livro de Eves (2004), ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – A equação do primeiro grau no papiro de Rhind.

Os egípcios antigos, apresentaram no papiro de rhind datado de 1650 a.C. uma equação de primeiro grau, encontrada da seguinte forma:
$X + \frac{X}{7} = 24$

Que foi resolvida pela regra da falsa posição, como é conhecida na Europa. Na história da Matemática a resolução desse problema é encontrada da seguinte forma: "assume-se um valor conveniente para x, digamos x = 7. Então $X + \frac{X}{7} = 8$, em vez de 24. O 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser 3 multiplicado por 7 ou 21." (EVES, 2004, p. 73)

Fonte: Os Autores (2022).

Também é apresentado um vídeo de Piovesan (2018), resumindo a história das equações do primeiro grau[7]. Após essa introdução das histórica das equações do primeiro grau, apresentamos exemplos de aplicações de uma equação do primeiro grau, como o que pode ser visto na Figura 10.

7 Disponível em: https://youtu.be/ku0xK1a0o5k. Acesso em: 10 dez. 2022.

Figura 10 – Exemplos de aplicação da equação do primeiro grau.

Problemas de aplicação de equações do primeiro grau

- O salário de um funcionário que recebe um salário mínimo por mês, mais R$: 15,00 por hora extra trabalhada pode ser representado por uma equação de primeiro grau: Para construir a lei Matemática que representa essa situação, considera-se a letra H para representar a quantidade de horas extras trabalhadas e S para o salário, assim, obtém-se a seguinte equação:3 $S = 1200 + 15 \cdot H$
- Uma Empresa E, obteve um lucro L de R$9,00 por produto vendido, esse lucro pode ser representado conforme as vendas desse produto. Para construir a lei Matemática considera-se a letra P como representação para os Produtos vendidos, e L para o Lucro, assim obtém se a seguinte equação: $L = 9 \cdot P$

Fonte: Os Autores (2022).

Com esses exemplos, esperamos que ocorra a compreensão da importância da equação de primeiro grau no cotidiano. Nos outros capítulos desse Objeto, que é um livro digital, apresentamos métodos para resolver uma equação e problemas de aplicação.

2.3. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

O conceito de área tem sua importância no currículo de Matemática da Educação Básica, principalmente pela aplicação no cotidiano e nas práticas profissionais e sociais, como por exemplo, estimar a medida da área de um terreno, pintar uma parede, colocar cerâmica num piso, construir uma horta ou um jardim, além de permitir a articulação com outros conceitos da Matemática como: frações, produtos notáveis, perímetro, teorema de Pitágoras, razão e proporção, equações. Estabelece, também, conexão com outras disciplinas, como Geografia, Ciências, Física e Química. Motivo que nos conduz a pensar que o conceito de área no currículo carece de uma construção conceitual.

Douady e Perrin-Glorian (1989) categorizaram a aprendizagem dos estudantes em relação ao conceito de área em concepções geométricas e concepções numéricas, afirmando, em sua pesquisa, que alguns desenvolveram uma concepção geométrica ou uma concepção numérica, ou ambas, mas de forma isolada. Nas concepções numéricas só são considerados os aspectos pertinentes para o cálculo, enquanto que nas concepções geométricas ocorre confusão entre área e superfície, perímetro e contorno.

Assim, tomar a abordagem do conceito de área como grandeza corresponde a distinguir três quadros: o geométrico, constituído por superfícies planas (quadrado, paralelogramo, triângulo); o numérico, consistindo nas medidas das superfícies planas, e o das grandezas, constituído por classes de equivalência de superfícies de mesma medida. Expressões compostas de um número e de uma unidade de medida determinam uma maneira de designar área como grandeza, como por exemplo, $4cm^2$; $12,5m^2$; e $100mm^2$.

Áreas de *Figuras Planas*[8] é um OA construído na plataforma *Google Slides* e nas construções utilizamos contribuições de diferentes autores, disponibilizadas gratuitamente na plataforma GeoGebra on-line.

Para iniciar o estudo, partimos de alguns questionamentos a respeito de:

(i) O que é uma fronteira?

(ii) Como podemos definir uma medida relacionada ao tamanho de uma região?

A partir desses questionamentos, buscamos incentivar o estudante na compreensão do conceito de área de figuras planas, de modo que, para ter uma área, precisamos de uma região limitada

8 Disponível em: https://docs.google.com/presentation/d/1ChMgWXSeMe41g88N_U6gy0axl6FvT-T_R8EnEM3fKsw/edit#slide=id.gdef1a46373_0_1.

por uma fronteira; assim, o conceito de área está diretamente relacionado com a medida dessa região limitada.

Após essa introdução, apresentamos vídeos de professores explicando brevemente esse conceito, promovendo uma relação entre Matemática e Geografia, como por exemplo, proposto no vídeo disponível no link: https://youtu.be/Rp83EYQtr5w.

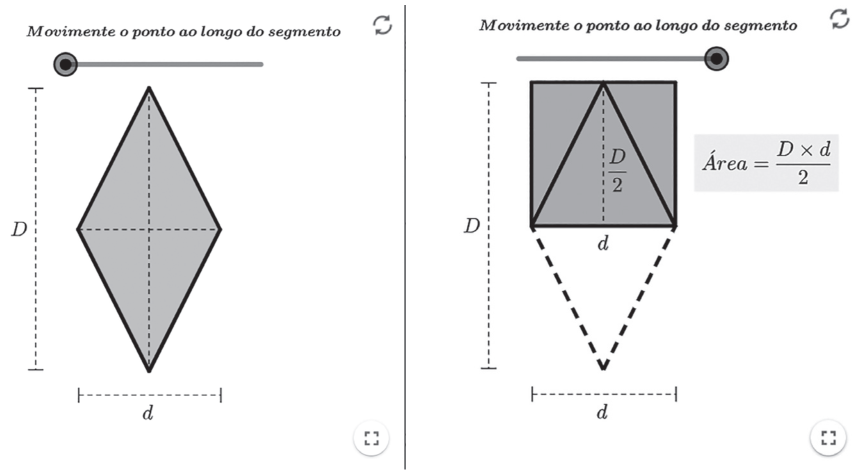
Também apresentamos exemplos de figuras planas presentes no dia a dia. Ilustramos um exemplo na Figura 11, de uma bicicleta que conta com formas geométricas em sua composição circular nas rodas e triangular em seu quadro.

Figura 11 – Exemplo de figura plana.

Fonte: Google Imagens (2022).

Depois dessa contextualização do tema, passamos para a discussão das demonstrações das fórmulas para o cálculo de áreas. Neste OA utilizamos construções disponíveis no GeoGebra. Para a introdução e discussão das fórmulas, no caso do exemplo aqui apresentado, que é o losango, visualizamos a redução ao retângulo de lados correspondentes à diagonal menor e o outro lado correspondente à diagonal maior, dividida por 2, como na Figura 12.

Figura 12 – A fórmula para o cálculo da área do losango.



Fonte: GeoGebra on-line[9].

Nessa figura, podemos observar a verificação da fórmula de área do losango, que é feita a partir de uma translação, transformando o losango em um retângulo, nduzindo visualmente que a fórmula da área é igual à diagonal menor (d) multiplicada pela metade da diagonal maior ($\frac{D}{2}$), ou seja, a área é $A = d.\frac{D}{2}$.

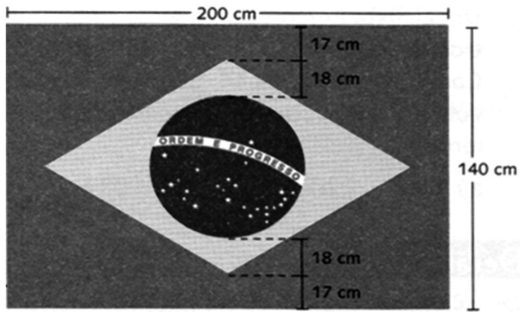
Nesse OA também verificamos as fórmulas para o cálculo da área do círculo, do triângulo, do retângulo, do paralelogramo e do trapézio. E na integração desse OA, estão propostos problemas de aplicação, como o destacado na Figura 13.

9 Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hc37vrtd. Acesso em: 10 set. 2024.

Figura 13 – Problema de aplicação de Áreas.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DAS ÁREAS

2-Calcule as áreas presentes na figura da Bandeira do Brasil, conforme as medidas destacadas:



Fonte: Google Imagens.

Nesse problema de aplicação exploramos as áreas do retângulo, losango e círculo, em uma superfície muito conhecida, um símbolo nacional, que é a bandeira do Brasil.

A partir das atividades previstas nesse OA, valorizamos tarefas que envolvem comparações e estimativas, o uso de medidas, dados numéricos, ou, ainda, possibilidades de estimar qual a medida da área da sala de aula, por exemplo, sem que sejam dadas as dimensões da sala, tarefas que contribuem para a construção do conceito de área como grandeza, por meio de problemas do dia a dia e, também, sociais.

2.4. A ANÁLISE GRÁFICA

Uma forma de apresentar dados para descrever informações é a partir de tabelas e gráficos estatísticos que fazem parte de uma linguagem universal, que hoje podem ser vistos com grande frequência nos meios de comunicação. Desse modo, o recurso da linguagem gráfica torna possível a organização de dados coletados em pesquisa, utilizando números para descrever fatos em tabelas e gráficos.

Os educadores matemáticos, em qualquer nível de ensino, sentem-se comprometidos com a construção da cidadania, ao considerarem o ensino de estatística, como por exemplo, a análise de dados. Consequentemente, o trabalho com a estatística também poderá auxiliar o estudante no desenvolvimento do raciocínio crítico, integrando-se as distintas disciplinas (LOPES, 2004).

O Objeto voltado para a análise gráfica é uma proposta de atividades para a Unidade Temática - Probabilidade e Estatística, do 9º Ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018), desenvolvido no *software* GeoGebra integrado à plataforma *Google Slides*, ambos de acesso livre. Este OA se divide em dois capítulos: no primeiro, apresenta uma introdução à análise gráfica, com o objetivo de incentivar a interpretação na relação com situações hipotéticas, exploração de gráficos, além de questões de análise gráfica e de construção; no segundo, trata de problemas de aplicação a respeito do tema vacinação e casos confirmados de Covid-19. Apresentamos a oportunidade de fazer uma aplicação dos conceitos desenvolvidos na primeira parte do objeto, a partir de uma sequência de questões que buscam explorar o gráfico relacionadas aos casos confirmados e índices de vacinação, com dados obtidos no site *Our world in data,* que pode ser acessado pelo link: https://ourworldindata.org/coronavirus.

2.4.1. INTRODUÇÃO À ANÁLISE GRÁFICA

Para iniciarmos a discussão, partimos da tabela dada na Figura 14, necessária para completar um gráfico de setores, buscando explorar suas características de construção, a apresentação das informações, a relação parte-todo em percentuais e a análise das informações presentes no gráfico de setores.

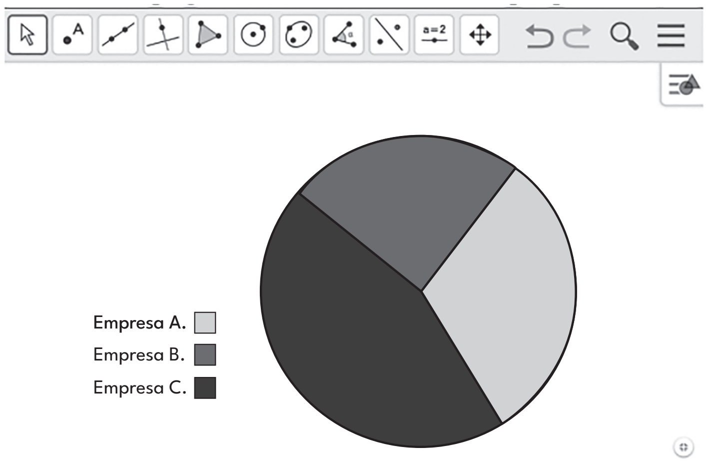
Figura 14 –Tabela das vendas de três empresas.

Vendas de carros em um ano.	Empresa A	Empresa B	Empresa C
Quantidade	43	37	22

Fonte: Os Autores (2022).

Na sequência, construímos um gráfico de setores, no GeoGebra, para representar os dados da Figura 14. Assim, podemos conferir, no gráfico de setores da Figura 15 a porcentagem das vendas que cada empresa obteve no ano. Com essa atividade, a partir da regra de três, podemos investigar a representação gráfica com a correspondência dos dados da tabela para completar o gráfico no livro digital.

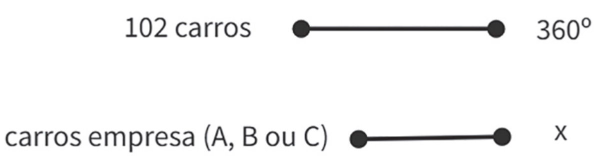
Figura 15 – Gráfico de Setores: Representação de vendas de três empresas.



Fonte: Os Autores (2022).

Com esse gráfico, é possível aplicar a regra de três, discutimos a noção de ângulo e setor circular, ou seja, os 360º do círculo representam os 102 carros vendidos no ano, e a quantidade de carros vendidos será relacionada com o ângulo correspondente. Um esquema da representação dessa regra de três é dado na Figura 16.

Figura 16 – Esquema da representação da regra de três sobre os carros vendidos.



Fonte: Os Autores (2022).

Após completar o gráfico de setores, ainda são feitas algumas atividades que podem ser conferidas na sequência deste capítulo do livro digital no GeoGebra, que conta com outras atividades exploratórias relacionadas a gráficos de barras e de linhas. Esse OA pode ser acessado de forma completa pelo link: https://www.geogebra.org/m/jdh685uw.

Os professores em formação que fizeram parte dessa Ação de Extensão demonstraram interesse e participaram de forma ativa das atividades relacionadas aos conceitos da Estatística a partir de tabelas e gráficos. Essa participação colocou em destaque a importância de se trabalhar metodologias que possibilitem a interação, por meio de recursos diversificados, pois o computador nos auxilia quando apresenta suas planilhas e gráficos para os fatos e fenômenos da realidade.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os quatro OA se justificam, uma vez que podem contribuir para o desenvolvimento de aulas de Matemática e torná-las mais interativas, contemplando resolução de problemas, história da Matemática, representação geométrica, representação algébrica, representação gráfica e estatística, verificação de fórmulas, comparação de frações e operações. Assim, com o auxílio de tais recursos oferecidos pelos OA, pode despertar nos estudantes o interesse em estudar Matemática de forma prática e ilustrada.

O *Estudo de Frações* por meio do OA a ser utilizado no 6º Ano do Ensino Fundamental foi construído no GeoGebra em forma de livro digital, assim como o objeto para o *Estudo de Equações* do 7º Ano do Ensino Fundamental. O *software Mathigon* e o Google Slides também foram utilizados para configurar e gerar ilustrações em ambos os OA. O *Estudo de Áreas de Figuras Planas* do 8º Ano do Ensino Fundamental é um OA que foi construído na plataforma *Google Slides* e nele utilizamos, também, construções de diferentes autores, que as disponibilizaram gratuitamente na plataforma GeoGebra. Por fim, *A Análise Gráfica* é uma proposta de atividades para a Unidade Temática – Probabilidade e Estatística do 9º Ano do Ensino Fundamental, cujo OA foi desenvolvido no *software* GeoGebra integrado com a plataforma *Google Slides*, ambos de acesso livre.

Outro fator que torna os OA válidos para o ensino de Matemática é o uso do GeoGebra, o que possibilita uma interação com as Tecnologias Digitais, facilitando a visualização das figuras geométricas e, também, criando possibilidades de manuseio geométrico e algébrico. Além disso, coloca o estudante diante de questões para refletir e responder no livro presente no próprio computador, celular ou *tablet*, apresentando assim possibilidades de investigação Matemática, pesquisa, resolução de problemas e análise Matemática desde o Ensino Fundamental.

4. REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_ EF_110518_versaofi nal_site.pdf. Acesso em: 19 jan. 2022.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília, DF, 1º jul. 2015. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf. Acesso em: 3 novembro 2022.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN,T. E. (ed.) Recent Research on Number Learning. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

LAMON, S. J. Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New York: Routledge, 2012.

LOPES, C. A. E. Literacia estatística e o INAF 2002. In: FONSECA, M. C. F. R. (Org.), Letramento no Brasil: habilidades matemáticas. São Paulo: Global: Ação Educativa Assessoria; Pesquisa: Instituto Paulo Montenegro, 2004. p.187-197.

NÓVOA, A. Formação de professores e trabalho pedagógico. Lisboa: Educa, 2002.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: uma ontologia baseada na história e neurociência. Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC, Belém, PA, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. Revista Perspectiva, Florianópolis, SC, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. ReviSeM, Itabaiana, SE, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, São Paulo, SP, v. 9, n. 2, p. 50-68, 2019b.

PIOVESAN, J. Equação do 1º grau. You Tube, 2018. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=kuOxK1a0o5k, acesso em: 06 jul. 2022

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM, Campo Mourão, PR, v. 09, n. 20, p. 8-37, 2020.

SCHEFFER, N. F., SPERANDIO P.; BATTISTI, S. Tecnologias Digitais e Políticas de Formação de Professores. In: RICHIT A.; OLIVEIRA H. (Org.), Formação de professores e tecnologias Digitais. São Paulo: Livraria da Física, 2021. p. 143 -166.

SILVA, M. J. F. Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

CAPÍTULO **4**

CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS E ALGORITMOS NA MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Pedro Augusto Pereira Borges[10]

1. INTRODUÇÃO

O ensino de frações é bastante discutido no ambiente acadêmico, seja como objeto de trabalho de cursos de extensão, de oficinas e minicursos em eventos, seja nas publicações em periódicos. O enfoque dominante é a busca por estratégias alternativas de ensino. Na pesquisa de Dionísio et al. (2019) foram analisadas 19 pesquisas em 12 edições do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e 14 edições do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), realizadas até o ano de 2017, sobre o ensino de frações, agrupadas em três categorias: jogo,

10 Doutor em Engenharia Mecânica pela UFRGS e Pós-Doutor em Ciência, Tecnologia e Educação Científica pela UFSC. Professor Adjunto da UFFS, *Campus* Chapecó/SC. Professor permanente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Líder do GPEMAT - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática. pedro.borges@uffs.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0087-5806

uso de *softwares* e outras estratégias. Está presente, nesses trabalhos, a iniciativa de significação do conceito de fração (como relação entre partes e todo ou razão entre dois números inteiros), frações equivalentes e resolução de problemas, o que mostra, por um lado, a importância do tema para a Educação Matemática e para as práticas pedagógicas e por outro, a restrição em abordar predominantemente a parte introdutória, com poucas referências às operações.

Por sua vez, no ensino de frações efetivamente praticado nas escolas, percebe-se o caráter fortemente algorítmico, limitado à execução de regras que, se memorizadas, levam à aplicação e ao resultado correto. Nessas práticas, o trabalho do professor é promover treinamentos para desenvolver as habilidades e os materiais de ensino, além de exercícios escritos, são os jogos virtuais, na tentativa de oportunizar treinamentos menos tediosos, os quais diferem das listas, mais pela forma digital, do que pelo conteúdo. Como observam Amorim e Damázio, "muitas vezes, dependendo da concepção, a corrida é em busca de recursos didáticos alternativos que prendam a atenção do aluno, entendida como condição primordial para a aprendizagem matemática" (2007, p.1). Essa opção didática é prática estabelecida nas escolas e os resultados não são animadores, visto o grau de dificuldades que os alunos têm mostrado no final do Ensino Fundamental e no Médio, quando precisam operar com frações. Cancelamentos indevidos e confusão entre os procedimentos das operações de adição e da multiplicação são apenas alguns exemplos de erros comuns. Além disso, e principalmente, o ensino via memória e treinamento é pobre em processos cognitivos e não desenvolve a capacidade de observar, analisar, argumentar e justificar, próprias da atividade do matemático, justamente porque não é desenvolvida uma consciência dos procedimentos.

A abordagem de Amorim e Damazio (2007) difere dos trabalhos acima citados em pressupostos e abrangência. Com base na Teoria Histórico-Cultural, os autores admitem o uso dos materiais didáticos de forma reflexiva para a significação geométrica dos conceitos atrelados às frações e vão além da representação e equivalência, deduzindo conceitualmente os algoritmos das quatro operações com frações.

As dificuldades de aprendizagem com as operações de frações também podem ser devido à natureza do próprio conceito, que é mais complexo do que outros ensinados no Ensino Fundamental, como o de número natural, por exemplo. Os significados não são tão evidentes nas frações, como nos números naturais, em que as crianças associam o símbolo de um número à quantidade de objetos mais facilmente, do que a representação simbólica das frações, como divisão entre dois números inteiros (numerador/denominador) às partes de um inteiro. Entender o significado é mais simples do que ou ainda . Diante desse quadro de dificuldades, pode-se entender porque muitos alunos têm aversão ao uso da linguagem de frações para resolver problemas.

Sem a pretensão de superar todas essas dificuldades com alguma técnica de ensino que seja efetiva para qualquer aluno e escola, este texto coloca-se como uma contribuição para nfrenta-las, admitindo que o ser humano tende a dedicar-se mais às coisas, aos fatos, às ações que consegue entender melhor e, por isso, desenvolve por elas um certo gosto. Assim, o presente trabalho tem como objetivo analisar a construção de conceitos e a elaboração de algoritmos na multiplicação de frações, em atividades de ensino que enfatizam a significação com a manipulação de materiais didáticos, o diálogo e a argumentação matemática.

O material de ensino apresentado neste capítulo é uma reflexão sobre parte da apostila "Atividades de ensino de frações: construção de conceitos e algoritmos"[11], elaborada no Laboratório de Educação Matemática (LEM) do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), *Campus* Chapecó/SC, em 2018, com o objetivo de reunir materiais e procedimentos de ensino que constituíssem uma base material para representar os conceitos, as propriedades e os algoritmos das operações com frações. A apostila ficou disponível para cursos de extensão, pesquisa de componentes curriculares, aplicação em sala de aula, Trabalhos de Conclusão de Curso e estágios. Desde então, a apostila tem sido visitada, adaptada e melhorada. No Trabalho de Conclusão de Curso de Lansing (2018), parte das atividades foram aplicadas em uma turma de sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Chapecó/SC e observados os percursos de superação das dificuldades dos educandos ao realizarem as atividades propostas. O material foi apresentado na íntegra, como oficina, no III Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Sul em 2018, cujas discussões contribuíram para o aperfeiçoamento da proposta inicial. A apostila também foi utilizada como referência para o ensino das operações com frações e ponto de partida para a elaboração de materiais alternativos em algumas edições do componente

11 A apostila é mencionada neste texto com a referência Borges (2018).

curricular de Laboratório de Ensino de Matemática I, do Curso de Licenciatura em Matemática da UFFS, *Campus* Chapecó. Em 2022, parte do material foi apresentada como oficina on-line no Projeto "Formação de Professores de Matemática da Educação Básica, ações com tecnologias digitais, objetos de aprendizagem no contexto da política educacional da BNCC", agregando o uso de recursos computacionais nas atividades.

Neste capítulo, são apresentadas e analisadas apenas as atividades de multiplicação, devido ao limitado espaço disponível. Como base teórica, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), evidencia os componentes do processo de conceptualização, na segunda seção, juntamente com as possíveis contribuições do manuseio de materiais didáticos nesse processo. As atividades de ensino sobre multiplicação de frações são descritas na terceira seção, acompanhadas da análise das potencialidades de gerar argumentações, que justificam os procedimentos e resultados obtidos com a análise das ações sobre o material didático. Nas considerações finais são sintetizadas algumas observações, tais como a transformação dos conceitos, os processos indutivos e a generalização, os processos dedutivos na Escola Básica e importância da linguagem na elaboração de algoritmos.

2. OS PROCESSOS DE CONCEPTUALIZAÇÃO E ELABORAÇÃO DE ALGORITMOS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud, evidencia os processos de aprendizagem de conceitos matemáticos e os fenômenos de sala de aula, motivo pelo qual foi adotada como referencial teórico para fundamentar a proposta de elaboração dos algoritmos da multiplicação de frações, a partir da manipulação, observação e análise do material didático.

2.1. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Para compreender e aplicar a TCC é necessário explicitar alguns termos e locuções empregados na sua formulação, tais como conceptualização, campo conceitual, situação, invariantes, representação simbólica, atividade, mediação e esquemas.

O campo conceitual é, para Vergnaud,

> [...] um conjunto de situações cujo tratamento implica em esquemas, conceitos e teoremas, em estreita conexão, assim como as representações de linguagem e representações simbólicas suscetíveis de serem utilizadas para epresenta-los (2017, p. 18).

Mais precisamente, um conceito em geral é constituído como um tripleto de três conjuntos: o conjunto de problemas, situações reais ou imaginárias cujos objetos, fatos e ações tenham *sentido* para o sujeito (S); o conjunto dos invariantes (I) ou ideias que identificam os objetos, propriedades ou relações que viabilizam o reconhecer, referir-se, operar, analisar ou dominar essas situações (os significados); e o conjunto das *representações* ® desses invariantes mediante uma linguagem (os significantes), seja ela natural (oral, gestual, corporal) ou simbólica (escrita, pictórica, gráfica ou matemática), o que viabiliza o pensamento individual e o compartilhamento com os outros (MOREIRA, 2002, p. 10; PLAISANCE e VERGNAUD, 2003, p.76).

Nessa concepção, um conceito matemático não está isolado, já que uns são necessários para a construção dos outros. Para conceituar frações, por exemplo, são necessários vários outros conceitos, tais como número, inteiro, parte, numerador e denominador. Por sua vez, fração é associada ao conceito de razão entre dois inteiros.

A aprendizagem, na TCC, é um processo de adaptação dos conceitos a novas situações – portanto um processo pelo qual ocorre o aumento de conhecimentos – que conforme Plaisance e Vergnaud,

> [...] depende de quatro grandes ideias: a atividade do sujeito que aprende, a oferta de situações favoráveis ao aprendizado, a mediação por parte das pessoas que o rodeiam, a utilização de formas linguísticas e de formas simbólicas para comunicar e representar. (2003, p. 64-65).

A atividade supõe ações de iniciativa do sujeito, tais como perceber o real, separar e agrupar coisas de acordo com algum critério, ordenar, modificar o real, fazer hipóteses sobre essas modificações, testar, julgar por si mesmo e resolver problemas. De acordo com Plaisance e Vergnaud,

> Desde a mais tenra idade o bebê dá prova de uma intensa atividade perceptiva e gestual em relação aos objetos de seu meio ambiente; e é essa atividade que lhe permite extrair relações estáveis entre as ações e seus resultados, e entre os objetos (2003, p. 66).

A atividade é movida por interesse, curiosidade, objetivos e ocorre mediante esquemas que o sujeito elabora e executa, compostos por elementos abstratos (regras, definições, conceitos, desejos, sentimentos) e reais (informações do meio obtidas pelos sentidos, ações físicas de tocar, mover, falar), para transitar pelos conjuntos dos sentidos, dos invariantes e das representações (S-I-R), adaptando, substituindo e lapidando os conceitos. “Na verdade, são os esquemas que se adaptam, isto é, as formas de organização da atividade; estes se modificam ao enfrentar-se novas situações” (VERGNAUD; MOREIRA e GROSSI, 2017, p. 18). A análise dos esquemas desenvolvidos em uma atividade mostra o caminho percorrido pelo sujeito para elaborar um estágio do conceito a aprender.

> O esquema é uma totalidade dinâmica funcional, uma organização invariante da conduta, quanto a uma certa classe de situações. Essa organização comporta objetivos e esperas, regras de ação, tomada de informação e de controle, e é estruturada por invariantes operatórios, isto é, conhecimentos adequados para selecionar a informação e processá-la (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) (PLAISANCE e VERGNAUD, 2003, p. 66).

Diferentes tipos de esquemas são usados em cada situação: perceptivo-gestuais, para contar objetos apontando com os dedos ou agrupando unidades; pictóricos, para desenhar um croqui, fazer um gráfico ou um diagrama; verbais, para fazer um discurso; sociais, para seduzir outra pessoa ou gerenciar conflitos; e algorítmicos, para a execução de uma série de passos ao resolver um problema.

Os invariantes operatórios, por sua vez, são os conhecimentos, os conceitos contidos nos esquemas, designados como conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Os primeiros podem ser um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante. Os segundos são proposições tidas como verdadeiras sobre o real, sendo que ambos podem se manifestar pelo discurso ou pelas ações. “Expressamos nossos conhecimentos tanto pelo que dizemos (forma predicativa) como através do que fazemos em situação (forma operatória)” (VERGNAUD; MOREIRA e GROSSI, 2017, p. 19).

O aspecto provisório do conceito, em estado constante de complementação pela vivência e interação com os outros, é outra característica da formação dos conceitos, destacada por Vergnaud (2018, p.15),

> [...] A Conceptualização é, em primeiro lugar, um processo. Podemos falar da Conceptualização como resultado desse processo, mas antes de mais nada é um processo. Começa-se bem cedo o processo de Conceptualização, bem criança ainda e nunca jamais se termina. A gente acaba descobrindo aspectos que não tinha previsto. Só nos resta trabalhar outra vez, refletir de novo, repetir, também ser ajudado, auxiliado pelo outro. Trabalhar com o outro é importante.

A TCC, por detalhar a formação dos conceitos, principalmente pela ideia de campo conceitual, composto pelos conjuntos S-I-R e os esquemas, foi base para o planejamento e análise das atividades de ensino, descritas na seção seguinte.

2.2. OS CONCEITOS E A ELABORAÇÃO DE ALGORITMOS PARA AS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

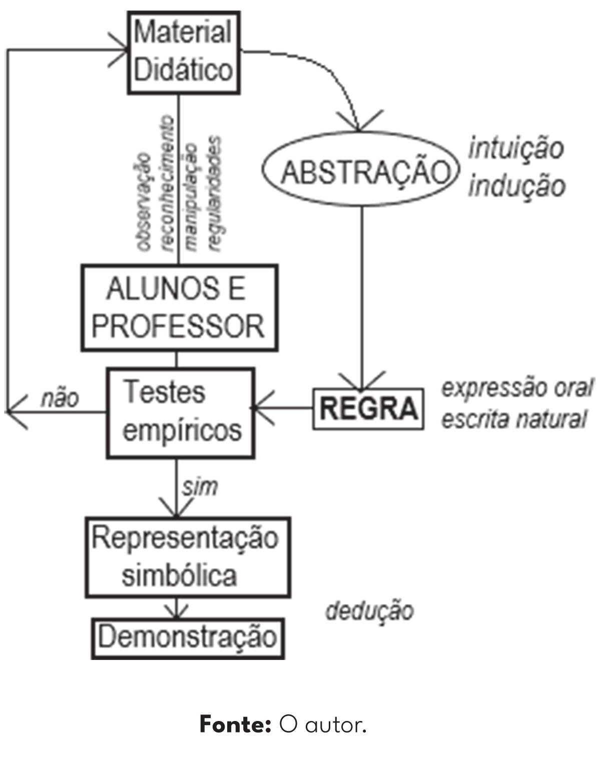
Os algoritmos desempenham uma função primordial no ensino de estruturas matemáticas na Escola Básica e particularmente no ensino de frações. Davis e Hersh (1980) referem-se ao algoritmo como uma construção, ou seja, uma sequência de passos que leva a um resultado. Por exemplo, existem vários algoritmos para calcular a raiz quadrada de *2*[12]. Cada passo desses algoritmos tem a sua justificativa matemática e é através dela que o algoritmo é elaborado. As operações com frações também podem ser escritas como algoritmos, cujos passos têm seus sentidos, significados e justificativas. Assim, uma abordagem de conceptualização sobre a construção de algoritmos significa, necessariamente, atribuir algum sentido para cada passo e escrevê-lo com uma representação simbólica que permita clareza e agilidade, durante a execução.

Considerando os pressupostos da TCC, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de promover o entendimento conceitual dos algoritmos operatórios das frações, de tal forma que os conceitos matemáticos em si (invariantes) e as diferentes representações simbólicas ficassem evidentes nos sentidos físicos e/ou pictóricos (material didático). Tais elaborações são sequências de transformações dinâmicas dos sentidos e das representações que ocorrem com base em argumentação lógica e se estabelecem no grupo de atores (alunos e professor) de forma dialógica, tal como uma investigação matemática em nível escolar. É importante observar que nem os materiais em si, nem suas representações,

12 Algoritmos para calcular raiz quadrada não inteira, cujos sentidos de cada passo são geométricos (área de quadrados) e escritos em linguagem algébrica, podem ser encontrados em Hogben (1970, p. 292).

promovem sentido ou significação dos conceitos. Quem faz essa tarefa são os indivíduos, individualmente e/ou em grupo. Com bem menciona Lorenzato (2009, p. 21), “convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental”. Para que esse processo seja possível na dinâmica e tempos escolares, se impõe a mediação do professor, como propositor de situações de aprendizagem, incentivador da investigação e sistematizador da conceptualização. Esse processo é ilustrado esquematicamente na Figura 1.

Figura 1 – Processo de investigação e conceptualização.



Fonte: O autor.

É da observação de fatos, do reconhecimento de efeitos, da manipulação dos objetos e da verificação de regularidades no material didático que ocorrem as induções de regras e algoritmos. É um processo de abstração que passa por discussões, testes, acordos, exemplos e contra exemplos, até chegar a alguma forma escrita. Na medida em que a regra é testada com sucesso, pode ser expressa em linguagem matemática e utilizada efetivamente em exercícios e resolução de problemas. Evidentemente, o esquema (no sentido dado por Vergnaud a esse vocábulo) material didático–ação–regra tem como base a evidência empírica, a indução e, como tal, não constitui uma demonstração matemática formal. Mesmo assim, não deixa, necessariamente, de ter sentido lógico ou não ser verdadeiro. A demonstração, por sua vez, deve ser obtida apenas com conceitos, símbolos e regras lógicas e, devido ao seu grau de abstração, requer cuidados especiais quando proposta no Ensino Fundamental, como recomenda Lorenzato:

> Essa trajetória é semelhante à que se deve fazer para conseguir o rigor matemático: para consegui-lo, com seus vocábulos, expressões, símbolos e raciocínios, é preciso começar pelo conhecimento dos alunos, que é um ponto distante e oposto ao rigor matemático porque é empírico e baseado no concreto (2009, p. 23).

3. ANÁLISE DE ATIVIDADES DE ENSINO SOBRE MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Nesta seção, são apresentadas atividades de investigação Matemática que atribuem sentido e significado ao algoritmo da multiplicação de frações. Também são discutidas possíveis soluções com sentidos na forma de desenhos e a respectiva representação simbólica, suficientes, minimamente, para a construção dos conceitos e a elaboração das regras operatórias em diferentes linguagens. Procedimentos semelhantes podem ser executados com as outras propriedades e operações das frações, como os procedimentos disponíveis em Borges (2018).

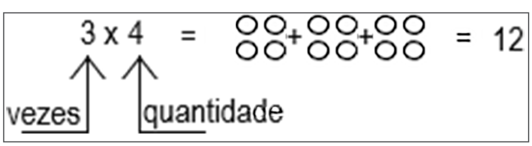
Como o objetivo do presente texto é discutir a conceptualização, é apresentada apenas uma atividade para cada etapa desse processo. Em caso de aplicação em sala de aula, com crianças ou adolescentes, essas atividades precisam ser ampliadas com mais exemplos e exercícios, para que seja oportunizado o desenvolvimento de habilidades de relacionar as transformações efetuadas com o material concreto às suas respectivas representações com símbolos matemáticos.

3.1. SENTIDO DA DEFINIÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO COM NÚMERO NATURAIS

Para entender os sentidos e significados da multiplicação de frações, são necessários vários outros conceitos: fração, numerador e denominador, frações equivalentes e comparação de frações. Além disso, são também necessárias habilidades, tais como: escrever a fração, dado o desenho (ou material didático) do inteiro e das partes, e vice-versa; calcular a quantidade da fração de um inteiro qualquer contínuo ou descontínuo. Atividades com tais conceitos e habilidades podem ser encontradas em Borges (2018).

O conceito de multiplicação com números naturais é bastante simples, mas é necessário que seus sentidos sejam explicitados claramente. Caraça define a multiplicação de dois números (fatores), como “uma soma de parcelas iguais” (1984, p.18). O primeiro (multiplicador) indica o número de vezes que o segundo (multiplicando) deve ser adicionado repetidamente. Observa-se que os fatores têm sentidos diferentes. Enquanto o primeiro significa o *número de vezes*, o segundo é uma *quantidade* a ser adicionada repetidamente, como ilustrado, para um caso particular, na Figura 2. A representação da multiplicação com objetos e/ou desenhos é uma alternativa para atribuir sentidos reais ou pictóricos da definição. Na Figura 1, o sentido do multiplicando são as quatro bolinhas, as quais são repetidas 3 vezes (o multiplicador é 3). Os alunos podem facilmente verificar que resultado está correto, por evidência empírica, somando os três grupos de quatro bolinhas, como sugere a leitura de *três vezes quatro*. Esse recurso de representar a operação escrita com frações mediante desenhos será empregado como sentido pictórico nas atividades de multiplicação de frações.

Figura 2 – Representação pictórica da multiplicação: caso particular.



Fonte: O autor.

A Figura 3 é uma representação em linguagem simbólica que generaliza casos particulares, como o sugerido na Figura 2.

Figura 3 – Representação simbólica da definição de multiplicação.

Multiplicar $n \cdot a$, significa adicionar a, n vezes.

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\ \text{vezes}}$$

Fonte: O autor.

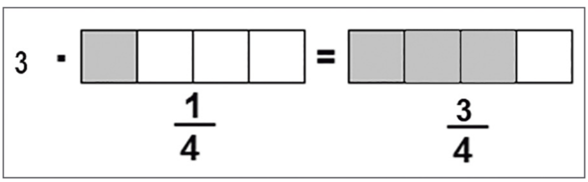
Tem-se, nessa passagem, uma abstração significativa e um ganho de linguagem, já que foi possível representar muitos casos com uma frase matemática tão simples. A habilidade de representar genericamente usando símbolos é fundamental para escrever os algoritmos. No entanto, é imprescindível que os alunos associem os sentidos dos símbolos aos casos particulares, para que a leitura e a significação dessas frases se efetivem. O leitor deve observar que, na passagem das representações ilustradas na Figura 2 para a 3, alunos e professores percorrem duas etapas de abstração: primeira etapa, da ação *concreta* de elaboração do desenho (poderia ser substituído por material didático, bolinhas, tampinhas, ...) para a *representação com números* (na Figura 2) e segunda, da *generalização de um caso particular,* com um teorema-em-ação (na Figura 3), para usar a linguagem de Vergnaud. Nessa mesma passagem são empregados vários tipos de linguagens: linguagem natural falada e escrita, representação pictórica (desenhos), símbolos matemáticos numéricos e letras.

A conceptualização, nesse caso do campo conceitual da multiplicação de números naturais, ocorre com diferentes sentidos e representações, sendo a definição de multiplicação o conceito invariante, nos termos da TCC.

3.2. SENTIDO DA MULTIPLICAÇÃO DE INTEIRO POR FRAÇÃO

Usando a definição da Figura 3 e ampliando seu sentido para números fracionários, pode-se representar uma multiplicação de inteiro por fração com o material didático, conforme a Figura 4, para um caso particular:

Figura 4 – Multiplicação de inteiro por fração.



Fonte: O autor.

O sentido do primeiro fator é o número de vezes que o segundo deve ser repetido, de acordo com a definição de multiplicação. Nesse caso, o segundo é a fração , cujo sentido é *uma das quatro partes do inteiro*. Então, basta adicionar três vezes, o que resulta em , de acordo com o que o aluno deve ter aprendido, quando estudou a adição de frações de mesmo denominador.

Depois de fazer outros produtos com o material didático e observar o que ocorre com as respectivas representações simbólicas, é possível que os alunos elaborem uma regra, para tornar esse tipo de multiplicação mais prático. Falas do tipo "basta multiplicar o *n* pelo número de cima" ou "dá prá ver que fica sempre *n* vezes o número de cima, sobre o de baixo" são versões orais ou escritas em linguagem natural, que podem evoluir para uma representação simbólica, tal como a Regra M1:

Regra M1: $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$, onde e são números inteiros, sendo .

Nessa atividade, pode-se observar que houve uma ampliação da definição de multiplicação, dos naturais para as frações, mediante uma significação concreta. A extensão, na Regra M1, é o produto de inteiro por fração. Observa-se que a ideia de multiplicar é a mesma (invariante), mas foi estendida para um outro sentido, outro tipo de número.

O teste com material concreto ou desenhos, nessa situação, é o recurso disponível para verificar se a regra é verdadeira ou falsa e deve ser aplicado para vários casos particulares. Como tal, é eficiente e adequado como um processo investigativo para o nível de maturidade de alunos da Escola Básica.

Se os alunos já possuem maturidade para trabalhar com símbolos, a sequência de transformações simbólicas mostrada em (1) leva à mesma expressão da Regra M1: na passagem da primeira para a segunda igualdade foi usada a definição de multiplicação ampliada; na passagem da segunda igualdade, foi usada a ideia de adição de frações de mesmo denominador; e da segunda para a terceira, a definição de multiplicação entre naturais. Nesse caso, tem-se uma demonstração simbólica, que usa definições e propriedades (teoremas-em-ação) conhecidas e aceitas.

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b} = \frac{a+a+a+\cdots+a}{b} = \frac{n \cdot a}{b} \qquad (1)$$

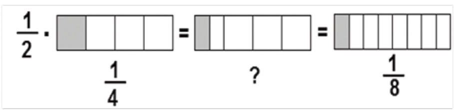
Observa-se que os procedimentos da sequência (1) não dependem de verificação com materiais concretos, já que estão baseados em definições ou em propriedades verdadeiras. Trata-se de uma elaboração matemática, desejável para a formação de matemáticos, mas que merece algum cuidado, se for trabalhada na Escola Básica. Lorenzato vale-se de uma metáfora, ao reforçar a importância do material didático para se conseguir o rigor matemático: “O avião retrata bem essa característica aparentemente contraditória do processo educacional: ele é feito para voar, mas para voar, precisa partir do chão” (LORENZATO, 2009, p. 23). Para trabalhar nesse nível de abstração, é fundamental a compreensão dos sentidos e significados de cada etapa. Para muitos alunos, os símbolos empregados na Regra M1 e em (1) podem não expressar sentidos semelhantes aos da Figura 4, e sem esses, são apenas entendidos como letras ou “coisas” a decorar, para quando o professor cobrar em uma prova. É o caso em que a regra operatória é fornecida e os alunos a aplicam sem consciência do que estão fazendo.

3.3. MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÃO POR FRAÇÃO

A expansão da definição da Figura 2, para multiplicar fração por fração, pode ser realizada se for atribuído um sentido para o multiplicador fracionário: O que significa multiplicar um número por ou por ? Uma sequência de exemplos ilustra essa significação nas Figuras 5 e 6.

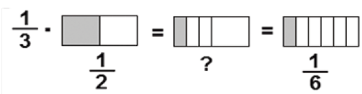
Figura 5 – Multiplicação de fração por fração: numeradores unitários.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ significa *meia vez (ou a metade)* a quarta parte do inteiro, que é um oitavo desse mesmo inteiro:



Resultado: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ significa fazer *a terça parte* da metade do inteiro:



Resultado: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

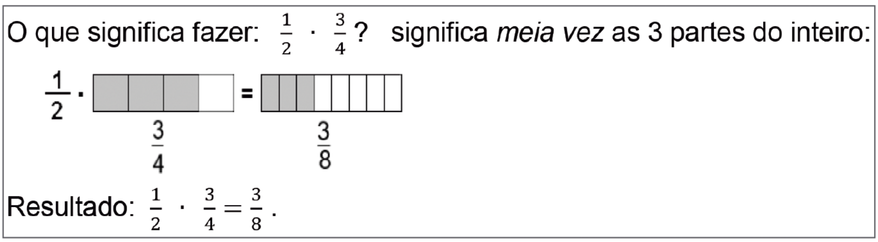
Fonte: O autor.

Após efetuarem várias multiplicações do tipo com o material de frações e observarem a representação numérica dos resultados, é possível que os alunos percebam o efeito da multiplicação na representação simbólica e elaborem uma regra para esse tipo de multiplicação, semelhante à expressão (2).

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{n \cdot b} \quad (2)$$

A expressão (2) pode ser ampliada considerando o numerador da segunda fração diferente de 1, como ilustra o exemplo da Figura 6.

Figura 6 – Multiplicação de fação por fração: apenas um numerador unitário.



Fonte: O autor.

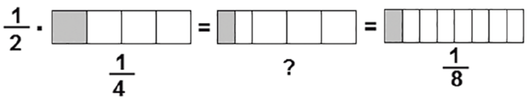
Observa-se que o resultado obtido na Figura 6 é essencialmente empírico. Após fazer várias multiplicações do tipo com o material de frações e trocar ideias com colegas e professor, é possível que os alunos observem os resultados e elaborem uma regra para esse tipo de multiplicação, semelhante à Regra M2.

Regra M2: $\frac{1}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{n \cdot b}$, onde e são números inteiros, com e .

Com as Regras M1 e M2, pode-se expandir a definição de frações para o produto entre duas frações, como apresentado na Figura 7.

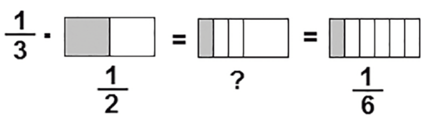
Figura 7 – Multiplicação fração por fração: caso geral.

a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ significa *meia* vez (ou a metade) a quarta parte do inteiro, que é um oitavo desse mesmo inteiro:



Resultado: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

b. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ significa fazer a terça parte da metade do inteiro:



Resultado: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Fonte: O autor.

Como $\frac{6}{12}$ pode ser simplificada, pode-se discutir as propriedades de frações equivalentes e a regra do cancelamento não apresentadas nesse artigo, mas disponíveis em Borges (2018).

Após fazer algumas multiplicações $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$com essa sequência de passos e trocar ideias com colegas e professor, é possível que os alunos observem os resultados e elaborem uma regra para esse tipo de multiplicação, semelhante à Regra M3, que é a regra usualmente ensinada na Escola Básica.

Regra M3: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, onde e são números inteiros, sendo e $d \neq 0$.

O exemplo da (Figura 7) é um caso particular, cuja generalização leva ao conhecido algoritmo (Regra M3) para o produto de frações. A opção apresentada é uma alternativa de esquema de combinação de resultados empíricos e lógico-simbólicos. No Passo 1, a validação da recíproca da Regra M1 certamente seria aceita pelos alunos como verdadeira. Algo como "se a = b, então b = a". O apelo à verificação empírica seguida de generalização, também seria um procedimento natural. Nos Passos 2 e 3, o tratamento é somente simbólico, fazendo substituições e usando-se as regras M2 e M1, respectivamente, já aceitas como verdadeiras. Talvez esse teorema-em-ação seja uma elaboração esteticamente não interessante, mas é um processo de conceptualização que possui argumentação consistente, considerando a liberdade de aceitar a verificação empírica. Nesse sentido, mais importante do que o rigor matemático é elaborar proposições (teoremas, regras, propriedades) e certificar-se, de alguma forma, de que são verdadeiras.

Uma abordagem, em linguagem Matemática, sem o amparo dos resultados empíricos, poderia ser implementada com a sequência de passos da demonstração geral, mostrada na Figura 8:

Figura 8 – Multiplicação fração por fração: caso geral.

Considerando a expressão (1), na qual $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$.

Estendendo a ideia de *repetir partes iguais* da definição de multiplicação de inteiros, pode-se entender o produto $\frac{1}{n} \cdot a$ como *repetir a n-ésima parte de a*. Assim:

$$\frac{1}{n} \cdot a = \frac{a}{n}, \text{ ou se } n = b, \text{ então } \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}, \text{ com } b \neq 0. \tag{3}$$

Assim, para o caso geral de multiplicação de duas frações, tem-se:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{b} \cdot a \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a \cdot c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad . \tag{4}$$

Fonte: O autor.

A sequência de transformações (4), mostrada na Figura 8, levou à mesma expressão da Regra M3: a expressão à direita da primeira igualdade foi obtida usando a recíproca do resultado da expressão (3) na primeira fração; à direita da segunda igualdade, foi usada a definição de multiplicação por inteiro (1); e, finalmente, a última expressão foi obtida com o resultado (3). Evidentemente, esse algoritmo requer alguma experiência com a linguagem matemática e merece cuidados se proposto para alunos do Ensino Fundamental.

Os algoritmos para a multiplicação de frações apresentados nesta seção não são únicos. São apenas esquemas possíveis. Outros podem ser elaborados com o mesmo intuito de argumentar sobre a verdade de teoremas-em-ação com algum tipo de significação.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As situações de ação e conceptualização criadas nas atividades propostas permitiram elaborar reflexões sobre alguns pontos importantes:

1. *A elaboração e transformação dos conceitos e definições*: o ponto de partida das atividades é algum conceito ou definição conhecido dos alunos. De início, foi necessário esclarecer os significados dos termos da definição de multiplicação com números naturais e definir novos significados para o termo *vezes*, tal como *meia vez*, *terça parte* e assim por diante. O produto com o multiplicador fracionário pode resultar em um número menor que o multiplicando, o que é um fato novo, considerando a multiplicação entre naturais. O conjunto desses teoremas-em-ação e dos conceitos envolvidos aumentam e complexificam o campo conceitual, constituindo um saber construído. Essas e outras elaborações semelhantes, com base em testes empíricos seguidos de abstrações, dão uma ideia de que alunos e professores ativos podem criar, propor, escrever e fazer matemática.
2. *O material didático, os processos indutivos e a generalização*: o material didático, seja concreto ou pictórico, desempenha a função de atribuição de sentido e significado, mas essa, sem a reflexão sobre o observado, não leva, necessariamente, à conceptualização, nem à aprendizagem. Os dados e fatos proporcionados pela manipulação do material são casos particulares de operações que levam à indução de

regras (teoremas-em-ação, proposições). Se os resultados confirmam a regra para vários casos, chega-se então à generalização e à respectiva representação simbólica. Evidentemente, esse procedimento tem apenas a verificação empírica das proposições, mas constitui também uma argumentação.

Uma questão recorrente nos oficinas de extensão é se o material didático facilita a aprendizagem. Considerando que o processo materiais-observação-abstração-conceito é demorado e requer diálogo e sistematização, não se trata de uma facilitação, já que o processo de abstração continua ocorrendo e ainda é acrescido de fundamentação, podendo tornar-se até mais complexo, porque é mais consistente logicamente, do que o ensino da aplicação direta das regras próprio das aulas expositivas. Então, não seria mais prático simplesmente ensinar a usar os algoritmos? Para Lorenzato, se um professor concebe a Matemática como "um conjunto de proposições dedutíveis, auxiliada por definições, cujos resultados são regras ou fórmulas que servem para resolver exercícios em exames, avaliações, concursos, [...]" , basta ensinar diretamente essas regras e aplicar exercícios de memorização. Nesse caso, "não conseguimos admirar a beleza e harmonia dela, nem ver nela um essencial instrumento para cotidianamente ser colocado a nosso serviço" (LORENZATO, 2009, p. 25).

3. *Os processos dedutivos como ponto de chegada ... quando possível*: a dedução das regras de operações com frações via processo dedutivo supõe o domínio dos sentidos e

significados abstratos de cada transformação simbólica, como foi mostrado nas expressões (1) e (4), com os devidos comentários sobre as dificuldades de implementação no ensino fundamental. Porém, se os alunos passaram por um processo de conceptualização e dominam os significados das representações simbólicas, é possível que ocorra a compreensão de cada transformação efetuada. Observa-se que ambos os processos indutivos e dedutivos são caminhos para chegar com argumentação aos conceitos, proposições e regras e, com isso, a um domínio dos significados, diferentemente do ensino por memorização e treino.

4. *As múltiplas representações dos algoritmos*: nas atividades propostas procurou-se relacionar cada conceito com o significado em desenhos das partes e do todo. Isso por si só já é uma representação de fração. Quando o aluno associa a escrita simbólica ao desenho e entende que o número fracionário é a relação entre a parte e o todo, ocorre a aprendizagem do conceito de fração. A representação simbólica carrega significados dos conceitos (invariante) de forma oculta (está no cérebro das pessoas): no produto foi necessário redefinir a ideia de vezes como *n-ésima vez*. Assim, cada vez que os alunos vêm o símbolo *, o associam a fazer a n-ésima vez* de algo. Se esse significado é partilhado por um grupo, passa a fazer parte da linguagem e favorece a comunicação. Se o símbolo utilizado não for eficiente nesse sentido, certamente será substituído por outro, como a história da Matemática tem mostrado. Na elaboração do algoritmo da multiplicação, procurou-se mostrar, que se pode conduzir as representações, partindo do desenho, passando pela linguagem natural, até chegar aos símbolos matemáticos.

Elaborar proposições e justificá-las de alguma forma é uma atitude ousada, que supera a crença da suposição ingênua de que algo é verdade, mediante o empenho em fundamentar com base em dados, observações e construções lógicas. Por essa razão, vivenciar processos argumentativos em grupo dá resultados além do conhecimento em si ou o aprendizado de conteúdos programáticos escolares. Como pondera Lorenzato,

> para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da autoestima, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar (2009, p. 25).

A análise da aplicação das atividades propostas em turmas de diferentes anos e contextos da Escola Básica, assim como em cursos de formação de professores de matemática, são trabalhos futuros que poderão oferecer elementos sobre o tipo de aprendizagem gerado com os pressupostos descritos neste texto.

5. REFERÊNCIAS

AMORIM, M. P.; DAMAZIO, A. Apropriação das significações do conceito de divisão de números racionais. In: Reunião Anual da ANPEd, 30. 2007, Caxambu (MG), Brasil. **Anais** ... Caxambu: BR, 2007. p. 1-19. Disponível em: https://www.anped.org.br/ biblioteca/ item/ apropriacao-das-significacoes-do-conceito-de-divisao-de-numeros-racionais. Acesso em: 12 dez. 2022.

BORGES, P. A. P. Atividades de ensino de frações: construção de conceitos e algoritmos. 2018. Disponível em: https://www.uffs.edu.br/institucional/pro-reitorias/pesquisa-e-pos-graduacao/pesquisa/grupos_de_pesquisa/grupo-de-pesquisa-em-tic-matematica-e-educacao-matematica/producao. Acesso: 12 dez. 2022.

CARAÇA. B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1984.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DIONIZIO, F. A. Q.; NOVAK, F. I. L.; PINTO, K. B. P.; BURNAT, S. A. Abordagens de frações no ensino fundamental: um levantamento dos anais do ENEM e EPREM. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife, PE, v. 10, nº 3, p. 1 - 22, 2019.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática**. Porto Alegre: Globo, 1970.

LANSING, J. **Dificuldades na aprendizagem de números racionais**. 2018. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Fronteira Sul, UFFS, Chapecó (SC), 2018. Disponível em: https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/2657. Acesso em: 12 dez. 2022.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2009.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, RS, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

PLAISANCE, E.; VERGNAUD, G. **As ciências da educação**. São Paulo: Edições Loyola, 2003.

VERGNAUD, G.; MOREIRA, M. A.; GROSSI, E. P. (Org). **O que é aprender? O iceberg da conceptualização**. Teoria dos campos conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, G. Conceptualização e Simbolização. In: III Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais. **Anais** ... Brasília: Universidade Católica de Brasília. pp. 1-139, 2018.

CAPÍTULO 5

OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM CONSTRUÍDOS NO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE CÔNICAS

Vitor José Petry[13], *Rosane Rossato Binotto*[14] e *Sandy Maria Gaio*[15]

1. INTRODUÇÃO

A presença das tecnologias digitais no ambiente escolar está possibilitando novas possibilidades pedagógicas para o ensino

13 Doutor em Matemática Aplicada pela UFRGS. Professor associado da UFFS, *Campus* Chapecó/SC. Professor permanente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Membro do Grupo de Pesquisa GPTMEM- Grupo de Pesquisa em TIC, Matemática e Educação Matemática . vitor.petry@uffs.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8838-8753.

14 Doutora em Matemática pela UNICAMP. Professora associada da UFFS, *Campus* Chapecó/SC. Professora permanente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Membro do Grupo de Pesquisa GPTMEM- Grupo de Pesquisa em TIC, Matemática e Educação Matemática. rosane.binotto@uffs.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9420-9312.

15 Licenciada em Matemática pela UFFS, *Campus* Chapecó/SC. Membro do Grupo de Pesquisa GPTMEM. sandymariagaio@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-1355.

e a aprendizagem de Matemática. O que requer dos professores da Educação Básica formação adequada para atuarem neste novo cenário. Assim, deve-se incentivar e propor a realização de ações pedagógicas que contemplem as tecnologias digitais na formação continuada desses professores.

Com a finalidade de contribuir com materiais didáticos digitais que abarquem objetos de conhecimento da Educação Básica, apresenta-se neste capítulo seis objetos virtuais de aprendizagem (OVA), construídos no *software* GeoGebra, para o estudo de cônicas. Conforme Audino e Nascimento (2010), um OVA é qualquer material digital que pode ser utilizado e reutilizado para dar suporte ao processo de ensino.

Os OVA apresentados resultam de atividades de pesquisa desenvolvida na Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), no período de 2020 a 2022. Eles também foram validados com professores da Educação Básica em um curso de extensão intitulado *Estudo de cônicas com o software GeoGebra e objetos virtuais de aprendizagem*, que integrou a Formação Continuada em Serviço para Professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, Programa da SBEM[16] de FormAção, Projeto: *Formação de Professores de Matemática da Educação Básica, ações com Tecnologias Digitais e Objetos de Aprendizagem no contexto da Política Educacional da BNCC*, desenvolvido na UFFS.

16 Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Além destes OVA, também foram elaborados outros - tratando do tema cônicas - que estão disponíveis no livro - Cônicas[17], no GeoGebra on-line.

Na sequência discorre-se sobre tecnologias digitais, OVA e formação de professores.

2. MARCO TEÓRICO

Muitas pesquisas na área da Educação Matemática propõem o uso das tecnologias digitais na sala de aula, apontando resultados promissores, uma vez que, essas tecnologias viabilizam a experimentação, a proposição de conjecturas e a rápida visualização de diferentes situações. De acordo com Scheffer (2012, p. 31), "a incorporação de novos recursos tecnológicos na sala de aula de matemática resulta na criação de ambientes de aprendizagem que levam o estudante ao desenvolvimento de novos conceitos e à consolidação da aprendizagem".

Para Borba; Silva e Gadanidis (2020, p. 55), "é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional". Além disso, o uso de *softwares* digitais deve ser considerado de forma integrada, acompanhados de formalização dos conceitos matemáticos e suas aplicações. Para Kay e Knaack (2007), OVA são todas as ferramentas interativas, baseadas na *Web*, que apoiam o aprendizado de conceitos específicos, incrementando, ampliando ou

17 Disponível em: https://www.geogebra.org/m/st9g83cf. Acesso em: 21 de dez. 2022.

orientando o processo cognitivo dos aprendizes. De acordo com Spinelli (n.d., p. 7),

> Um objeto virtual de aprendizagem é um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimule o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade. [...] dessa forma, pode compor um percurso didático, envolvendo um conjunto de atividades e integrando a metodologia adotada para determinado trabalho.

No que diz respeito ao uso de OVA nas aulas de Matemática, Guarda e Petry (2020, p. 717), consideram que

> os OVA constituem-se como elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, contribuindo na motivação e interação dos estudantes, permitindo uma visualização gráfica/geométrica dos objetos estudados.

Para esses autores ao se trabalhar com atividades envolvendo OVA deve-se, ao final, sistematizar os conceitos da Matemática presentes nestes objetos.

Ainda, no que diz respeito a proposição de OVA, Binotto; Petry e Gaio (2022), realizaram uma análise de possibilidades com dez OVA elaborados no GeoGebra, visando o ensino de cônicas, no Ensino Médio. Nesta análise os autores discutem "conceitos, elementos e propriedades da elipse, da parábola e da hipérbole, que podem ser explorados; em especial, a propriedade reflexiva usada em diferentes aplicações" (BINOTTO; PETRY e GAIO, 2022, p. 108). Eles destacam também a possibilidade de manipulação e de visualização dos OVA, o que pode facilitar a compreensão de conceitos matemáticos.

No trabalho desenvolvido por Kleemann e Petry (2020), a partir de um estudo com professores do Ensino Médio, esses autores destacam a importância da contextualização e de direcionamentos claros em propostas metodológicas, de forma que a manipulação dos OVA auxilie os estudantes a compreender e justificar os fenômenos abordados, utilizando-se de conceitos pertinentes para a explicação do objeto em estudo. Pontuam que o

> uso dos recursos tecnológicos para desenvolver materiais didáticos e inseri-los na aplicação e planejamento das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, pode impulsionar a aprendizagem dos conteúdos curriculares e favorecer a prática pedagógica (KLEEMANN e PETRY, 2020, p. 235).

Além disso, reforçam a importância de o professor ter condições de desenvolver seus próprios OVA com os softwares disponíveis, "visando proporcionar maior compreensão dos conceitos abordados em suas aulas, permitindo melhor visualização, seja geométrica ou algébrica, dos objetos de estudo" (KLEEMANN e PETRY, 2020, p. 235).

Tendo em vista que o uso das tecnologias digitais em sala de aula pode oferecer aos estudantes, muitos caminhos a percorrer, e de modo a não ocorrer o desvio da finalidade - que é processo de ensino e aprendizagem - é indispensável a presença orientadora do professor. Compete a ele mediar todo este processo usando e explorando as tecnologias digitais com criatividade e objetivos bem definidos. Assim, conforme salienta Ponte (2003) é necessário que os professores conheçam e dominem as tecnologias, incluindo softwares educacionais específicos da sua disciplina ou de educação no âmbito geral. Neste sentido os professores precisam estar atentos a essas possibilidades tecnológicas educacionais e aptos à sua implementação na sala de aula.

Esta atualização por parte dos professores pode ser realizada por meio de cursos de formação continuada, em que os participantes além de ampliar seus conhecimentos sobre determinado conteúdo, também possam entrar em contato com novas metodologias e/ou estratégias de ensino. Para Bovo (2004, p. 25), em um curso de formação continuada sobre o uso das tecnologias na prática pedagógica, o professor precisa adquirir

> conhecimentos técnicos sobre os softwares (ferramentas dos softwares); conhecimentos sobre as possibilidades do uso pedagógico do computador para o ensino e aprendizagem da matemática; conhecimentos de como organizar uma atividade e de como integrá-la ao currículo.

Tendo presente os benefícios e possibilidades pedagógicas do uso das tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem, propõe-se neste capítulo OVA para uso na Educação Básica. Além disso, destaca-se novamente, que estes objetos foram validados em um curso de extensão, em que os professores puderam entrar em contato com o GeoGebra, interagir com os OVA e descrever possibilidades do seu uso pedagógico, bem como, a partir destes objetos elaborar outros para serem utilizados nas aulas de Matemática.

Esta ação corrobora com o proposto por Bovo (2004) acerca de formação continuada, no que diz respeito as tecnologias e os conhecimentos que o professor precisa adquirir para fomentar sua prática pedagógica a fim de produzir benefícios para o ensino e a aprendizagem.

3. DESENVOLVIMENTO DOS OVA E RECURSOS DO GEOGEBRA ON-LINE

Este trabalho consiste em fornecer aos professores de Matemática subsídios para a elaboração de OVA e sua utilização nas aulas para o processo de ensino e aprendizagem. Utilizou-se o software GeoGebra para a construção dos OVA. Trata-se de um software de geometria dinâmica que, conforme o Instituto São Paulo - GeoGebra (n. d., n. p.), possibilita novas

> estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático. [...] É a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses.

Este software possui características de dinamismo pois permite manipular, combinar e visualizar os objetos construídos, bem como sincronizar os elementos algébricos e geométricos de um mesmo objeto, além de levar o estudante a conjecturar hipóteses e verificar teses.

Na descrição dos OVA são apresentadas algumas possibilidades de exploração de conteúdos matemáticos, bem como de interação com os objetos, realizadas pelos proponentes deste trabalho. Além disso, descrevem-se alguns comandos do GeoGebra utilizados na construção dos OVA a fim de auxiliar o professor na compreensão do objeto. Destaca-se que tanto na elaboração dos OVA quanto no curso de extensão utilizou-se também recursos do GeoGebra on-line, descritos na sequência.

O GeoGebra possui uma plataforma com aplicativos matemáticos, incluindo o software GeoGebra, além de conter um vasto repositório de materiais didáticos, recursos para a criação de atividades, livros e sala virtual no GeoGebra Tarefa. Permite a elaboração de atividades interativas no formato digital, com a inserção de textos, perguntas objetivas e discursivas, vídeos, imagens, entre outros. Além de possibilitar a construção colaborativa de atividades por meio do compartilhamento de arquivo com outras pessoas.

Basta abrir uma conta na plataforma do GeoGebra para criar atividades, livros e publicá-los. Ao acessar seu perfil, a pessoa deve clicar em **+ Criar** e escolher a opção desejada, conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Criar atividades no GeoGebra on-line.

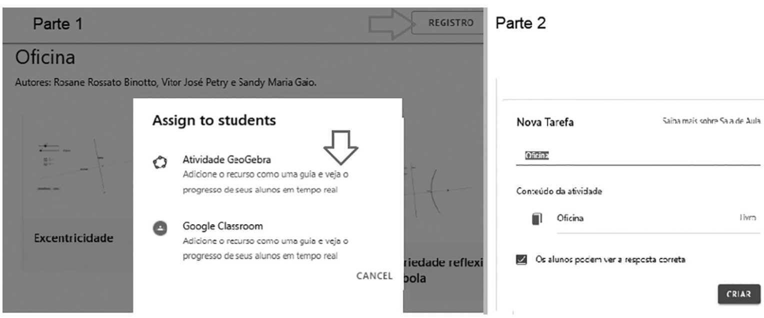
Fonte: Autores (2022).

Todos os OVA apresentados também estão disponíveis no livro on-line Cônicas e podem ser acessados por qualquer pessoa, inclusive é possível fazer o download desses objetos. Também é possível rever os passos da construção no GeoGebra. Para isso é necessário abrir o objeto no software GeoGebra, depois acessar o comando **Exibir** e na sequência **Protocolo de Construção**. Rever os passos da construção de atividades no GeoGebra contribui para a compreensão das etapas da sua elaboração e também para a construção de novos objetos pelos professores.

O GeoGebra Tarefa permite a criação de uma sala virtual, o que pode ser feito inserindo-se atividades nela e, por meio de um link ou de um código os estudantes podem acessá-la e realizar as atividades propostas. O professor pode acompanhar o progresso dos estudantes na realização das atividades em tempo real, bem como a conclusão ou não da mesma.

Para criar essa sala virtual o professor acessa sua conta no GeoGebra on-line, seleciona a atividade que deseja disponibilizar aos estudantes, na sequência clica em **Registro** e depois em **Atividade GeoGebra**, conforme ilustra a Parte 1 da Figura 2. Após isso, uma nova página é aberta, nela o professor pode alterar o nome da tarefa em **Nova Tarefa**, permitir ao estudante visualizar a resposta correta das perguntas, após tentar respondê-las e então confirmar a criação da sala clicando em **Criar,** conforme ilustra a Parte 2 da Figura 2.

Figura 2 – Criar uma sala Virtual no GeoGebra on-line.



Fonte: Autores (2022).

A Figura 3 apresenta um *print* da tela do GeoGebra – sala virtual denominada Oficina – utilizada no curso de extensão já nominado. Os participantes do curso foram nomeados por Aluno X. Observa-se o progresso de alguns destes participantes com relação ao total de atividades desenvolvidas.

Figura 3 – Exemplo de uma Sala Virtual.

Fonte: Autores (2022).

Os OVA usados nestas atividades foram criados pelos autores e posteriormente inseridos na plataforma do GeoGebra na forma de uma sequência didática para possibilitar a interação e manipulação pelos participantes do referido curso.

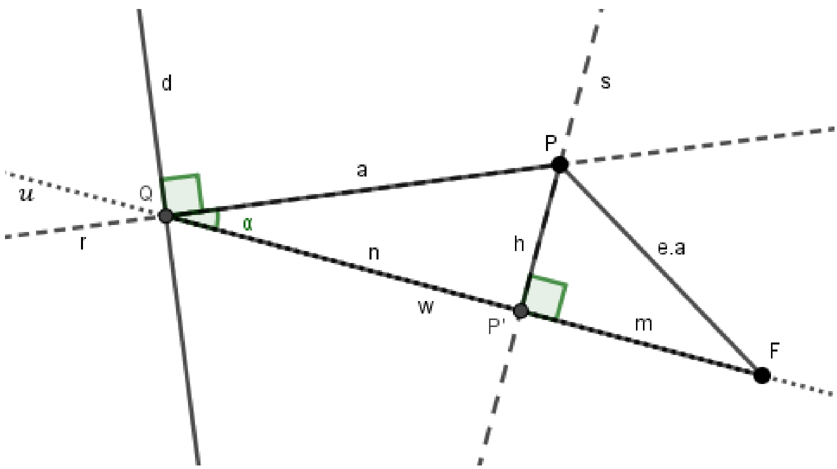
4. OS OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM

Nesta seção apresentam-se os OVA e descrevem-se suas principais características, bem como possibilidades pedagógicas para o seu uso. Além de destacar alguns comandos do GeoGebra utilizados na construção destes OVA.

4.1. OVA1 – CONSTRUÇÃO DAS CÔNICAS

O OVA1 foi desenvolvido com a finalidade de construir cônicas não degeneradas definidas a partir de uma reta diretriz dada e um ponto fixo chamado de foco. Estas cônicas consistem nos lugares geométricos definidos pelos pontos que mantêm constante a razão de sua distância até o foco e até a reta diretriz, respectivamente. Esta razão, denominada excentricidade (e), é portanto, dada por $e = \frac{PF}{PQ}$, onde P é um ponto qualquer da cônica, F o foco, e Q a projeção ortogonal de sobre a reta diretriz. Para a construção deste OVA, considerou-se o problema que consiste em determinar o conjunto de pontos P que satisfaça a relação $PF = e \cdot PQ$, em que são dados a reta diretriz d, o foco F e a excentricidade e, sendo Q a projeção ortogonal de P sobre d, conforme esquema ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Esquema para a compreensão do problema da construção do OVA1.



Fonte: Os Autores (2022).

Denotando por $a = PQ$, segue que $PF = e \cdot a$. Sendo P' a projeção ortogonal do ponto P sobre o lado do triângulo QFP, sua altura relativa a este lado é $h = PP'$, de forma que os triângulos $QP'P$ e $FP'P$ são retângulos em P'. Fazendo $n = QP'$, $m = P'F$ e $w = QF = n + m$, tem-se que para qualquer ponto Q da reta diretriz, o(s) ponto(s) correspondente(s) P pertencente(m) ao lugar geométrico descrito pela cônica, corresponde à intersecção das retas r e s, em que r é a reta perpendicular a d, traçada por Q e s é uma reta perpendicular à reta u, que contém QF traçada por P' $\in u$. Geometricamente há a possibilidade da existência de dois pontos com essa característica, o que sugere a possibilidade de existência de duas soluções de pontos para um mesmo $Q \in d$. Assim, para obter P, é necessário determinar a distância orientada n em função dos parâmetros conhecidos. Observa-se ainda que o ângulo a entre as retas u e r está bem definido. Pelo Teorema de Pitágoras, segue que:

$$a^2 = n^2 + h^2 \text{ e } e^2a^2 = h^2 + m^2 \qquad (01)$$

o que implica em:

$$(e^2 - 1)a^2 = m^2 - n^2 = w^2 - 2nw. \qquad (02)$$

Do triângulo , tem-se que

$$\cos\alpha = \frac{n}{a} \Longrightarrow a = \frac{n}{\cos\alpha}. \qquad (03)$$

Analisando geometricamente o problema, tem-se que e portanto, Substituindo (03) em (02), segue que:

$$\frac{e^2-1}{\cos^2\alpha}n^2+2wn-w^2=0. \qquad (04)$$

Ao resolver a equação (04) na incógnita , tem-se que

$$n=\frac{w\cos^2\alpha\,(1\pm\sqrt{k})}{1-e^2};\quad \text{com}\quad k=1+\frac{e^2-1}{\cos^2\alpha}. \qquad (05)$$

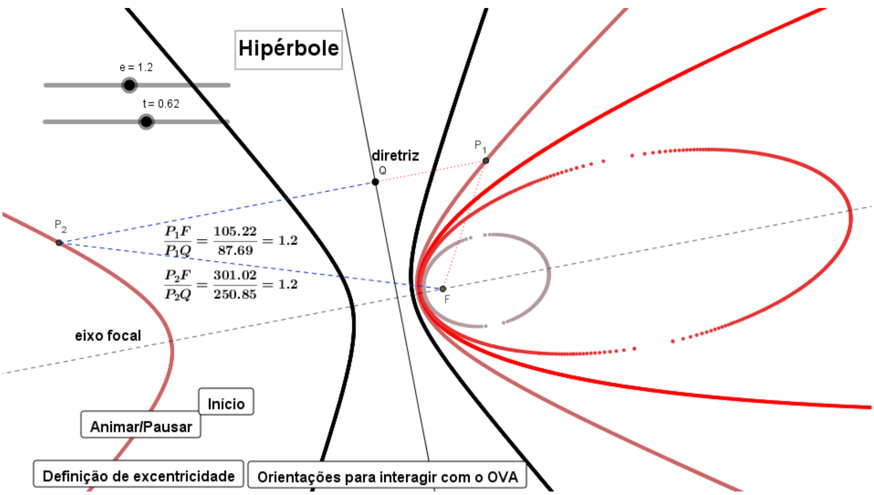
Observa-se que o problema pode ter duas, uma ou nenhuma solução, dependendo do valor da excentricidade e e do ângulo a, que depende da posição do ponto $Q \in d$ em relação ao foco F. Essas soluções são representadas pelos pontos P_1 e P_2. Tem-se ainda que a relação é válida para $e \neq 1$.Para o caso em que e = 1, o triângulo QPF é isósceles de base QF, de forma que $n=\frac{w}{2}$.

O OVA 1 foi construído de forma a permitir a interação dos estudantes, que podem alterar a reta diretriz e o foco. Foram estabelecidos dois controles deslizantes, um para permitir a escolha do valor da excentricidade e outro para o parâmetro t com possibilidade de variação entre zero e a unidade. Considerando o segmento KJ a parte da reta visível na tela, se $Q \in KJ$, então $Q = K + t(J - K)$, com $t \in [0,1]$. Assim ao ativar **Animar** o **Controle deslizante**, Q percorre toda a parte da reta d visível na tela. A partir do ponto Q são definidas as retas r e u, permitindo a obtenção do ângulo α e o comprimento w do segmento QF. Usando a **Caixa de entrada** do GeoGebra, pode-se então calcular as raízes n da Equação (04), usando a solução (05). O ponto P' é obtido por $P' = Q + n/w\,(F - Q)$, visto que $P' \in QF$, se $0 \leq n \leq w$. Se $n > w$, P'

pertence à semirreta $\overrightarrow{QF}$, tal que F está entre Q e P' e se $n < 0$, $P' \in u$ está no semipleno oposto (com origem em d) ao foco F.

Uma vez obtido o ponto P', obtém-se a reta $s \perp u$, com $P' \in s$, e o ponto P de forma que $\{P\} = s \cap r$. Nota-se que de acordo com a solução (05) pode existir um, dois ou nenhum ponto P a partir dessa construção. Assim, ao variar o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, Q representa um ponto qualquer da reta diretriz, enquanto P é um ponto do lugar geométrico representado pela cônica. Habilitando o rastro desses pontos P_1 e P_2 e animando o parâmetro t, ao acionar o botão **Animar/Pausar**, a cônica passa a ser representada. Com base nesta construção desenvolveu-se o OVA1, dado na Figura 5.

Figura 5 – OVA1: Definição das cônicas a partir da reta diretriz e um dos focos.



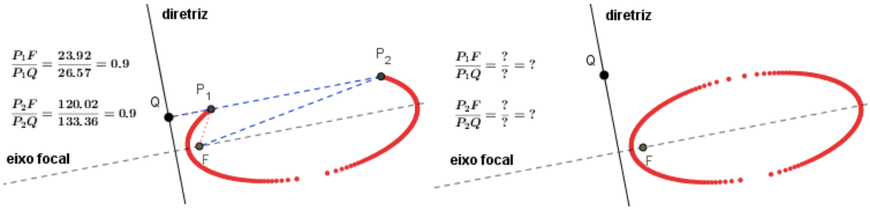
Fonte: Os Autores (2022).

Na tela inicial desse OVA é dada a reta diretriz e um foco F, que podem ser livremente alterados por meio de manipulação, seguindo as orientações que aparecem na tela ao acionar o botão específico. A imagem ilustrada na Figura 5 mostra as cônicas geradas para distintos valores da excentricidade.

Durante a interação com o objeto, pode-se observar que quando e < 1, a cônica obtida corresponde a uma elipse. Nesta situação os pontos P_1 e P_2, quando estão definidos, estão ambos no mesmo semiplano (com origem na diretriz) que o ponto *F*. Neste caso, é possível observar que $e_2 - 1 < 0$, de forma que quando $cos^2\,\alpha$ for suficientemente pequeno, a equação (04) não tem solução ($k < 0$). Do ponto de vista geométrico, isso ocorre quando *Q* se afasta do eixo focal. Para duas posições específicas *Q* de sobre a reta diretriz, tem-se $k = 0$, de forma que $P_1 = P_2$. Para os valores de *Q* suficientemente próximos do eixo focal, têm-se duas soluções, resultando em pontos distintos. A união de todos os pontos P_1 e P_2, que mantém a razão entre as distâncias constantes (igual ao valor de *e*) é que define o lugar geométrico correspondente. As situações para $k > 0$ e $k < 0$, com $e = 0{,}9$, são representadas respectivamente na Figura 6.

Para o caso em que $e = 1$, tem-se $\frac{PF}{PQ} = 1$, e portanto, $PF = PQ$. Independentemente da posição de *Q* sobre a reta diretriz, a solução para a Equação (04) é única, de forma que os pontos P_1 e P_2 são coincidentes. Isso pode ser observado ao animar o OVA1. Neste caso, os pontos P_1 e P_2 (de forma coincidente) descrevem a parábola representada em vermelho na Figura 6. Observa-se também que todos os pontos desse lugar geométrico estão no mesmo semiplano do ponto *F*.

Figura 6 – Determinação do lugar geométrico de uma elipse a partir do OVA1.



Fonte: Os Autores (2022).

Ao escolher um valor da excentricidade $e > 1$, é possível observar duas soluções para o ponto P, independente da posição de Q sobre a reta diretriz, de forma que nestes casos, sempre se tem $P_1 \neq P_2$, formando os dois ramos de uma hipérbole, que ficam em semiplanos opostos (em relação à reta diretriz).

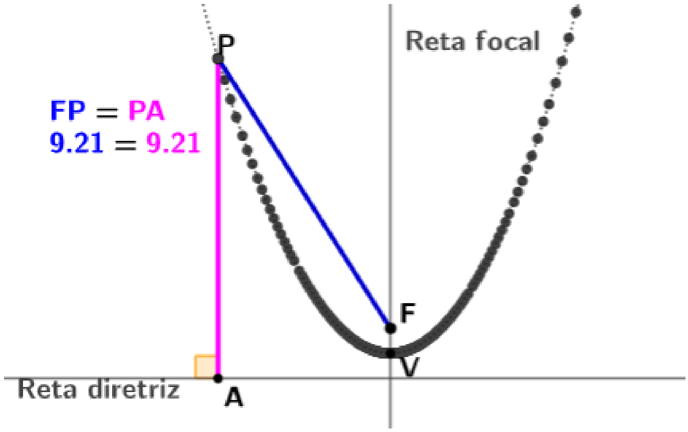
A caixa de texto inserida neste OVA, com as razões entre as distâncias, permite observar que, mesmo que as distâncias sejam diferentes entre os pontos considerados, ao animar o objeto, as respectivas razões se mantêm constantes e iguais ao valor da excentricidade escolhida. É possível, através desse OVA, estabelecer uma relação entre o valor da excentricidade e o tipo de cônica formada, que também é identificada em uma caixa de texto específica, como é o caso da hipérbole (com e = 1,2) que estava sendo representada no momento do *print* apresentado na Figura 5. Por fim, é possível identificar que quanto maior for o valor da excentricidade, maior será a curvatura da respectiva cônica.

Para diferenciar as cores das diferentes cônicas, basta programar as tonalidades de "vermelho", "verde" e "azul" dos pontos que tem o rastro habilitado (no caso desse OVA, os pontos P_1 e P_2). Para isso, é necessário selecionar estes pontos, acessar suas propriedades, e em Avançado, definir as respectivas tonalidades em função do parâmetro desejado. Como a intenção neste OVA era de alterar a cor em função da excentricidade, as tonalidades foram escolhidas em função do valor de e.

4.2. OVA2 – DEFINIÇÃO DE PARÁBOLA

O OVA2 consiste em uma construção básica e tem a finalidade de visualizar geometricamente a definição de uma parábola, dada a reta diretriz e o foco. Usando o comando de construção de uma parábola, do próprio GeoGebra, obteve-se a parábola definida pela reta diretriz e o foco F. Marcando um ponto qualquer P sobre esta parábola, foram destacados os segmentos PF e PA, em que A é a projeção ortogonal de P sobre a reta diretriz. A medida destes dois segmentos é destacada em uma caixa de texto, de forma a chamar atenção dos estudantes ao fato de que apesar destes comprimentos variarem ao animar o ponto P (que tem o rastro habilitado), sempre se mantém a igualdade $PF = PA$, definindo desta forma, o lugar geométrico representado pela parábola. Observa-se que se trata de um caso particular da representação feita no OVA1, com $e = 1$. Elementos como o vértice e a reta focal também são visualizados. Um *print* da tela desse objeto é apresentado na Figura 7.

Figura 7 – OVA2: Definição de parábola a partir da reta diretriz e do foco.



Fonte: Os Autores (2022).

4.3. OVA3 – PROPRIEDADE REFLETIVA DA PARÁBOLA

Para visualizar a propriedade refletiva da parábola, foi construído o OVA3, de forma que ao animar o objeto, todos os raios que incidem na parábola paralelamente ao seu eixo focal são refletidos para o foco. Seguindo as instruções disponíveis no objeto, os estudantes podem alterar a reta diretriz e o foco F. Durante a interação com o OVA, também podem escolher a quantidade de raios paralelos a seres exibidos na tela, ao alterar o valor de n no respectivo controle deslizante. Na sua construção foram usados alguns comandos diferentes em relação aos objetos anteriores, dentre eles, a criação de listas. Para tanto, inicialmente foram escolhidos dois pontos D e E sobre a parábola, simétricos em relação ao eixo focal, de forma que o espelho parabólico a ser considerado seja o arco parabólico definido por estes dois pontos. Digitando o respectivo comando na caixa de entrada, cria-se uma lista ($lista_1$) de $n + 1$ pontos pertencentes ao segmento DE, de forma que a distância entre dois pontos consecutivos desta lista é igual à $\frac{DE}{n}$. Os comandos usados para a criação das listas podem ser visualizados no Quadro 1.

Quadro 1 – Comandos usados para a criação das listas na construção do OVA3.

Lista	Comandos
$lista_1$	$= Sequência\left(E + \frac{k}{n}(D - E),\ k,\ 0,\ n\right)$
$lista_2$	= *Sequência* (*Perpendicular* (*Elemento* ($lista_1$, k), *ditetriz*), k, 1, $n + 1$)
$lista_3$	= *Sequência* (*Interseção* (c, *Elemento* ($lista_2$, k)), k, 1, $n + 1$)
$lista_4$	= *Sequência* (*Interseção* (i, *Elemento* ($lista_2$, k)), k, 1, $n + 1$)
$lista_5$	= *Sequência* (*Interseção* (*ditetriz*, *Elemento* ($lista_2$, k)), k, 1, $n + 1$)
$lista_6$	= *Sequência* (*Elemento* ($lista_4$, k) — t (*Elemento* ($lista_4$, k) — *Elemento* ($lista_5$, k)), k, 1, $n + 1$)
$lista_7$	= Sequência (*Se* (*Ptoext* (Elemento ($lista_4$, k), *Elemento* ($lista_3$, k), *Elemento* ($lista_6$, k)), *Segmento* (*Elemento* ($lista_4$, k), *Elemento* ($lista_3$, k))), k, 1, $n + 1$)
$lista_8$	= *Sequência* (*Se* (*ptoint* (*Elemento* ($lista_4$, k), *Elemento* ($lista_3$, k), *Elemento* ($lista_6$, k)), *Vetor* (*Elemento* ($lista_4$, k), *Elemento* ($lista_6$, k))), k, 1, n+1)
$lista_9$	= *Sequência* (*Tangente* (*Elemento* ($lista_3$, k), c), k, 1, $n + 1$)
$lista_{10}$	= *Sequência* (*Se* (*Ptoext* (*Elemento* ($lista_4$, k), *Elemento* ($lista_3$, k), *Elemento* ($lista_6$, k)), *Vetor* (*Elemento* ($lista_3$, k), *Reflexão* (*Elemento* ($lista_6$, k), *Elemento* ($lista_9$, k)))), k, 1, $n + 1$)

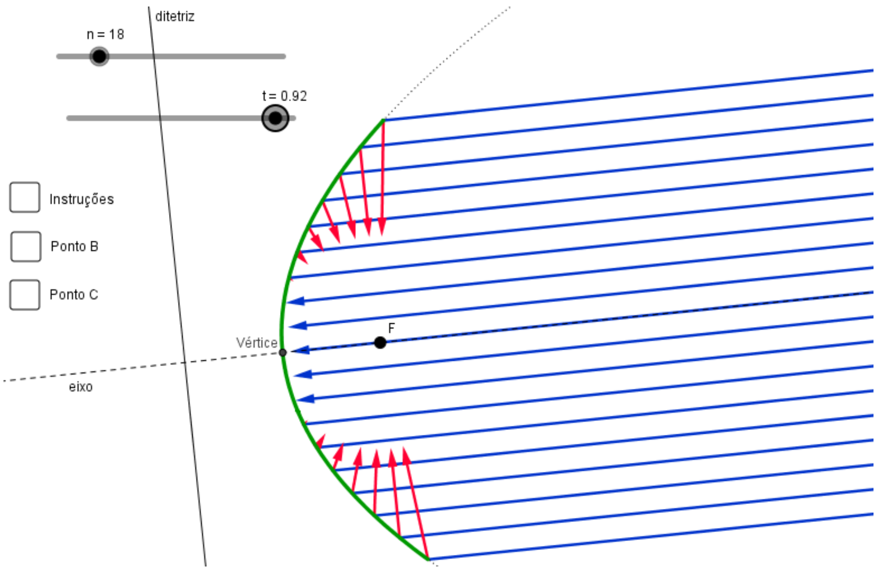
Fonte: Os Autores (2022).

Para cada ponto da $lista_1$, é traçada a reta perpendicular à diretriz, contendo o ponto da posição correspondente desta lista. Nota-se que k é o índice de contagem que varia de 1 até n + 1, percorrendo assim todos os pontos da $lista_1$ para aplicar o comando de traçar a reta perpendicular à diretriz, passando pelo respectivo ponto. Seguindo a mesma lógica, obtém-se a $lista_3$, com os pontos de interseção das retas da $lista_2$ com a parábola, através do comando para $lista_3$, onde c é a cônica (parábola). Na sequência foi definida uma reta i perpendicular ao eixo focal para determinar as posições de início da projeção dos raios. Para reforçar com os estudantes a ideia de que estes raios provêm do espaço, emitidos por satélites, no exemplo da aplicação dos conceitos abordados em antenas parabólicas, essa reta pode ser traçada de forma a ficar fora da tela de visualização. Isso foi feito, ao definir os "cantos" da tela, que indicam, independente do zoom que se dê durante a visualização, as coordenadas dos pontos dos quatro cantos. O comando "*canto*(K)", com K = 1,2,3,4, fornece os pontos inferior esquerdo, inferior direito, superior direito e superior esquerdo, respectivamente.

A $lista_4$ consiste na sequência de pontos de interseção da reta i com as retas da $lista_2$, enquanto a $lista_5$ é formada pelos respectivos pontos de interseção das retas da $lista_2$ com a reta diretriz. Já a $lista_6$ gera uma sequência de pontos que percorrem os segmentos paralelos com origem nos pontos da $lista_4$ e extremidade nos pontos da lista $lista_5$, quando o parâmetro t, dado em um controle deslizante, varia de zero a um. Para a construção das listas seguintes foi necessária a criação de duas ferramentas novas para serem usadas neste OVA. O objetivo destas ferramentas é de identificar para cada valor do parâmetro t, quais dos pontos da $lista_6$ estão entre a cônica e a reta i e quais estão entre a cônica e a reta diretriz. Para a criação da primeira ferramenta foram marcados três pontos A, B, e C sobre a tela, os segmentos $a = AB$ e $b = AC$, para então criar o valor booleano, que compara o comprimento destes segmentos, digitando na caixa de entrada $l = Se(a < b, true, false)$. Desta forma, foi possível construir a ferramenta *ponInt* que a partir da comparação entre três pontos retorna com "verdadeiro" se a distância entre o primeiro e o segundo é menor do que a distância entre o primeiro e o terceiro. Para isso, no menu ferramentas, basta clicar em Criar uma nova ferramenta. No campo Objetos finais, escolher o valor booleano, em Objetos iniciais, escolher os três pontos, na mesma ordem em que serão usados no OVA, e para finalizar, atribuir um nome à ferramenta. Também foi possível inserir uma ajuda, que serviu para lembrar a ordem em que os pontos deveriam ser colocados no momento de usar a ferramenta. Assim, a ferramenta *ponInt* retorna "verdadeiro" se o ponto flutuante (da $lista_6$) está entre a parábola e a reta i, ou seja, entre os correspondentes pontos da $lista_4$ e da $lista_3$.

De forma análoga, foi definida a ferramenta que retorna "verdadeiro" se o ponto flutuante (da $lista_6$) está entre a parábola e a reta diretriz. Dessa forma, a $lista_7$ é formada pela sequência de segmentos com extremidades nos pontos da $lista_4$ e da $lista_3$, respectivamente, sempre que o ponto correspondente $lista_6$ da estiver entre a parábola e a reta diretriz, isto é, se der "verdadeiro" para a ferramenta *ponExt*. Se o ponto da $lista_6$ estiver entre a parábola e a reta *i*, isto é, se der "verdadeiro" para a ferramenta *ponInt*, então a $lista_8$ retorna o vetor com origem no correspondente ponto da e extremidade no respectivo ponto flutuante da $lista_6$. Os elementos obtidos na $lista_7$ e na $lista_8$ estão representados na cor azul da Figura 8..

Figura 8 – OVA3: Propriedade reflexiva na parábola.



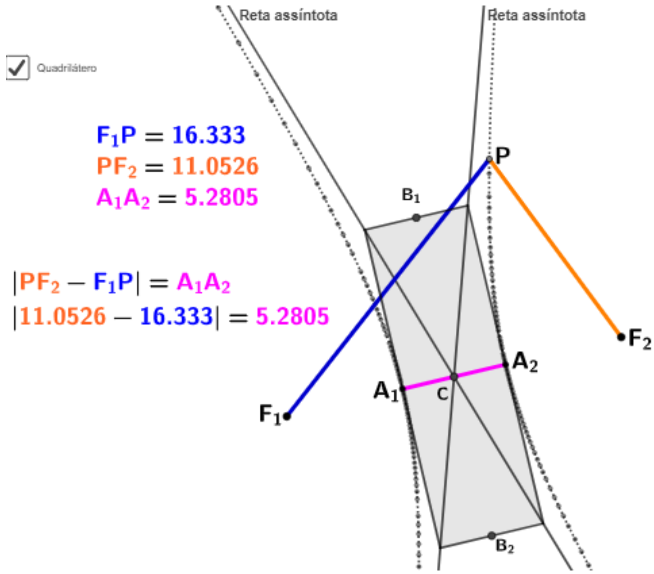
Fonte: Os Autores (2022).

Para representar os raios refletidos, inicialmente foi criada a $lista_9$, contendo as retas tangentes à parábola em cada um dos pontos da $lista_3$. A partir disso, esses raios são obtidos na sequência da $lista_{10}$, representando os vetores com origem nos pontos da *lista*$_3$ e extremidade em pontos obtidos pela reflexão dos respectivos pontos flutuantes da *lista*$_6$ em relação às retas tangentes da *lista*$_9$, sempre que a ferramenta *ponExt* retornar o valor “verdadeiro”. Estes vetores estão representados em vermelho da Figura 8. Por fim, considerando o objetivo de cada OVA, pode-se optar por esconder ou exibir cada um dos objetos construídos, de forma a manter a visualização dos elementos que se queira que os estudantes observem durante a manipulação. No caso do OVA3 representado na Figura 8, apenas os elementos das listas *lista*$_7$, *lista*$_8$ e *lista*$_{10}$ foram exibidos.

4.4. OVA4 – DEFINIÇÃO DE HIPÉRBOLE

O OVA4 tem a finalidade de permitir a visualização da definição de uma hipérbole, dados os dois focos (F_1 e F_2) e um de seus vértices (A_1). Usando o comando de construção de uma hipérbole, do GeoGebra, obteve-se a respectiva cônica. Marcando um ponto sobre a hipérbole, foram destacados os segmentos PF_1, PF_2 e A_1A_2 em que A_2 é o segundo vértice. A medida destes três segmentos é destacada em uma caixa de texto, de forma a chamar atenção dos estudantes ao fato de que apesar de estes comprimentos variarem ao animar o ponto P (que tem o rastro habilitado), sempre se mantém a relação $|PF_2 — PF_1| = A_1A_2$, definindo desta forma, o lugar geométrico representado pela hipérbole ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – OVA4: Definição da hipérbole a partir dos dois focos e um de seus vértices.



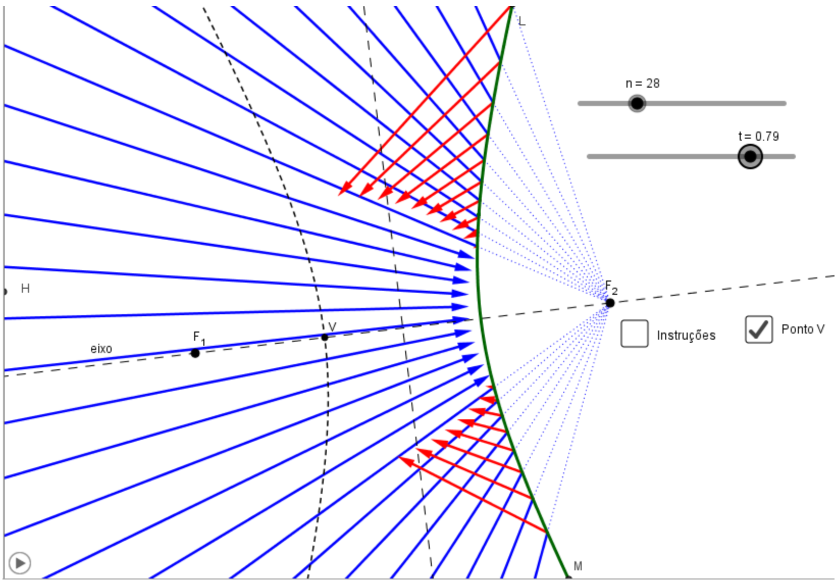
Fonte: Os Autores (2022).

Ao ativar o botão Quadrilátero outros elementos podem ser visualizados neste OVA, como o eixo não focal, as assíntotas e o quadrilátero cujas diagonais estão sobre as assíntotas.

4.5. OVA5 – PROPRIEDADE REFLETIVA DA HIPÉRBOLE

Para visualizar uma importante propriedade refletiva da hipérbole, foi construído o OVA5, de forma que ao animar o objeto, todos os raios que incidem em um ramo espelhado da hipérbole (de forma a ter um espelho convexo) direcionado ao foco pertencente à região convexa determinada por este ramo, são refletidos para o outro foco. Seguindo as instruções disponíveis no objeto, os estudantes podem alterar os focos e consequentemente, o eixo focal e um dos vértices, além da quantidade de raios a seres exibidos na tela. Na construção desse OVA foram usados comandos e ferramentas semelhantes aos usados no OVA3, dentre eles, a criação de listas e de novas ferramentas.

Figura 10 – OVA 5: Propriedade reflexiva na hipérbole.



Fonte: Os Autores (2022).

Após escolhido o ramo da hipérbole c para representar a superfície espelhada (no caso, o ramo que passa entre o centro O e o foco F_2) foram definidos os pontos (L e M) de intersecção desse ramo com os segmentos que compõe a margem superior e inferior da tela de visualização, respectivamente, que são os segmentos com extremidades nos respectivos cantos. Visando obter apenas os raios emitidos do lado da "superfície espelhada" da hipérbole, foi definido o circuncentro O_1 do triângulo LMH, em que H é o ponto médio entre os cantos direitos da tela. Definiu-se ainda $\alpha = L\widehat{O_1}M$ para em seguida criar a sequência $n + 1$ de pontos da $lista_1$ que divide o arco de circunferência $\widehat{LHM}$ em arcos congruentes.

A $lista_2$ é formada por semirretas com origem em F_2, passando pelos respectivos pontos da lista anterior. Novamente para passar a ideia de raios emitidos de posições distantes do espaço, definiu-se a origem dos raios incidentes em posições fora da tela de visualização. Estes pontos são obtidos na $lista_3$, pela intersecção das semirretas da $lista_2$ com a circunferência q que contém os quatro cantos da tela. Já na $lista_4$ são definidos os pontos flutuantes que percorrem os segmentos que têm uma extremidade nos pontos correspondentes da $lista_3$ e a outra extremidade no foco F_2, quando o parâmetro varia de zero até um.

Para assegurar que as próximas etapas considerassem apenas o ramo escolhido da hipérbole, foi traçada a reta l, perpendicular ao eixo, passando pelo centro O (ponto médio dos dois focos), de forma que as sequências definidas nas $lista_5$ e $lista_6$, garantem que todos os pontos da $lista_2$ pertencem ao arco da hipérbole compreendido entre os pontos L e M e estão no ramo escolhido, sendo as respectivas retas tangentes à hipérbole nestes pontos definidas na $lista_8$. Novamente foi necessária a construção de duas ferramentas, visando verificar a posição dos pontos flutuantes da $lista_4$ em relação aos pontos correspondentes do ramo da cônica (na $lista_7$) e ao foco F_2.

A *lista*$_9$ é formada pelos vetores (em azul na Figura 10) com origem nos pontos da *lista*$_3$ e extremidade nos pontos flutuantes da *lista*$_4$, sempre que este estiver na região convexa do plano definida pelo ramo escolhido, isto é, se a ferramenta "Externo" retornar o valor "verdadeiro". Quando a ferramenta "Interno" retornar o valor "verdadeiro", o ponto flutuante está na região convexa do plano delimitada pelo ramo da hipérbole, e então, a *lista*$_{10}$ é formada pelos segmentos (em azul) com extremidades nos pontos da *lista*$_3$ e da *lista*$_7$, que são pontos pertencentes ao ramo escolhido. Os prolongamentos destes segmentos até o foco F_2 são definidos na *lista*$_{15}$. A *lista*$_{11}$ fornece a reflexão dos pontos flutuantes da *lista*$_4$ sobre as respectivas retas tangentes obtidas na *lista*$_8$, sempre que a ferramenta "Interno" retornar o valor "verdadeiro".

Como a distância dos pontos da *lista*$_7$, que pertencem ao ramo da hipérbole não são equidistantes dos dois focos, foi necessário criar a ferramenta "razão" que calcula a razão entre a distância de cada elemento desta lista até os respectivos focos, conforme comando dado na *lista*$_{12}$. A *lista*$_{13}$ fornece a extremidade do vetor refletido, considerando o fator multiplicativo calculado na lista anterior e finalmente, a lista *lista*$_{14}$ é formada pelos vetores refletidos (em vermelho na Figura 10), sempre que o respectivo elemento da *lista*$_4$ for "verdadeiro" para a ferramenta "Interno". Os comandos usados para a geração de cada uma das listas são apresentados no Quadro 2, enquanto que um *print* de tela do OVA5 é mostrado na Figura 10.

Quadro 2 – Comandos usados para a criação das listas na construção do OVA5.

Lista	Comandos
$lista_1$	= *Sequência* (*Girar* ($L, \frac{k\,\alpha}{n+1}$, O_1), k, 0, n)
$lista_2$	= *Sequência* (*Semirreta* (*F* _2, *Elemento*($lista_1$,k)), k, 1, n + 1)
$lista_3$	= *Sequência* (*Interseção* (q, *Elemento*($lista_2$, k)), k, 1, n + 1)
$lista_4$	= *Sequência* (*Elemento* ($lista_3$, k) + t (*F*_2 — *Elemento* ($lista_3$, k)), k, 1, n + 1)
$lista_5$	= *Sequência* (*Interseção* (*Elemento* ($lista_2$, k), l), k, 1, n + 1)
$lista_6$	= *Sequência* (*Segmento* (*Elemento* ($lista_5$, k), *F*_2), k, 1, n + 1)
$lista_7$	= *Sequência* (*Interseção* (c, *Elemento* ($lista_6$, k)), k, 1, n + 1)
$lista_8$	= *Sequência* (*Tangente* (*Elemento* ($lista_7$, k), c), k, 1, n + 1)
$lista_9$	= *Sequência* (*Se* (*Externo* (*Elemento* ($lista_3$, k), *Elemento* ($lista_4$, k),*Elemento* ($lista_7$, k)), *Vetor* (*Elemento* ($lista_3$, k), *Elemento* ($lista_4$, k))), k, 1, n + 1)
$lista_{10}$	= *Sequência* (*Se* (*Interno* (*Elemento* ($lista_3$, k), *Elemento* ($lista_4$, k), *Elemento* ($lista_7$, k)), *Segmento* (*Elemento* ($lista_3$, k), *Elemento* ($lista_7$, k))), k, 1, n + 1)

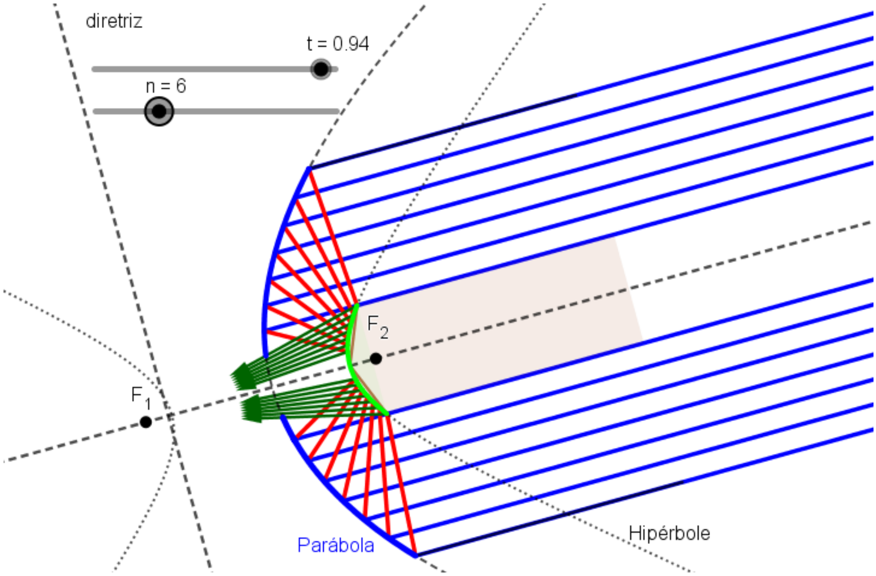
Fonte: Os Autores (2022).

Para destacar o arco compreendido entre os pontos L e M do ramo escolhido foi usada o comando **Lugar geométrico**. Para isso foi definido o segmento $h = LM$, um ponto $F \in h$ (genérico em h, digitando na caixa de entrada o comando F = *ponto*(h)) e o segmento k = FF1. Note que quando F percorre todos os pontos do segmento h, a interseção de com o ramo escolhido da hipérbole, percorre todos os pontos do lugar geométrico desejado. Assim, definindo a *interseção*(c, k, 2) do segmento k com o ramo 2 da hipérbole, o lugar geométrico desejado é dado pelo comando LugarGeométrico(G, F), isto é, o lugar geométrico formado por todos os pontos G quando F assume todos os possíveis pontos onde ele está definido, ou seja, do segmento h.

4.6. OVA6 – UMA APLICAÇÃO DAS PROPRIEDADES REFLEXIVAS DA HIPÉRBOLE E DA PARÁBOLA: TELESCÓPIO REFLETOR

O OVA6 foi construído para simular o funcionamento telescópio refletor composto por dois espelhos, um parabólico côncavo e outro hiperbólico convexo, considerando um dos focos (F_2) da hipérbole coincidente ao foco da parábola, conforme mostrado na Figura 11. Para sua construção, usou-se de forma integrada as propriedades já visualizadas no OVA3 e no OVA5, usando praticamente os mesmos conceitos e ferramentas discutidos nestas construções. Desta forma, os raios emitidos pelos astros a serem observados no espaço incidem paralelamente ao eixo focal (considerando um erro de aproximação infinitesimal) sobre o espelho parabólico (representados na cor azul no OVA6) e são refletidos (em cor vermelha) para o foco, que também é foco do espelho hiperbólico. Assim, como os raios incidem sobre o espelho hiperbólico em direção ao foco F_2, estes são refletidos (com representação na cor verde) em direção ao outro foco (F_1), de acordo com a propriedade verificada no OVA5. Como consequência, a imagem é formada e pode ser visualizada no foco .

Figura 11 – OVA6: Propriedade reflexiva na hipérbole.



Fonte: Os Autores (2022).

Durante a interação dos estudantes com esse OVA, estes podem alterar os focos, a reta diretriz da parábola e o vértice da hipérbole, de forma a obter diferentes tamanhos de espelhos ou mesmo distâncias focais, permitindo flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico adequando-o, assim, às necessidades de cada situação a ser observada. Para que o sistema funcione de forma sincronizada, basta apenas observar a necessidade de coincidir o foco do espelho hiperbólico com o foco do espelho parabólico, de modo a manter a validade das propriedades mencionadas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, foram apresentados alguns OVA, elaborados no GeoGebra, visando ao ensino de cônicas, no Ensino Médio, apresentados à professores de Matemática de um curso de formação continuada. A manipulação dos OVA pelos professores, lhes permitiu uma visão mais ampla e diferenciada acerca de possibilidades de explorar conceitos da Matemática e suas aplicações a partir dos objetos apresentados. Ao analisar as possibilidades, sugere-se que a interação dos estudantes com os objetos possa contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos e para a compreensão de suas propriedades em aplicações para a projeção de equipamentos usados em situações práticas.

Neste contato com professores do Ensino básico observou-se que para muitos, elaborar seus próprios OVA, constitui-se um grande desafio, principalmente pelo fato de exigir bastante tempo e dedicação para sua concretização. Isso se justifica pela necessidade de dedicação de tempo significativo para sua elaboração, além de exigir habilidades suficientes à articulação dos recursos tecnológicos com os conceitos a serem abordados, o que para alguns ainda é uma grande dificuldade, pois

> a apropriação dessas tecnologias para fins pedagógicos requer um amplo conhecimento de suas especificidades tecnológicas e comunicacionais e que devem ser aliadas ao conhecimento profundo das metodologias de ensino e dos processos de aprendizagem. Não é possível pensar que o simples conhecimento da maneira de uso do

> suporte (ligar a televisão ou o vídeo ou saber usar o computador e navegar na Internet) já qualifica o professor para a utilização desses suportes de forma pedagogicamente eficiente em atividades educacionais (KENSKI, 2003, p. 05).

Justifica-se assim a importância de investimentos para a oferta de momentos de formações continuadas com esse viés, bem como do desenvolvimento de materiais com instruções e exploração de ferramentas do próprio software. Foi nesta perspectiva que se desenvolveu o presente trabalho, ao se mostrar os principais passos usados para a construção de cada um dos OVA apresentados, como a criação de listas com a sequência de objetos, a representação de lugares geométricos e a criação de novas ferramentas. Consideradas a importância e as possibilidades apontadas pelos professores durante o curso de formação, mesmo com algumas dificuldades, considera-se fundamental que os professores possam aproveitar seus momentos de planejamento de atividades docentes para a estruturação e desenvolvimento de materiais úteis à utilização em sua prática docente, em particular, usando as ferramentas tecnológicas disponibilizada no software GeoGebra. Assim, acredita-se que o material apresentado neste capítulo possa contribuir.

6. REFERÊNCIAS

AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. S. Objetos de aprendizagem - diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. **Revista Contemporânea de Educação**, Rio de Janeiro, RJ, v. 10, n. 5, p. 128-148, 2010.

BINOTTO, R. R.; PETRY, V. J.; GAIO, S. M. Estudo de Possibilidades do Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino de Cônicas por meio de um Exercício de Imaginação Pedagógica. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, SP, v. 9, n. 2, p. 108-129, 2022.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento, 3. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2020.

BOVO, A. A. Formação continuada de professores de matemática para o uso da informática na escola: tensões entre proposta e implementação. 195f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista - UNESP. Rio Claro, SP, 2004.

GUARDA, S. M.; PETRY, V. J. Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem Visando a Compreensão e a Representação de Elementos da Geometria Analítica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 33, n. 1, p. 707-717, 2020.

INSTITUTO SÃO PAULO - GEOGEBRA. Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/sobre_instituto.html. Acesso em: 20 dez. 2022.

KAY, R.; KNAACK, L. Evaluating the learning in learning objects. **Open Learning: The Journal of Open and Distance Educatio**n, v. 22, n. 1, p. 5-28, 2007.

KENSKI, V. M. Aprendizagem Mediada pela Tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, PR, v. 4, n. 10, p. 47-56, 2003.

KLEEMANN, R.; PETRY, V. J. Desenvolvimento de um Exercício de Imaginação Pedagógica a partir de uma Proposta Metodológica

Interdisciplinar. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, RS, v. 25, n. 3, p. 232-251, 2020.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, v. 2, p. 93-169, 2003.

SCHEFFER, N. F. A argumentação em matemática na interação com tecnologias. **Ciência e Natura**, Santa Maria, RS, v. 34, p. 23-38, 2012.

SPINELLI, W. **Os Objetos Virtuais de Aprendizagem: ação, criação e conhecimento**, n. d. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/40275/mod_resource/content/2/Objetos_de_aprendizagem.pdf. Acesso em: 20 out. 2022.

CAPÍTULO 6

EXPLORANDO PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Nilce Fátima Scheffer[18]

Gabriela Finn[19]

1. INTRODUÇÃO

Esta discussão a respeito de pontos notáveis do triângulo está direcionada para o Ensino Médio, uma vez que aborda conceitos de Geometria Analítica relacionados à representação, movimentação em tela e construção geométrica no *software* GeoGebra.

18 Doutora em Educação Matemática pela UNESP e Pós-Doutora em Educação Matemática pela RUTGERS, EUA. Professora Adjunta da UFFS, dos Cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia. Professora permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGE, no *Campus* Chapecó/SC e Professora permanente do Programa de Pós Graduação Profissional em Educação - PPGPE, no *Campus* Erechim/RS. Líder do Grupo de Pesquisa GPTMEM- Grupo de Pesquisa em TIC, Matemática e Educação Matemática. nilce.scheffer@uffs.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9199-9750.

19 Mestre em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, no *Campus* Chapecó/SC. Membro do Grupo de Pesquisa GPTMEM. gabifinn94@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-4224.

Como universidade pública, com a atividade que está sendo relatada, buscou-se dar algumas respostas à formação continuada de professores de Matemática no sentido de contribuir em apoio à prática pedagógica. Para caminhar nessa direção, consideramos fundamental que haja um processo de aproximação do ensino tecnológico com o ensino de Matemática, acreditamos, que a extensão universitária é um campo para ações com os professores. Para tanto, começamos defendendo a importância de se transformar o campo da formação dos professores de Matemática com o olhar voltado para as aplicações tecnológicas em Matemática no Ensino Médio. Em seguida, apresentamos alguns pressupostos que estruturam a extensão na formação de professores, na perspectiva de transformação do ensino, da universidade e, consequentemente, da sociedade.

Com o propósito de tornar mais concreta essa argumentação, apresentamos algumas experiências de extensão desenvolvidas no âmbito do Grupo de Pesquisa em Tecnologias da Informação e Comunicação, Matemática e Educação Matemática – GPTMEM, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. São exemplos de atividades que já estavam em andamento, pelo fato de fazerem parte das demandas reais e concretas desse Grupo de Pesquisa e dos Cursos de Graduação e Pós-Graduação dessa instituição, a que estão relacionadas as autoras do texto. Este trabalho ocorreu por meio de uma relação dialógica e garantindo a contribuição da universidade e do curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* Chapecó/SC, na relação com professores e com a comunidade escolar no contexto do período da pandemia, momento do desenvolvimento do Projeto e das Ações de Extensão.

O trabalho com o *software* GeoGebra, nas atividades que aqui serão apresentadas, esteve sempre com o olhar voltado para questões como a visualização e a representação em geometria, considerando principalmente a relação com as tecnologias digitais. Nesse sentido, vale destacar as palavras de Kalef quanto à visualização:

> [...] no Brasil, a grande maioria dos cursos de licenciatura e de formação continuada de professores de Matemática, além de muitas vezes passarem ao largo de um bom ensino de geometria euclidiana, não consideram especificamente a habilidade da visualização. Também deixam de lado as representações envolvidas com os conceitos dessa área, não levando em conta procedimentos didáticos que possibilitem a análise e a comparação de sistemas axiomáticos diversos, com outras regras e interpretações além da euclidiana (2022, p. 13).

A autora deixa clara a importância que assume a visualização na formação continuada de professores de Matemática quando desenvolvem um trabalho com geometria preocupados com procedimentos didáticos que possam dar conta dos conceitos geométricos a serem trabalhados, incentivando as interpretações e comparações proporcionadas pela geometria.

No caso da Geometria Analítica do Ensino Médio, os conceitos, ou seja, os objetos, figuras e relações contidas na Geometria Euclidiana – plana e espacial – são analisados e discutidos por meio de processos algébricos. Assim, alguns dos pontos notáveis do triângulo são explorados no estudo apresentado neste capítulo, com a valorização da visualização que é possível a partir das construções no GeoGebra.

Inicialmente, vamos fazer uma breve revisão sobre o tema e, depois, apresentaremos e discutiremos as atividades desenvolvidas com os professores na Ação de Extensão.

2. UMA BREVE REFLEXÃO

Este trabalho objetiva apresentar desafios e perspectivas para professores de Matemática do Ensino Médio, que fizeram parte das oficinas ministradas pelas proponentes deste trabalho. O estudo revelou que ainda não houve uma discussão ampla com docentes sobre a Matemática do Ensino Médio, prevista na Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Os participantes revelaram também uma preocupação com a pouca maturidade dos adolescentes para com as mudanças propostas ao Ensino Médio e à aprendizagem Matemática, principalmente quanto à utilização das tecnologias digitais como suporte.

Com esse documento e outras políticas para o Ensino Médio, a educação e a organização curricular estão pautadas por questões socioculturais e epistemológicas, na busca de, uma formação de educandos mais críticos e reflexivos. Desse modo, o Ensino Médio é uma etapa importante para o desenvolvimento pessoal e profissional do estudante, pois é uma fase em que o discente se prepara para entrar numa sociedade competitiva e desigual (BRASIL, 2006).

A reforma do Ensino Médio, conforme prevista, recomenda um trabalho de modo interdisciplinar, envolvendo as áreas do conhecimento para a construção de um processo de ensino e de aprendizagem condizente com as demandas da sociedade.

No entanto, quando nos voltamos para o ensino de Matemática com tecnologias digitais e objetos de aprendizagem, principalmente em relação à Geometria Analítica, ocorre a discussão quanto a questões da linguagem simbólica e argumentação Matemática, bem como da representação e visualização em tela, suas contribuições e importância para a construção geométrica em Matemática.

Por outro lado, este trabalho considera também a visualização como um aspecto imprescindível à construção geométrica, valorizando os estudos de Kalef que evidencia a importância dessa caminhada no ensino de geometria:

> [...] embora a maioria das representações dos objetos geométricos seja perceptível visualmente (ou de maneira tátil), é imprescindível não se confundir a habilidade da visualização, isto é, a habilidade de se perceber (mentalmente) o objeto geométrico em sua totalidade, com a percepção sensorial (como Van Hiele considerava) das diferentes representações possíveis desse objeto (2022, p. 19).

A autora deixa claro que não podemos confundir ver com os olhos da mente (visualizar) com ver o objeto (enxergar e ver a imagem real, visual ou tátil do objeto físico) por meio do aparato sensorial para a construção do objeto geométrico em sua totalidade.

Já para Henrique, que inicialmente se refere à origem do termo visualização para, depois, destacar a sua relação com os toques no *smartphone*:

> Em um contexto mais amplo, o termo “visualização” tem origem no latim, visuais, que é relativo à vista, que podemos entender como o ato ou efeito de ver. A palavra “ver”, neste caso, assume não só os objetos que estão diante dos olhos, como um livro impresso ou uma representação gráfica na tela do smartphone, mas as imagens mentais que conseguimos formar e manipular e é para este sentido que nossas reflexões convergem (2022, p. 24).

Consequentemente, para o autor, a direção dada à visualização volta-se para a representação das imagens mentais que conseguimos formar a partir da representação obtida na tela do smartphone ou do computador, ou seja, para ele as definições se complementam e apontam o papel da visualização para a construção e o desenvolvimento conceitual.

Diante da importância do conhecimento geométrico, Scheffer (2022, p. 58925), quando se refere à relação estabelecida entre o trabalho algébrico, a argumentação e a representação matemática, evidencia que os estudantes, quando resolvem problemas, se apoiam na representação pictórica, com o uso de componentes imaginários e de movimentos corporais, de braços ou dedos em sala de aula. Assim, o ensino com materiais manipuláveis ou tecnologias digitais, por exemplo, inclui o uso de métodos de busca de padrões que estimulam a intuição e a imaginação, os quais incluem a representação e a visualização como aspectos importantes ao simbolismo matemático, na criação e na construção geométrica.

Essa posição justifica porque pesquisadores da atividade cognitiva geométrica, consideram Duval (2004, 2011), pois uma atividade demandada pela geometria é mais evidente do que em outros campos da Matemática, deste modo, de acordo com o autor, os tratamentos devem ocorrer simultaneamente nos registros figurais e discursivos. Assim, além de promover a análise do processo de ensino e aprendizagem sob a ótica da teoria dos Registros de Representação Semiótica, a Geometria torna possível a análise do objeto matemático. E a visualização é entendida como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica e não apenas de percepção, pois proporciona a identificação das relações entre unidades figurais de representação (DUVAL, 2004).

Ao buscar possibilidades de desenvolvimento profissional docente, este trabalho focalizou as ações com instrumentos digitais, para incentivar mudanças nos processos pedagógicos voltados para o ensino de Geometria no Ensino Médio, de modo a valorizar a representação e a visualização para proporcionar momentos de reflexão matemática.

Ao se referir à utilização de *softwares* em seu aspecto dinâmico para a exploração matemática, Soares, Ferner e Mariani (2018, p. 123), em análise ao trabalho de Duval, destacam que os tratamentos figurais proporcionados pelos *softwares*, aliados aos tratamentos discursivos, podem proporcionar a elaboração de demonstrações, que se constituem na base da compreensão em Matemática, particularmente em Geometria.

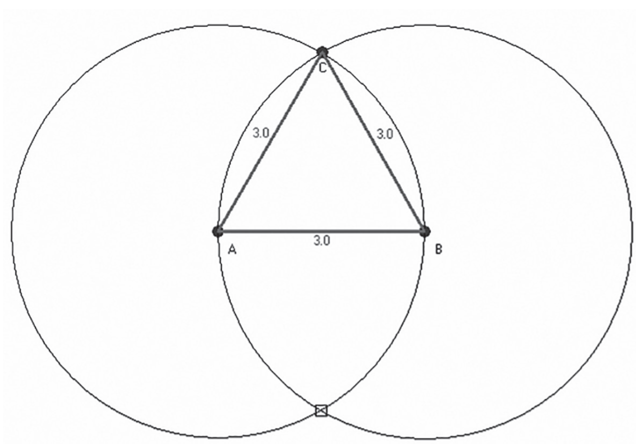
Neste momento, apresentamos atividades de Geometria Analítica desenvolvidas no *software* GeoGebra para a exploração de pontos notáveis do triângulo, iniciando com a construção de triângulos equilátero, isósceles, escaleno e retângulo, passando por pontos notáveis de cada tipo de triângulo, chegando à construção do triângulo órtico.

2.1. CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO DADA A MEDIDA DO LADO

2.1.1. A CONSTRUÇÃO

A partir da representação de um segmento AB, dado na Figura 1, com centros nas extremidades do segmento, em A e B, e raio com medida AB, construir duas circunferências, cujo ponto de intersecção entre as duas determina o ponto C, após, unir os pontos A, B e C obtendo assim o triângulo equilátero.

Figura 1 – Triângulo Equilátero.



Fonte: Dados dos autores.

2.1.2. ALGUNS QUESTIONAMENTOS

(i) Quais as principais características do triângulo equilátero?

(ii) Quais as principais características quanto aos lados e quanto aos ângulos?

(iii) Quais as relações entre os ângulos internos do triângulo equilátero?

(iv) Quais as relações entre os ângulos externos do triângulo equilátero?

2.1.3. CONCLUSÕES

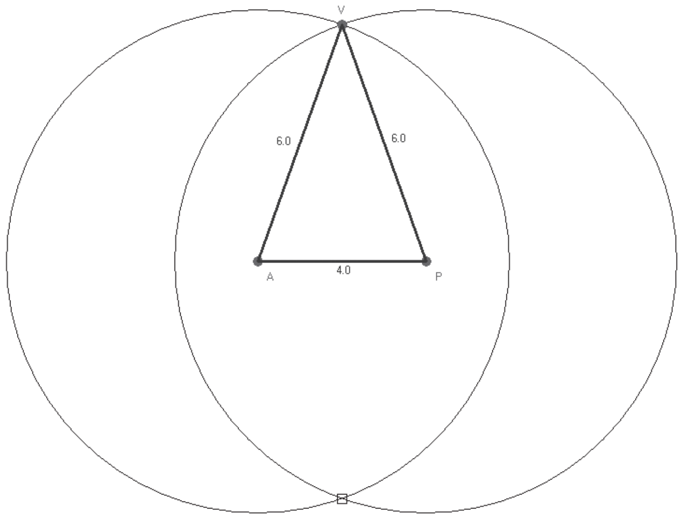
O triângulo equilátero tem três lados iguais, três ângulos internos e três ângulos externos iguais. A soma dos ângulos internos é 180 graus e dos ângulos externos é 360 graus.

2.2. TRIÂNGULO ISÓSCELES DADOS A BASE E O LADO

2.2.1. A CONSTRUÇÃO

Iniciar a construção com a representação de um segmento qualquer AB. A partir desse segmento, com um raio de comprimento qualquer, construir duas circunferências de centro em cada uma das extremidades A e B e mesmo raio, e estabelecer o ponto de intersecção C das duas circunferências, que será o vértice comum dos dois lados iguais do triângulo isósceles. A seguir, representar os lados ao unir os segmentos no mesmo ponto C, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Triângulo Isósceles.



Fonte: Dados dos autores.

2.2.2. ALGUNS QUESTIONAMENTOS

(i) Quais as principais características do triângulo isósceles?

(ii) Quais as principais características quanto aos lados e quanto aos ângulos?

(iii) Quais as relações entre os ângulos internos do triângulo isósceles?

2.2.3. CONCLUSÕES

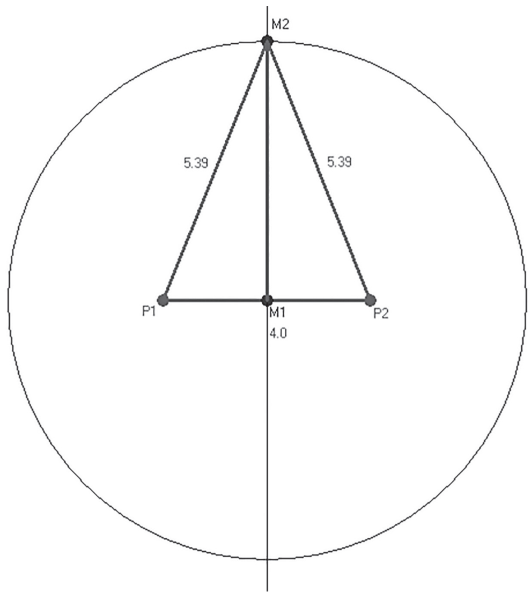
As principais características do triângulo isósceles são: dois lados iguais e dois ângulos iguais em relação à base. Neste caso, é um triângulo acutângulo, porque tem três ângulos internos menores que 90 graus.

2.3. TRIÂNGULO ISÓSCELES DADOS A BASE E A ALTURA

2.3.1. A CONSTRUÇÃO

Para iniciar a construção, representar um segmento qualquer *P1P2*, encontrar o ponto médio do segmento *M1*, e traçar uma perpendicular ao segmento passando por esse ponto médio (Figura 3). Com o centro da circunferência *M2* em e um raio qualquer, traçar uma circunferência cujo ponto de intersecção *M2* com a perpendicular que passa no ponto médio *M1*, determinar uma das alturas do triângulo isósceles, aquela em relação à base. Esse ponto será obtido a partir da união dos segmentos traçados dos vértices $P1$ e $P2$ com o ponto $M2$.

Figura 3 – Triângulo Isósceles dados a base e a altura.



Fonte: Dados dos autores.

2.3.2. ALGUNS QUESTIONAMENTOS

(i) Quais as principais características da altura em relação à base do triângulo isósceles?

(ii) Quais os principais pontos do triângulo por que ela passa?

(iii) O que a altura em relação à base do triângulo isósceles determina na figura do triângulo visualizado?

2.3.3. CONCLUSÕES

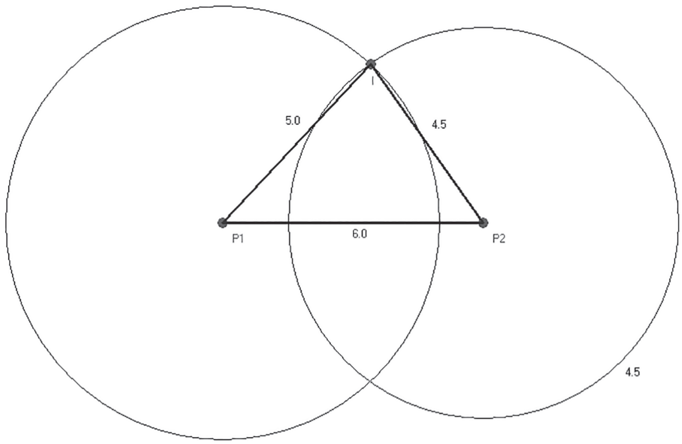
A altura do triângulo isósceles é perpendicular à base, passando pelo ponto médio da mesma e pelo vértice oposto, ponto , que é formado pelos dois lados iguais do triângulo. A altura em relação à base do triângulo isósceles, quando traçada, o divide em dois triângulos retângulos iguais.

2.4. TRIÂNGULO ESCALENO DADOS OS SEUS LADOS

2.4.1. A CONSTRUÇÃO

Representar um segmento de 6cm e marcar os extremos $P1$ e $P2$. Em uma das extremidades, construir uma circunferência de raio 5cm para determinar o outro lado do triângulo e, na outra extremidade do segmento inicial, construir uma circunferência de raio 4,5cm para determinar o último lado do triângulo e, por fim, conforme mostra a Figura 4, unir $P1$, $P2$ e I, sendo uma das intersecções das circunferências construídas.

Figura 4 – Triângulo Escaleno.



Fonte: Dados dos autores.

2.4.2. ALGUNS QUESTIONAMENTOS

(i) Quais as principais características do triângulo escaleno?

(ii) Quais as principais características quanto aos lados e quanto aos ângulos?

(iii) Quais as relações entre os ângulos internos do triângulo escaleno?

(iv) Quais as relações entre os ângulos externos do triângulo escaleno?

2.4.3. CONCLUSÕES

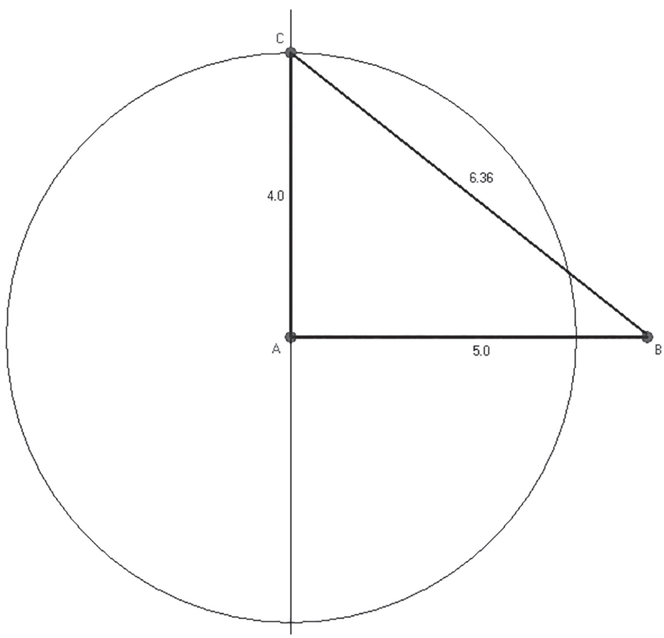
As principais características do triângulo escaleno são: três lados diferentes e três ângulos diferentes. A soma dos seus ângulos internos é 180 graus e a soma dos ângulos externos é 360 graus.

2.5. TRIÂNGULO RETÂNGULO DADAS AS MEDIDAS DE SEUS CATETOS

2.5.1. A CONSTRUÇÃO

Para a construção representar um segmento qualquer AB com centro em construir uma circunferência com raio qualquer, que representa o outro cateto do triângulo. Pelo ponto A traçar uma reta perpendicular ao segmento AB, que interceptará a circunferência traçada em dois pontos. Chame um deles de C. Assim, AB é o outro cateto do triângulo retângulo (Figura 5). Por fim, determinar o outro lado do triângulo retângulo, BC, ou seja, a hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

Figura 5 – Triângulo Retângulo.



Fonte: Dados dos autores.

2.5.2. ALGUNS QUESTIONAMENTOS

(i) Quais as principais características do triângulo retângulo?

(ii) Quais as principais características quanto aos lados e quanto aos ângulos?

(iii) Quais as relações entre os ângulos internos do triângulo retângulo?

2.5.3. CONCLUSÕES

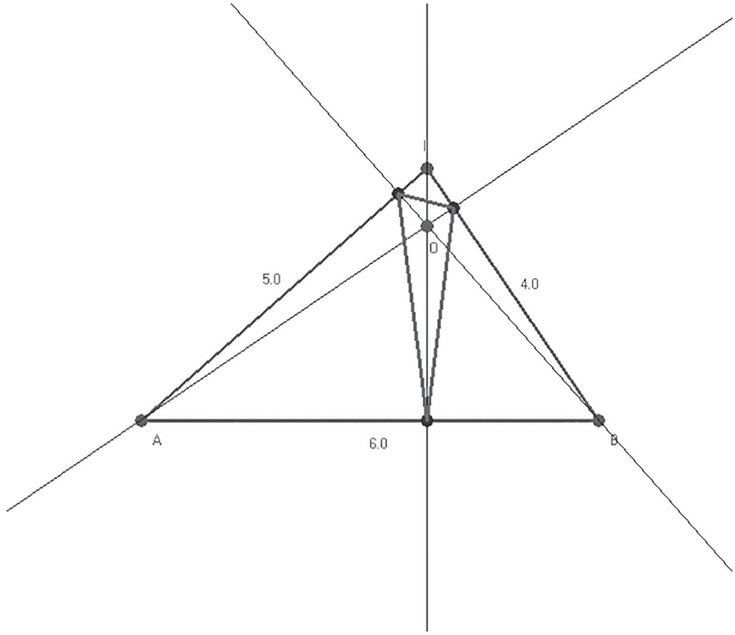
As principais características do triângulo retângulo são: três lados diferentes e três ângulos diferentes; um ângulo de 90 graus, denominado ângulo reto; e outros dois ângulos internos que se complementam, ou seja, somam 90 graus. Os lados do triângulo que formam o ângulo reto, são chamados de catetos e o lado maior é chamado de hipotenusa.

2.6. ORTOCENTRO DE UM TRIÂNGULO E O TRIÂNGULO ÓRTICO

6.2.6.1. A CONSTRUÇÃO

Iniciar a construção com um triângulo escaleno, como ilustra a Figura 6. Na sequência, construir retas perpendiculares aos três lados do triângulo que passam pelo vértice oposto, determinando as três alturas. Na intersecção dessas alturas, obter o ortocentro e, a partir da intersecção das perpendiculares com os lados opostos do triângulo, obter o triângulo órtico interno ao triângulo inicial.

Figura 6 – Triângulo Órtico.



Fonte: Dados dos autores.

2.6.2. ALGUNS QUESTIONAMENTOS

(i) Quais as principais características do triângulo órtico?

(ii) Quais as principais características quanto aos lados e quanto aos ângulos?

(iii) Quais as relações entre os ângulos internos do triângulo órtico?

2.6.3. CONCLUSÕES

As principais características do triângulo órtico são: três lados diferentes e três ângulos diferentes, é um triângulo obtido a partir da união dos pés dessas alturas, que obtemos um novo triângulo, justamente por ser obtido a partir da construção do ortocentro, ou seja, da intersecção das alturas.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo aqui apresentado teve como ótica principal destacar a valorização da visualização no ensino de Geometria com a utilização de recursos das tecnologias digitais. Atividade que fez parte de um projeto mais amplo de Ações de Extensão desenvolvido com professores da rede pública, priorizando, principalmente, os recursos do *software* GeoGebra na exploração de um tema de Geometria Analítica muito pertinente ao Ensino Médio, que é a exploração de pontos notáveis do triângulo.

O trabalho desenvolvido com os professores, no decorrer das Ações de Extensão, promoveu boas interações que geraram uma produção individual muito profícua, resultando em mudanças na prática docente, em reflexões quanto a contribuições das tecnologias digitais para as aulas de Matemática e, também, para a construção cognitiva em Geometria.

As atividades destacadas exploraram conceitos que incluíram propriedades de triângulos, pontos notáveis de triângulos e algumas construções no *software* GeoGebra. Com isso, foram confirmados aspectos fundamentais à construção geométrica, testes de conjecturas e exploração da visualização em tela dinâmica, potencializando assim, possibilidades de um trabalho de geometria dinâmica na sala de aula do Ensino Médio.

Para finalizar, vale dizer que um trabalho com essas características teve por objetivo promover o desenvolvimento profissional de professores de Matemática que estão atuando em sala de aula, incentivando transformações que valorizem assim, à docência em Matemática e aperfeiçoem os processos educativos.

4. REFERÊNCIAS

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ book_volume_01_internet.pdf. Acesso em: 03 dez. 2022.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano**: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales, Universidade del Valle: PeterLang, 2004.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. In: CAMPOS, T. M. M. (Org) Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

HENRIQUE, M. P. Visualizando com toques: retas e ângulos em tela. In: BAIRRAL, M. A.; RAVO, G.; IZAR, S. (Org.). **Retratos de experiências para visualização em geometria**. Rio de Janeiro: EDUR, UFRRJ- Seropédica, 2022. p. 23-37.

KALEF, A. M. M. Obstáculos cognitivos e registros semióticos frente à habilidade da visualização na aprendizagem das geometrias (euclidiana e não euclidianas). In: BAIRRAL, M. A., BRAVO, G., IZAR, S. (Org.). **Retratos de experiências para visualização em geometria**. Rio de Janeiro: EDUR, UFRRJ- Seropédica, 2022. p. 12-22.

SCHEFFER, N. F. Virtual learning objects used in the polygonal concept of geometry in elementary school, **International Journal of Development Research**, 12, (09), 58923-58928. September, 2022.

SOARES, M. A.; FERNER, L.; MARIANI, R. C. P. Visualização em produções que exploram software: uma metanálise no campo da geometria. In: SCHEFFER, N. F.; COMACHIO E.; CENCI D. (Org.) **Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática**: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018. (p.117-137).

Sobre os autores

NILCE FÁTIMA SCHEFFER

Mestre e Doutora em Educação Matemática pela UNESP. Pós-doutora em Educação Matemática pela Universidade do Estado de Nova Jersey (EUA). Atualmente é professora adjunta da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS e atua nos Cursos de Matemática-Licenciatura e Pedagogia, no Programa de Pós-Graduação em Educação-PPGE do *Campus* Chapecó/SC e no Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação-PPGPE do *Campus* Erechim/RS. É líder do Grupo de Pesquisa em Tecnologias da Informação e Comunicação, Matemática e Educação Matemática - GPTMEM da UFFS e membro do GT 6 da SBEM - Educação Matemática: tecnologias digitais e educação a distância.

ROSANE ROSSATO BINOTTO

Doutora em Matemática pela UNICAMP (2008). Pós-doutora na área da Educação Matemática pela UNESP (2023). Atualmente é professora associada da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS, *Campus* Chapecó/SC, e atua como docente no Curso de Matemática-Licenciatura e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFFS. É vice-líder do Grupo de Pesquisa em Tecnologias da Informação e Comunicação, Matemática e Educação Matemática - GPTMEM da UFFS e membro do GT 6 da SBEM – Educação Matemática: novas tecnologias e educação a distância.

PEDRO AUGUSTO PEREIRA BORGES

Graduação em Matemática-licenciatura pela UNIJUI (1983). Mestre em Educação pela UNICAMP (1988). Mestre em Matemática pela UNIJUI (1997). Doutor em Engenharia Mecânica pela UFRGS (2002). Estágio pós-doutoral em Educação Científica e Tecnologia pelo PPGECT/UFSC (2016). Atua como professor adjunto na Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS, no ensino de Matemática da Graduação e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFFS. Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática - GPEMAT, com pesquisas nos processos de ensino relacionados com modelagem e aprendizagem de matemática.

VITOR JOSÉ PETRY

Licenciado em Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (1997), mestre em Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (2000) e doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2007). Atualmente é professor associado da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. Atua na formação de Professores desde 2000, no Curso de Matemática – Licenciatura e no PROFMAT/UFFS, *Campus* Chapecó. Tem experiência na área de Matemática, e Educação Matemática com ênfase em modelagem matemática no ensino, em metodologias ativas e no desenvolvimento de pesquisas com objetos virtuais de aprendizagem desenvolvidos no software GeoGebra.

GABRIELA FINN

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina e Mestre em Educação pela Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS. Atualmente é professora de matemática do Ensino Fundamental Anos Finais do colégio Bom Jesus Pedra Branca.

MATEUS HENRIQUE ZEISER

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, *Campus* Chapecó/SC. Atualmente é mestrando em Matemática Aplicada no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

SANDY MARIA GAIO

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, *Campus* Chapecó/SC.

Índice Remissivo

C

D

G

H

I

L

M

R

S

T