Pedagogia

EDUCAÇÃO E LINGUAGEM MATEMÁTICA IV
FRAÇÕES E NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Nilza Eigenheer Bertoni

PEDEaD

Estado do Acre

Governador
Arnóbio Marques de Almeida Júnior
Vice-Governador
Carlos César Correia de Messias
Secretaria de Estado de Educação do Acre
Maria Corrêa da Silva
Coordenadora de Ensino Superior da SEEA e Coordenadora Intermediária
Nilzete Costa de Melo

Fundação Universidade de Brasília — FUB/UnB

Reitor
José Geraldo de Sousa Junior
Vice-Reitor
João Batista de Sousa
Decana de Ensino e Graduação
Márcia Abrahão Moura
Decana de Pesquisa e Pós-graduação
Denise Bomtempo Birche de Carvalho

Faculdade de Educação — FE/UnB

Diretora
Inês Maria Marques Zanforlin Pires de Almeida
Vice-Diretora e Coordenadora Geral
Laura Maria Coutinho
Assistente Pedagógica
Mônica da Costa Braga
Coordenador de Tecnologias
Lúcio França Teles
Secretaria do Curso
Antonilde Gomes Bomfim
Maria Cristina Siqueira Mello
Administração da Plataforma
Joviniano Rabelo Jacobina
Setor Financeiro
Francisco Fernando dos Santos Silva
Coordenação Intermediária
Aurecília Paiva Ruela
Aulenir Souza de Araújo
José Ferreira da Silva
Maria Lucilene Belmiro de Melo Acácio
Designer instrucional
Ezequiel Neves

Professores (as) – Mediadores (as)

Adima Jafuri Maia
Adriana Araújo de Farias
Adriana Martins de Oliveira
Aleuda Soares Dantas Tuma
Ana Cláudia de Oliveira Souza
Ana Maria Agostinho Farias
Antonio Aucélio Assis de Almeida
Artemizia Barros Pimentel
Carmem Cesarina Braga Pereira
Cátia Maria da Silva Silvano
Domingas Pereira da Costa Ferreira
Eliana Maia de Lima
Elizete Maia de Lima
Érica Medeiros de Lima Costa e Silva
Geânia Mendonça da Costa
Gercineide Maria da Silveira Fernandes
Hilda Jordete Marinho
Jociléia Braga de Souza
Jorge Gomes Pinheiro
José Ribamar Gomes Amaral
Leidisséia Alves de Castro
Luciana Maria Rodrigues de Lima
Luciene Nunes Calixto
Luiz Augusto da Costa dos Santos
Márcia da Silva Queiroz
Márcia Maria de Assis Alencar
Maria Cirlene Pontes de Paiva
Maria de Nazaré Ferreira Pontes
Maria do Carmo de Lima Gomes
Maria do Rosário Andrade Sena
Maria Itamar Isídio de Almeida
Maria Izauniria Nunes da Silva
Maria Mirnes Soariano Oliveira
Maria Zenilda de Lima Correia
Marilza da Silva Rodrigues
Miracélia Maria Freire de Moura
Mirna Suelby Martins
Nadir Silva de Souza
Norma Maria da Silva Oliveira
Norma Maria Vasconcelos Balado
Ozana Alves de Brito
Pedro Lopes da Silva
Renilda Moreira Araújo
Rita de Cássia Machado Monnerat
Sâmia Gonçalves da Silva
Sonja Priscila Vale de Freitas Fernandes
Uilians Correia Costa
Vânia Maria Maciel Taveira
Vanúcia Nunes Valente Calixto
Vera Maria de Souza Moll

Mo695 Módulo VI: Educação e linguagem matemática IV / Nilza Eigenheer Bertoni – Brasília : Universidade de Brasília, 2009.
95p.

1. Educação a distância. 2. Frações. 3. Números fracionários. 4. Linguagem Matemática. I. Bertoni, Nilza Eigenheer. II. Universidade de Brasília.

CDD 510
ISBN: 978-85-230-1325-7

Sumário

Conhecendo a autora

Nilza Eigenheer Bertoni

Minha família deixava uma expectativa implícita quanto às filhas mulheres serem professoras, mas eu tinha certo desejo de ser arquiteta: atração por desenho, formas, artes. Certo dia, lá pela 7ª série, a professora de matemática disse que eu deveria ser professora dessa disciplina, mas pareceu-me que eu nada tinha a ver com isso. O professor do Ensino Médio foi desvelando atrações, explicando coisas nas quais eu tinha dificuldade em ver a lógica. Mas a decisão de estudar Matemática foi de ordem prática: eu fizera os cursos "científico" e "de magistério" simultaneamente e, ao terminar o segundo, ganhei o que se chamava "cadeira prêmio" - uma vaga no magistério público. Se aprovada em vestibular de licenciatura na faculdade oficial, teria direito à licença com vencimentos para fazer o curso. Assim, fui cursar matemática na atual Universidade Estadual Paulista (UNESP), de Rio Claro.

A matemática, apesar de me parecer fácil, teve sempre coisas obscuras: a questão do jogo de sinais com números relativos; o ocultamento da distinção entre o sinal intrínseco do número e o sinal operatório; o fato de dizerem "a derivada é a (reta) tangente" e de repente aparecerem derivadas da forma $3x^2$, $4x^3$... Mas também aprendi coisas maravilhosas. Por exemplo, o professor Abraham Bloch deu uma idéia perfeita do que seria uma potência com expoente irracional. Tudo isso influenciou o meu trabalho em Educação Matemática décadas depois, no qual minha motivação maior foi a de explicitar a lógica subjacente aos processos, bem como evidenciar origens e finalidades de conceitos e teorias elaboradas.

Antes de me voltar completamente para a Educação Matemática, houve períodos de aproximação e de distanciamento. Durante os três anos em que lecionei, procurei encaminhar as crianças para uma compreensão daquilo que faziam. Ao me formar na universidade, em 62, época em que havia certo rumor sobre ensino de matemática, tive vontade de participar do - Grupo de Estudos no Ensino de Matemática (GEEM), em São Paulo, mas fui francamente desestimulada por meus professores da faculdade, com os argumentos de que isso eu poderia fazer depois de saber mais matemática, depois de fazer pós-graduação. Fui, com bolsas de estudos sucessivas, para o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), no Rio de Janeiro, e para a Universidade de Tübingen, na Alemanha.

Eu tinha mil outros interesses na vida. A estada na Europa permitiu-me aprender um pouco mais de matemática e muito do passado alemão, de impressionantes filmes de propaganda nazista (e portanto da manipulação de opiniões) e de discussões dominantes - teológicas, filosóficas e sociológicas, em torno, principalmente, de Kuhn, Ernst Bloch e Dahrendorf - o que postergava meu envolvimento com o ensino de matemática.

Voltei da Alemanha com mais maturidade e vontade para assumir minha vida profissional. Passei rapidamente pela Universidade em Rio Claro e, de repente, cheguei a Brasília, contratada pela Universidade de Brasília (UnB). Ocorreu, então, a Idade das Trevas da minha vida. Eu saíra em 64, logo após o golpe militar, ouvia falar das coisas no Brasil, mas não as vivia. Assim, não podia imaginar um país muito diferente daquilo que sempre conhecera. A situação de fiscalização e de repressão que encontrei era inimaginável. Comecei a comparar o silêncio dos alemães com meu próprio silêncio e foi tudo difícil. Fiz da sala de aula o meu espaço único de expressão, ainda que nele houvesse incursões de "novos alunos" vindos dos órgãos de informação. Para não perder o humor, perguntava se eram transferidos, de onde haviam vindo, que livro seguiam e ainda oferecia minha ajuda... Fiz mestrado na UnB e a qualificação para o doutorado em Matemática, tive duas filhas, processos estressantes e ávidos consumidores do tempo. Não terminei o doutorado: a primeira tese em que eu trabalhara foi publicada por outro antes de mim e tive de recomeçar outra; meu orientador foi para o exterior e não mais retornou ao Brasil.

Foi então que me voltei, decididamente, para o ensino. Envolvi-me com leituras e coordenei dois projetos: um, apresentado ao SPEC, que durou cinco anos (foi dessa época a primeira versão de uma apostila chamada Numerização) e outro, de reformulação da Licenciatura em Matemática na UnB. De certo modo, fomos pioneiros em introduzir uma série de disciplinas que formavam o professor dentro de uma concepção de Educação Matemática. Comecei a participar do movimento nessa área e fui a primeira dirigente nacional da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Participei de congressos nacionais e internacionais, escrevi artigos e módulos, fiz formação continuada de professores em várias escolas e estados, participei de vários projetos do MEC: Livro Didático, Parâmetros Curriculares Nacionais (3º e 4º ciclos), PROFORMAÇÃO, Projeto GESTAR. Um momento especial foi a participação na equipe de elaboração do projeto das licenciaturas da Universidade Aberta do Distrito Federal (UNAB), um consistente e inédito projeto de formação de professores de Matemática, Física e Biologia, o qual, infelizmente, nunca foi implantado.

Dos projetos, e da atuação na Licenciatura, foi-se construindo um grupo de alunos interessados no ensino de Matemática, inicialmente discípulos e estudiosos da área, que depois continuaram seus caminhos como profissionais, doutores, pesquisadores (hoje formando novos discípulos, como o professor Cristiano Muniz) e com alguns dos quais integro hoje grupo de pesquisa.

Depois de percorrer todo esse caminho, é uma alegria ter colegas que prosseguem o trabalho em Educação Matemática no Departamento de Matemática da UnB, como Terezinha ou Tânia; ter ex-alunos que fizeram pós-graduação e atuam também nessa área, como Cristiano, Villar e Solange, na Faculdade de Educação da UnB, e Ana Lúcia, na Católica de Brasília. Ou ter amigos professores, como Avelina, que me envolveram de novo em ações junto à SBEM de

Brasília, quando ela estava praticamente parada. Ou ainda encontrar professores que participaram a tempo de alguns cursos comigo e vêm me contar o que aproveitaram e o que fazem em sala de aula.

Também me alegro por ter duas filhas, construindo e buscando seus caminhos e por ter dois netos. Isabela, a poucos meses de completar três anos, convida-me para sentar no computador, para "ver umas coisas" e "escrever umas coisas". Tito, com seus onze meses, vem disputar meu colo e o teclado do computador.

Nesse encontro com vocês, penso nas crianças ávidas de saber que vocês encontram a cada ano e no gosto pelo conhecimento em Educação Matemática que espreita a muitos de vocês.

Desse modo, tenho certeza de que o caminho continua.

**Muitas dessas reminiscências foram retiradas da entrevista que dei para a tese de doutorado "Vidas e Circunstâncias na Educação Matemática", de Carlos Roberto Vianna, USP-FE, 2000.*

Apresentação

Frações tem sido um assunto temido, mal compreendido, mal aprendido.

Mesmo que algumas coisas nem pareçam tão difíceis, como dividir figuras em partes iguais, pintar algumas, escrever um símbolo com um número em cima e outro embaixo. Já memorizar as operações entre esses símbolos é mais complicado. A de multiplicação é a mais fácil. Os alunos tendem a repetir seu modelo nas demais – somar e subtrair fazendo as mesmas operações nos respectivos numeradores e denominadores. Não ousam para a divisão, mas é onde também funcionaria.

Aprendem sobre fração equivalente, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum.

Na verdade, há muita coisa poluindo e escondendo o cristal puro que fração é: um número. Uma idéia matemática associada à quantificação.

Uma idéia que responde a: quantos? quanto? quanto de?, em perguntas que se referem a coisas do contexto:

- quantas melancias na banca, que apresenta algumas inteiras, algumas metades, algumas metades de metades?

- quanto de leite, depois que eu tomo certa parte e meu irmão toma mais outra parte do que sobrou?

- quanto cada um recebe, se forem divididos 5 chocolates para 4 crianças?

Se a resposta não é uma quantidade inteira de objetos, então ela vai ser dada, correta ou muito aproximada, por um número fracionário. O foco principal é tornar clara para a criança a existência de situações significativas do contexto que demandam a introdução de novos números. Números têm que funcionar na vida, não só em figuras divididas, onde nem adquirem verdadeiramente esse significado.

Por mais que crianças aprendam os procedimentos da associação de números a figuras divididas e de regras que se diz fornecerem o resultado de operações, não há sombra de dúvida de que não estão entendendo e elaborando a construção dos números fracionários, se não souberem responder perguntas como:

- um meio dividido por 2, quanto dá?

- bebi metade do litro de leite e minha irmã bebeu metade do que sobrou, quanto ficou do litro?

- dividindo-se 10 cocadas para 6 crianças, quanto cada uma recebe, se não deixarmos sobrar nada?

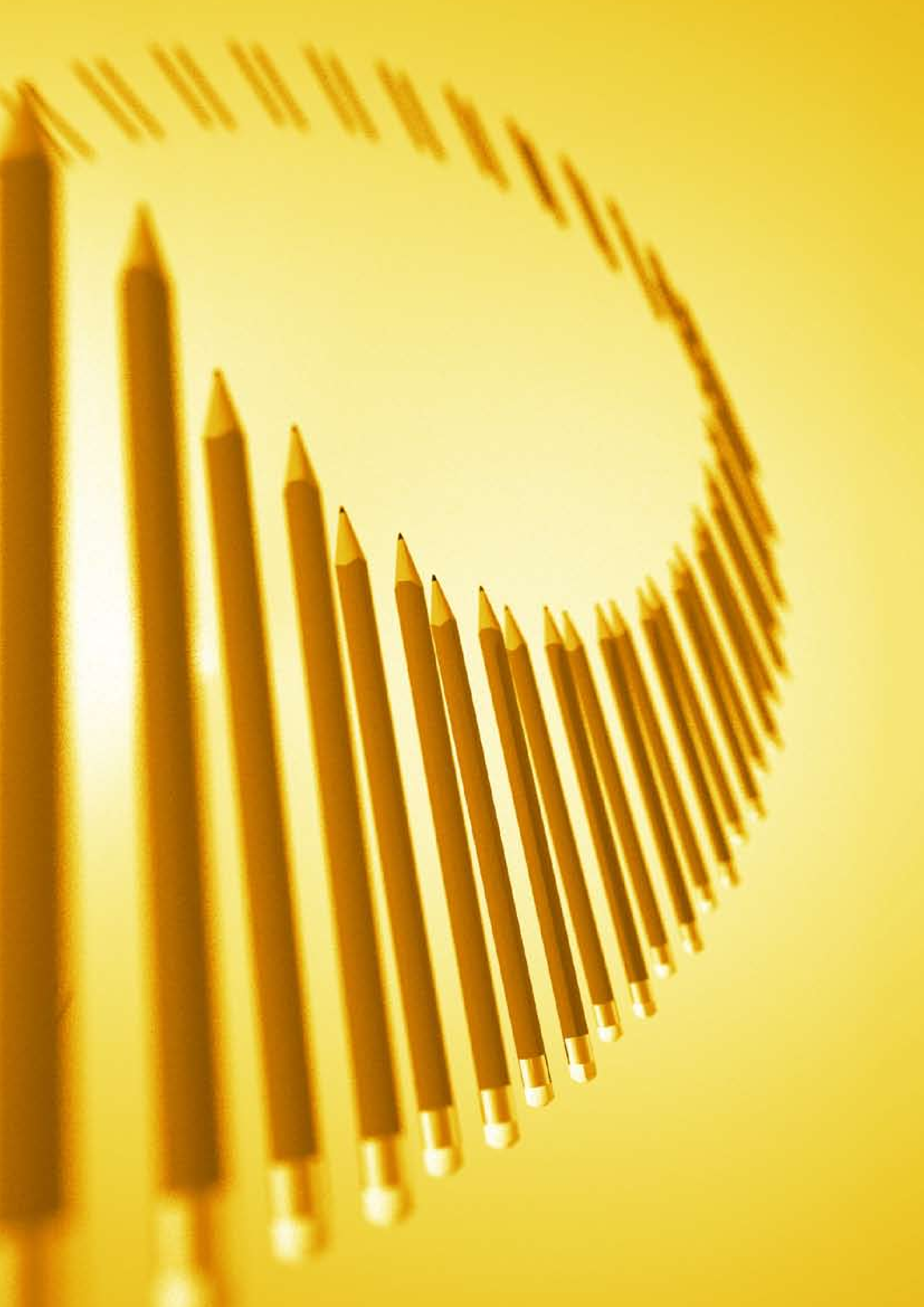
Não é possível que se recorra, a cada momento, a lápis, papel e regras para dar uma resposta (que não sabem explicar).

Seria o mesmo que, cada vez que perguntássemos aos alunos, mesmo em séries mais avançadas, quanto vale o dobro de 3, a metade de 10, 5+2, 8 - 4, eles necessitassem desenhar bolinhas para saber os resultados.

Esses fatos e considerações, feitos ao longo de muitos anos de investigação, experimentação e pesquisas, nos levaram a sucessivas propostas para o ensino de frações, cada uma trazendo ganhos e sugerindo pontos a superar. A última, que data de cerca de quatro ou cinco anos, adensou-se em bases teóricas e práticas, pelo aporte trazido pela teoria a respeito de formação de conceitos do psicólogo, matemático e educador matemático francês Gerard Vergnaud.

Após décadas de uma metodologia insatisfatória no ensino e aprendizagem dos números fracionários, esperamos que essas idéias não sejam as únicas nem refratárias a superações, mas que possam trazer a professores e alunos bons rumos e idéias na construção consistente do número fracionário, possibilitando seu reconhecimento e uso em situações do mundo real.

Nilza Eigenheer Bertoni



Considerações iniciais

Conversa inicial

É preciso ensinar as frações? Com qual enfoque?

Embora os números naturais e os decimais, estudados em fascículos anteriores, resolvam a maioria dos problemas do nosso dia-a-dia, as frações, em sua representação fracionária (não decimal) nos ajudam a entender melhor razões, escalas, porcentagens, possibilidades – e ainda são freqüentes nas receitas culinárias. Nossa preocupação maior é com o conhecimento das frações e do conceito de número fracionário, que não pode ser conseguido só com a divisão de figuras geométricas em partes iguais e a memorização das regras operatórias. É preciso encontrar caminhos para levar o aluno a identificar quantidades fracionárias em seu contexto cotidiano e a apropriar-se da idéia do número fracionário correspondente, usando-os de modo significativo.

Frações têm sido um dos temas mais difíceis no ensino fundamental. Avaliações e pesquisas atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto. Nos últimos anos, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse tema têm detectado inúmeros problemas e levantado hipóteses, que, entretanto, não abrangem a totalidade da problemática, nem são conclusivas. Talvez devido a isso, propostas de ensino incorporando esses resultados são apenas incipientes. O mais comum de se encontrar são as mesmas propostas de sempre, que começam informando as crianças sobre nomes e símbolos de frações, apresentando quadrados, retângulos ou círculos divididos e parcialmente pintados.

Escrever um fascículo sobre frações é, portanto, um desafio. Desafio que enfrentamos, entendendo-o como mais uma etapa em nosso caminhar sobre o assunto, como uma contribuição para a busca e a construção coletivas de solução para o problema.

Desde 1985, temos nos debruçado sobre essa questão. No projeto "Um novo currículo de matemática para o 1º grau", do Subprograma Educação para a Ciência – SPEC, (Mat/UnB, MEC/CAPES/PADCT), nossas pesquisas e experiências levantaram muitos aspectos, vários deles já confirmados por outras pesquisas e recomendados nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN´s.

Constatamos inicialmente a restrita presença, em nossa sócio-cultura, de números na forma fracionária. Dominam os números em representação decimal, na mídia, nos negócios, na vida profissional.

Entretanto, as frações iniciais, mais simples, estão sim presentes na sócio-cultura. Tais números são mais adequados a certas situações de quantificação e comparação do que a representação decimal. Por exemplo, ao comparamos um terço de pizza com um quarto, é mais imediato pensar logo na divisão, na parte, e dizer que 1 quarto é menor do que 1 terço. Não seria prático passar para a notação decimal e comparar 0,333... com 0,25. A representação fracionária constitui-se ainda em apoio natural para a introdução da representação decimal. Por exemplo, para introduzir 0,1, é natural pensar em 1/10 da unidade. Além disso, a representação fracionária é relevante na compreensão mais ampla de números racionais, de proporções, cálculo algébricos, probabilidade. Nessa última, por exemplo, é comum falar na probabilidade em termos de frações: 1 em 4, 1 em 7, que levam aos números ¼, 1/7.

É preciso ressalvar, contudo, que a abordagem que consideramos relevante para o desenvolvimento dos números fracionários é mais conceitual e compreensiva, e não de figuras e regras memorizadas. A abordagem tradicional, realmente, não contribui para um avanço na compreensão dos números.

Pontos observados experimentalmente no ensino de frações

Nas experiências realizadas sobre o ensino-aprendizagem das frações, destacamos, entre outros pontos observados:

- *a constatação de que os símbolos são obstáculos à compreensão inicial do significado das frações pela criança, o que nos levou a sugerir um tempo inicial de aprendizagem não simbólica das frações.*

- *a constatação de que trabalhar com famílias de frações interrelacionadas, como meio/quarto/oitavo; terço/sexto/nono, quinto/décimo/vinte avo, permitia que a criança estabelecesse relações e atribuísse significado a operações iniciais com esse números. Elas percebiam, por exemplo, que 1 quarto é metade de 1 meio; que 1 quarto + 1 quarto é igual a 1 meio; que duas vezes 1 quarto dá 1 meio, que 1 meio dividido por 2 dá 1 quarto etc. Um fato significativo foi o raciocínio demonstrado por uma de nossas crianças, ao se deparar, num jogo, com o desafio: quanto é 5 terços menos 1 sexto? Ela foi rápida: 4 terços e meio. Nitidamente, ela apoiava-se na relação vivida e construída, de que o sexto era obtido dividindo-se o terço ao meio; o sexto valia, portanto, metade do terço. Assim, ao pensar em 5 terços menos 1 sexto, ela pensava em 5 terços menos a metade de um deles, o que daria, portanto, 4 terços e meio (terço).*

Ainda não constatamos o uso ou recomendação desses pontos em livros ou propostas curriculares.

- *a constatação de que as noções de mínimo múltiplo comum e de máximo divisor comum interrompiam e faziam um desvio no caminho da construção da idéia de fração pela criança, e, além do mais, não eram imprescindíveis aos cálculos. Daí termos desenvolvido os cálculos sem introduzir esses conceitos.*

- *a constatação de que os algoritmos operatórios desenvolvidos na escola eram de compreensão quase impossível para as crianças, e afastavam-se muito dos algoritmos para as mesmas operações nos números naturais. Comparem-se, por exemplo, os algoritmos tradicionais da soma e da divisão de frações, com os algoritmos da soma e da divisão entre os números naturais. São tão distintos que as crianças não chegam a identificar que os novos algoritmos possam significar a mesma idéia de soma, subtração etc desenvolvidas entre os números naturais.*

Como conseqüência, introduzimos algoritmos, na aparência e na essência, mais de acordo com as concepções da criança. Na forma, eles se apresentavam verticais para a soma e a subtração de frações, e em chave para a divisão. Exemplificando:

1 meio | 2 crianças   1/2 | 2

$$\begin{array}{r} \text{1quarto} \\ + \ \underline{\text{1quarto}} \\ \dots\dots\dots \end{array} \qquad \begin{array}{r} ¼ \\ + \ \underline{¼} \\ \dots\dots \end{array}$$

Pelo que sabemos, essa abordagem também não foi incorporada aos livros e propostas atuais.

Idéias sobre algoritmos alternativos encontram-se em BERTONI, 1986. Essas experiências e processos foram, em grande parte, consubstanciados na apostila Frações, de Amato (1988), que integrava a equipe de pesquisa.

Desdobramentos da proposta inicial

Apesar de, na proposta inicial do projeto, termos usado bastante canudos, fichas e jogos, nos desdobramentos pós-projeto, comecei a observar que, apesar dos êxitos, havia limitações da proposta desenvolvida no mesmo. Por exemplo, embora as crianças gostassem dos jogos de trocas de fichas e formação de unidades, adolescentes manifestavam certo desinteresse e jovens adultos até estranheza sobre a finalidade daquelas relações "entre as tiras".

Por outro lado, muitos professores consideravam a proposta trabalhosa, e preferiam o recurso às figuras divididas. Isso levou-nos a trabalhar durante certo tempo, em capacitações, com as tais figuras, desenvolvendo, contudo, mais abstrações reflexivas a partir delas. Embora conseguissem respostas a problemas pelo traçado e divisão de um retângulo, observamos que, nas interpretações do resultado em um desenho mais fidedigno à situação real, surgiam freqüentes dificuldades. Em problemas referindo-se a um litro de leite (havia ¾ de litro de leite e foram bebidos 3/8, quanto restou?), ainda havia o costumeiro procedimento de divisão de retângulos. Na transposição para a realidade, a superfície do leite restante aparecia, muitas vezes, como uma linha quebrada (Figura 1).

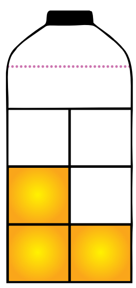


Figura 1

Uma dificuldade reveladora ocorria quando, propositadamente, introduzíamos um elemento irreal em algum problema, como: 4/3 da estrada estão asfaltados... Participantes não hesitavam em tomar um retângulo, alguns deles dois retângulos e prosseguir nas divisões. Isso evidenciava que a representação 4/3 não tinha um significado quantitativo real, apenas conduzia a uma representação.

Fomos chegando à constatação de que nem o material manipulativo anteriormente usado (fichas e canudos), nem as figuras geométricas associadas a abstrações reflexivas davam conta de associar claramente as representações fracionárias a situações da realidade. A proposta começava tentando uma leitura quantitativa de materiais representando partes da unidade, que usávamos em jogos, mas isso não encontrava ressonância em situações do cotidiano infantil, não tendo a ver com ações de avaliação numérica de partes fracionárias, efetuadas no cotidiano. Nesse caso, a didática produzia um anteparo antes de o conceito de quantificador fracionário ser formado, ensinando-lhe uma representação simbólica antes de ele saber o que está sendo representado, ou para quê aquela representação servirá. O desenvolvimento que dá seqüência a esses modelos, na aprendizagem usual dos números fracionários, envolve relações e operações entre eles, os quais permanecem centrados nos materiais e figuras, criando um universo próprio para a existência das frações, desvinculado da realidade.

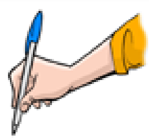
Essa constatação levou nosso foco para contextos da realidade, gerando um rastreamento de coisas divididas em partes iguais, ou que requeriam tal divisão. O foco central da proposta passava da concretização manipulativa à contextualização do mundo real.

Finalmente, essa ênfase em objetos da realidade conduziu a situações que os envolviam. Nesse ponto, imbricamos com a proposta de Vergnaud para a formação de um conceito, a qual considera, como elemento inicial essencial para a formação de um conceito, a presença de um conjunto de situações em que o sentido é constituído. Neste caso, o de número fracionário. Bertoni (2008) acrescenta:

ao constatarmos a relevância das situações para a emergência de novos números, passamos a investigar e experimentar como ficariam as idéias desse autor no caso específico da aquisição do conceito de número fracionário.

Seguindo essas idéias, iniciamos, a partir de 2003, a elaboração da forma atual de nossa proposta, da qual apresentaremos os principais elementos e resultados obtidos.

Atividade 1



Reflita sobre sua aprendizagem pessoal de frações, e, caso você ensine esse tópico, sobre a aprendizagem das crianças nesse assunto. Pense nas dificuldades encontradas, se houve ou não compreensão lógica dos processos utilizados, tanto por você como pelos alunos. Conte sua percepção geral a respeito desse problema.

Fração, número fracionário, número racional

Ao início desse fascículo, queremos esclarecer em que sentido estaremos usando os vários termos relacionados ao assunto: inicialmente fração e número fracionário, que serão utilizados nas seções 1 e 2; depois número racional, que aparecerá na seção 3.

Fração

O termo fração tem sido comumente usado tanto para designar certas partes de um todo, ou de uma unidade, quanto para designar uma representação numérica dessa parte. Esses usos estão consagrados e não procuraremos fugir deles. O próprio contexto dirá quando a fração está designando uma parte da unidade: aqui temos um quarto de queijo, ali está meio melão, ou quando expressa numericamente essa parte: o pedaço correspondente a ¼ de queijo, a parte correspondente a ½ melão.

Um quarto de queijo
¼ de queijo
Fração como representação numérica dessa parte: ¼

Algumas frações podem ser equivalentes a outras, por representarem a mesma parte da unidade. Por exemplo, ½ é equivalente a 2/4.

Número fracionário

Entretanto, no ensino-aprendizagem dessas partes, parece ficar meio oculta a intenção de, além de designá-las e representá-las, chegar à noção de número fracionário, com os quais se poderá operar, que poderão ser comparados com os números naturais e entre si, e poderão ser colocados na reta numérica. Essa intenção não fica bem consubstanciada. As operações com os símbolos numéricos fracionários surgem de repente, na forma de regras. Os alunos não compreendem os significados iniciais desses números e as relações entre eles, como ocorre quando começam a perceber o sentido dos números naturais. Assim, não constroem o conceito de número fracionário.

Basta entrar em uma classe de 5º ou 6º ano e formular perguntas como: quanto é 1 menos 1 quarto? Quanto dá metade de 1 meio? Em 1 litro e meio, quantos quartos de litros cabem?

Nossa intenção é formular uma proposta para esse ensino com o objetivo de formar o conceito de número fracionário. Para isso, é necessário evidenciar a característica quantificadora essencial dos mesmos. Cada um deles deve ser o substrato comum a todas as coleções quantificáveis por ele.

Em nossa proposta, procuramos a compreensão da entidade numérica fracionária anterior à representação escrita. Centramos a proposta na construção de um número, explicitando a que vem esse número e o que ele quantifica, bem como suas relações com os números naturais.

O conceito claramente formado do que esses números quantificam conduz à várias percepções:

- *de que há uma ampliação do que era suscetível de ser quantificado. Isto é, sem os fracionários, só se podia quantificar coleções constituídas apenas de objetos inteiros. Com os fracionários, é possível quantificar coleções formadas por unidades e partes delas, oriundas de divisões em partes iguais.*
- *de que é possível comparar, em termos das quantidades que representam, esses números entre si e com os números naturais;*
- *do reconhecimento de que os novos números entremeiam-se entre os números naturais;*
- *do posicionamento dos mesmos na reta numérica;*
- *do significado das operações entre eles.*

Restrições à "teoria" das figuras divididas para a construção do número fracionário

Uma vez colocada a intenção de construir o conhecimento sobre os números fracionários, vamos nos deter um pouco sobre o que é feito em muitos livros dos anos iniciais. Constatamos que o trabalho com frações tem consistido, basicamente, na divisão de figuras em partes iguais, no destaque de algumas e sua nomeação – tanto em palavras quanto em símbolos. Em seguida, são dadas as regras para as operações, a maioria sem explicação, desvinculadas das figuras trabalhadas. Esta abordagem tem sido questionada nos últimos anos, por exemplo por Nunes, 1997, p.191:

> ... (no processo de dividir e pintar), as crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Com algumas poucas regras para calcular, permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações. Pesquisas demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa.

A par desses questionamentos, constata-se um baixo rendimento atestado pelos alunos na aprendizagem, que se prolonga até séries mais avançadas. Esses fatos nos levam a indagar se o processo usado para o ensino-aprendizagem das frações leva à formação do conceito de número fracionário, ou se fica reduzido a um manejo de figuras, sua designação e representação.

A fala de Pedro, (Santos, 2006) de uma 4ª série (5º ano) expõe bem o problema. Perguntado sobre o que acha difícil em matemática, responde que acha fração. Ao explicar porquê, diz: Porque a gente tem que fazer umas coisas lá, aí tem que pintar, aí quando pinta, aí os resto lá eu não sei não. Por causa que pinta aí tem que ficar fazendo um bucado de número lá do de branco e do pintado.

Note-se que ele fala um bucado de número (para indicar as partes em que se dividiu e as que foram pintadas). Para ele, aparecem dois números, um para indicar o total de partes, outro para indicar as pintadas, mas isso não lhe parece ser algo como um único número, enquanto ente quantificador. Em nossas experiências, ao indagarmos o que é fração, são comuns respostas do tipo é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras. Já a pergunta fração é número? gera muitas dúvidas, mas, com certa freqüência, aparece a resposta são dois números.

Lembramos, ainda, que na literatura de Educação Matemática, encontram-se referências ao fato de a necessidade da conjunção de dois símbolos numéricos para representar a fração ser um complicador para seu entendimento. Ohlson (1991), por exemplo, refere-se a essa dificuldade:

> "a complicada semântica das frações é, em parte, uma conseqüência da natureza composta das frações. Como ocorre do significado de 2 combinado com o significado de 3 gerar um significado para 2/3?"

Assim, elabora-se uma teoria de partes divididas com nomes, símbolos e regras de operação. Para os alunos, essa teoria vem acompanhada de símbolos numéricos aos pares, mas não fica clara a construção de um novo número, que sirva para quantificar coisas que os números naturais não quantificam. Via de regra, o aluno depende das figuras ou das regras (ou de ambas) para dar qualquer resposta. Por exemplo, formulamos a uma quinta série (6º ano) a pergunta quanto vale um meio dividido por dois? pedindo que fosse pensada e respondida. A resposta mais próxima que surgiu foi: é metade de um meio. Não conseguem transpor o que aprenderam com as figuras divididas para identificar o resultado de uma divisão simples com uma daquelas frações.

- As partes que aparecem e a simbologia associada constituem números?

Outro ponto que se nota é a desarticulação entre a aprendizagem de "frações" e a dos números naturais, desenvolvida anteriormente. Na maioria dos livros didáticos, os capítulos são distintos. Isso acentua a impressão de que os naturais eram números, mas as frações são outra coisa. O mais comum é que comecem por introduzir partes menores do que a unidade, e as outras, maiores que a unidade, são introduzidas como frações impróprias. A necessidade de fazer uso de mais do que uma unidade para representá-las representa certo obstáculo cognitivo para o aluno. As regras de operações, além de não serem razoavelmente explicadas pelas figuras introduzidas, parecem constituir um universo em si, totalmente desvinculado do que eram as operações entre números naturais.

A construção do número fracionário

Pelas razões expostas, temos enfatizado a questão da construção do número fracionário (Bertoni, 2008).

Assim, a proposta é mostrar como a necessidade de novos números, ou seja, quantificadores para novas situações, surge no bojo de situações, misturados aos números naturais. Uma situação muito simples para isso é quando propomos a divisão de 3 laranjas para duas crianças. Os alunos não têm dúvida em responder que dá uma e meia para cada um. Observe-se que uma divisão entre números naturais gerou o aparecimento de um quantificador para o resultado, em uma forma que mistura um número natural – 1 – a um quantificador que não é um número natural – meio. Sendo o resultado de uma divisão, e expressando uma quantidade, a noção de número fica subjacente, embora ainda não explicitada. Outros exemplos serão vistos neste texto.

Podemos imaginar as frações ½., 2/4, 3/6, 4/8, ...45/90 etc como diferentes, num certo sentido, mas equivalentes. Todas representam uma mesma quantidade (de uma mesma unidade). Portanto, a todas deve ser associado um mesmo número. O que complica é que não temos um símbolo diferente para distinguir o número fracionário associado a essa classe. Ele se confunde com o símbolo de qualquer fração da classe, embora muitas vezes seja usada a fração que tem o menor numerador e o menor denominador (no caso, ½).

Logo você verá que o número fracionário a/b pode ser visto como o resultado da divisão de a por b, onde a e b são números naturais.

Números racionais

Neste módulo, estudaremos uma parte dos números racionais, a saber, os números racionais positivos, que podem ser chamados de números fracionários. Eles são o objeto de estudo das seções 1 e 2. Uma idéia mais completa do conjunto dos números racionais será vista na seção 3.

Resumindo

Fração: representa tanto certas partes da unidade quanto o registro numérico associado a essas partes

Número fracionário: É o número, único (embora com várias representações) associado a toda uma classe de frações equivalentes.

Pode ser identificado com um número racional positivo.

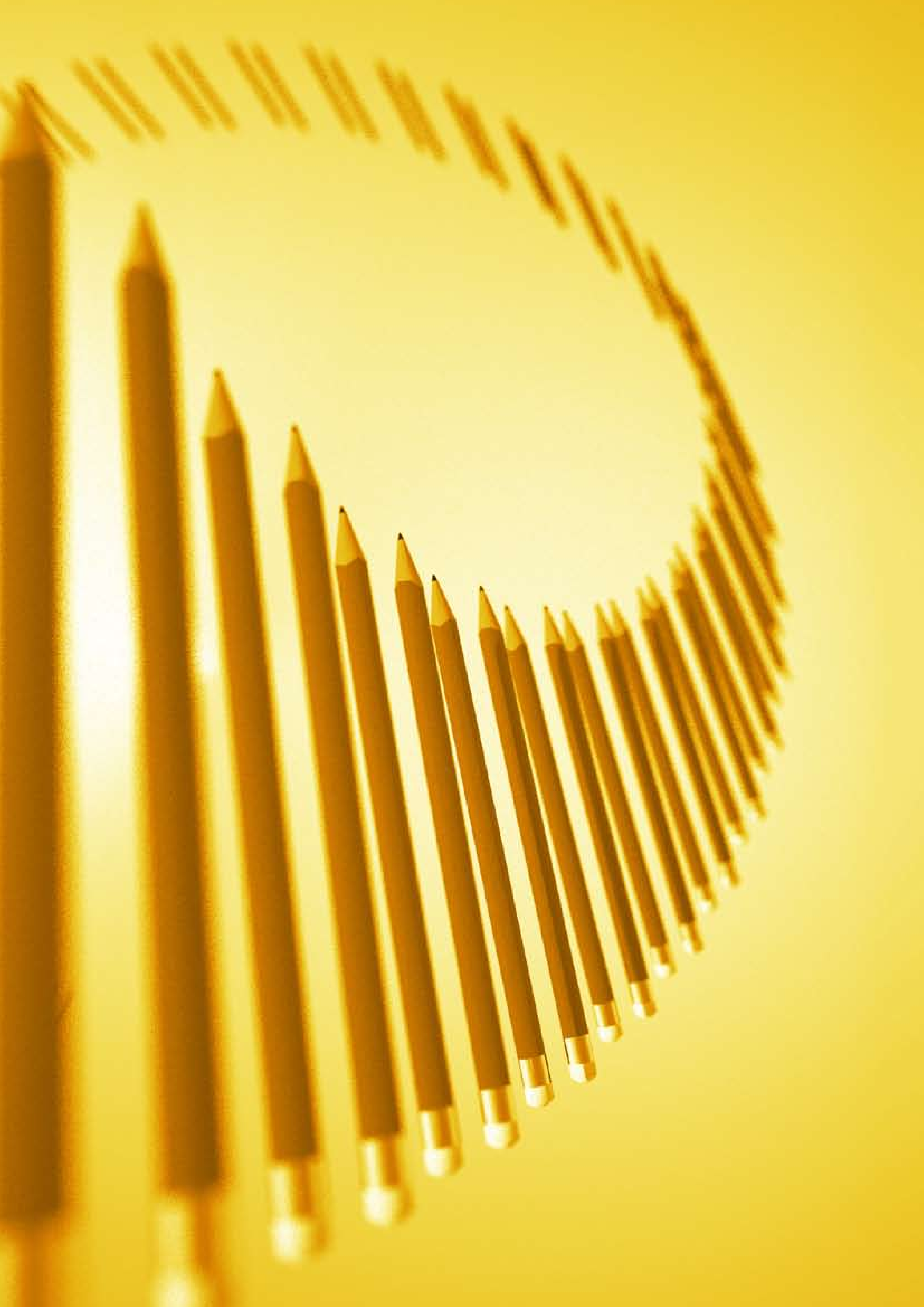
O que faremos nas seções 1, 2 e 3

As seções 1 e 2 são voltadas para a sala de aula. Elas fazem considerações e sugestões aos professores, a respeito de como conseguir uma boa e possível compreensão das frações e dos números fracionários, por seus alunos.

Na **Seção 1**, procuraremos fundamentar as linhas gerais norteadoras da proposta que vamos delinear para o ensino e a aprendizagem das frações, com base na proposta de Vergnaud. Desenvolveremos idéias sobre a construção, pelo aluno, do significado do número fracionário e de suas relações. Também apresentaremos idéias centrais para a introdução da simbologia associada a esses números.

Na **Seção 2**, nos deteremos um pouco nas bases atuais da Educação Matemática, para nos ocuparmos, depois, da construção das idéias de operações entre as frações – um início de cálculo com números fracionários. Esse cálculo será desenvolvido de modo contextualizado e significativo, sem regras ou excesso de formalismo, desenvolvendo a inventividade dos processos de resolução, a capacidade de estabelecer relações, de fazer hipóteses e testá-las, de experimentar e comprovar, levando os alunos a desenvolver problemas e processos aos quais possam atribuir significados, e a saber interpretá-los.

A **Seção 3** visa desenvolver uma melhor compreensão dos conhecimentos do professor sobre frações. Ele será o mediador desse conhecimento para a criança, deverá saber atender às exigências cognitivas e vivenciais do aluno, deverá saber refletir e opinar sobre o currículo. Para isso, é importante que ele próprio tenha um conhecimento claro do assunto. Não se trata de repetir regras que ele decorou anteriormente. O processo pelo qual possibilitaremos um melhor conhecimento dos números racionais positivos ao professor está calcado nos mesmos princípios do processo que ele desenvolverá com seus alunos, de modo mais aprofundado. Esse processo levará em conta a contextualização e a atribuição de significado, não terá um caráter algorítmico ou formal, e desenvolverá processos de resolução alternativos, que envolvam raciocínio, capacidade de estabelecer relações, de fazer hipóteses e testá-las, de experimentar e comprovar, de interpretar problemas. No entanto, chegaremos também a explicitar a lógica de alguns algoritmos formais.



1 A construção do significado de fração e do número fracionário

Objetivos:
- sintetizar problemas e dificuldades quanto ao ensino e à aprendizagem dos números fracionários, refletindo sobre eles;
- apresentar os eixos sustentadores da proposta a ser apresentada para o ensino e a aprendizagem de frações;
- introduzir uma proposta de construção do conceito de número fracionário pela criança;
- apresentar uma proposta de introdução da representação numérica associada às frações.

Professor e professora,

Até o momento, contamos a você sobre o caminho prévio percorrido por nós, a respeito da aprendizagem das frações, e mencionamos vários problemas cognitivos, didáticos e pedagógicos que têm afetado o ensino e a aprendizagem das frações e dos números fracionários.

É após esse caminhar, em que procuramos exercitar contínua e crítica observação e buscar sempre novas leituras, que chegamos ao momento atual, com a disposição de enfrentar o desafio de pôr em livro algo que reflita a soma de experiências, leituras e inferências conseguidas até o momento, e de estimular os leitores a prosseguir nesse caminhar.

Objetivo 1 - Sintetizar dificuldades e problemas no ensino e na aprendizagem dos números fracionários

A pouca presença desses números em nossa cultura, o que resulta na pouca ou nenhuma vivência dos alunos com eles. Não obstante, esses números têm grande importância na matemática, relacionando-se a razões, raciocínio proporcional, ao cálculo algébrico, a probabilidades etc.

O baixo rendimento apresentado pelos alunos, nas provas escolares e nas provas de avaliação nacional, tanto na compreensão desses números quanto nos cálculos com os mesmos. Quando sabem efetuar os cálculos, aprendidos de forma memorizada, não sabem para quê usá-los. Desse modo, é comum encontrar alunos que ficam bloqueados frente a perguntas como:

- *quanto vale 3/2 de 25,00?*
- *com 22 ½ litros, quantos frascos de 1 ½ litros poderemos encher?*

O não entendimento do significado e da lógica subjacente aos tópicos desse tema. Em geral, professores e alunos têm dificuldade em responder a questões como:

- *resolva mentalmente: quanto dá ½ dividido por ¼ ?*
- *por que a divisão de frações se faz daquele jeito estranho?*
- *por que se usa o mmc? por que ele é usado na soma e na subtração e não na divisão e na multiplicação?*

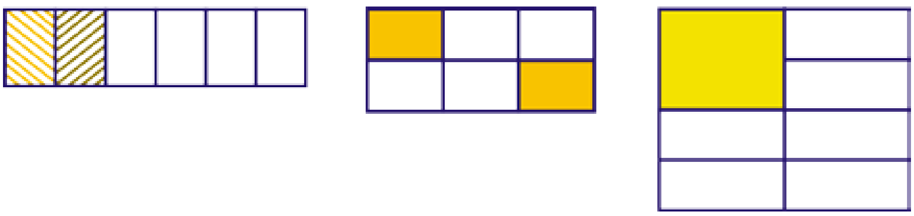
Propostas curriculares estaduais muito extensas sobre o tema, que se refletem nos conteúdos de muitos livros didáticos. Presume-se que os alunos possam adquirir competências de compreender esses números, estabelecer relações, operar com eles e resolver problemas durante dois bimestres – um no 4º ano e outro no 5º ano. Visa-se à formação do aluno-calculadora – não importando o que ele entenda ou não, mas bastando que consiga realizar qualquer operação com os números naturais, fracionários, decimais.

Não se enfatiza nem mesmo como usar essas operações, ou como combiná-las, na resolução de problemas.

Há várias pesquisas que confirmam o ensino/aprendizagem inadequados das frações.

Mack, uma pesquisadora norte-americana citada por Nunes e Bryant (1997), p. 213, verificou, entre alunos de 6ª série, que a compreensão de situações que envolviam frações fora da escola não se articulava com as representações simbólicas aprendidas na escola. Propôs o problema: "suponha que você tem duas pizzas do mesmo tamanho e você corta uma delas em 6 pedaços de tamanho igual, e você corta a outra em 8 pedaços de tamanho igual. Se você recebe um pedaço de cada pizza, de qual você ganha mais?" Depois, uma nova pergunta: "que fração é maior, 1/6 ou 1/8?" Mack observou que, na primeira pergunta, não houve dificuldade; mas, na segunda, com exceção de 1 aluno, todos disseram que 1/8 era maior porque 8 é um número maior. Mack trabalhou com esses alunos movendo-se dos problemas apresentados simbolicamente para as situações de contextos familiares e vice-versa, e notou que os estudantes começaram a relacionar símbolos e procedimentos escolares de frações ao seu conhecimento informal. Nunes e Bryant (1997), p.213, indagam-se se essa lacuna não poderia ser evitada por meio de uma aprendizagem escolar que estabelecesse essas conexões, e aventam a hipótese da causa do problema ser o uso escolar de procedimento de dupla contagem para a aprendizagem de frações – o qual consiste em, num todo dividido em partes iguais com algumas delas destacadas, contar o número total de partes (por exemplo, 8), contar o número de partes pintadas (por exemplo, 5) e escrever 5/8 , sem entender o significado deste novo tipo de número.

Nunes e Bryant (1997), citam também, na página 193, as pesquisas de Campos et allii (1995), evidenciando que esse modo de introduzir frações pode causar erro. Nas pesquisas de Campos, foram apresentadas três figuras, para que alunos de 5ªsérie reconhecessem as frações associadas a cada caso.



Os alunos deram respostas corretas para os dois primeiros retângulos. No terceiro retângulo, 56% dos alunos escolheram 1/7 como a fração correspondente; 12% escolheram 2/8 e 4% indicaram tanto ¼ como 2/8.

Essa abordagem para o ensino/aprendizagem das frações não se coaduna com uma educação que visa à formação do cidadão autônomo e crítico, e à sua inserção ativa na sociedade. Autonomia e criticismo não serão atingidos por esquemas de dependência ao professor, desvinculados de um pensar consciente. Por sua vez, a atuação ativa num mercado de trabalho que requer capacidade de resolver problemas, avaliar situações, propor soluções e ter versatilidade para novas funções, não pode ser alcançada apenas pelo exercício de um fazer mecânico, sem pensamento próprio e sem questionamento. Felizmente os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam para novos rumos – nas séries iniciais, os conteúdos relativos aos números fracionários foram diminuídos, havendo tempo suficiente para uma introdução bem fundamentada a eles.

Objetivo 2 - Discutir os eixos norteadores da proposta

A proposta que desenvolveremos sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de números fracionários, centra-se em:

1 - A noção de conceito matemático de Vergnaud.

2 - O desenvolvimento histórico da noção de fração vivido pela humanidade (incluindo frações unitárias).

3 - Reservar um longo tempo (educação infantil, 1ª , 2ª e 3ª séries) à construção das primeiras frações.

4 - A dispensa da simbologia, por um longo tempo inicial.

5 - A construção do número fracionário.

6 - A multiplicidade de aspectos do conceito de fração.

A seguir, explicaremos um pouco cada um dos eixos.

1- A noção de conceito matemático de Vergnaud.

Vergnaud afirma que, para estudar e entender como os conceitos matemáticos desenvolvem-se nas mentes dos alunos, por meio de suas experiências dentro e fora da escola, precisamos considerar três fatores: o conjunto de situações que tornam o conceito útil e significativo; o conjunto de invariantes envolvidos nos esquemas usados pelos alunos para lidar com diferentes aspectos daquelas situações, invariantes esses que se traduzem principalmente por conceitos em ação e teoremas em ação; e, como terceiro fator, o conjunto das representações simbólicas, lingüística, gráfica ou gestual que possam ser usadas para representar situações e procedimentos. Ou seja, para desenvolver a construção desse conceito é necessário:

- *explorar um conjunto de situações que tornam o conceito útil e significativo;*
- *desenvolver e mediar os esquemas apresentados pelos alunos nas ações sobre essas situações;*
- *desenvolver ou estimula o desenvolvimento de representações lingüísticas e não lingüísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações às quais ele se aplica.*

Caracterizar um amplo conjunto de situações em que esse conceito possa ser útil ao estudante é intrínseco ao próprio desenvolvimento do conceito.

2 - O desenvolvimento histórico da noção de fração vivido pela humanidade.

Destacamos nesse desenvolvimento:

- *o modo provável como os homens chegaram às frações: Tropfke (1980), em sua História da Matemática Elementar, faz uma descrição inicial do aparecimento histórico das frações a qual, numa tradução adaptada, diz o seguinte: "A tarefa de dividir k objetos em n partes (por exemplo dividir 7 pães por 10 pessoas) apareceu, na prática, seguramente antes de qualquer costume escrito. Talvez se tenha inicialmente dividido cada um dos objetos em 10 partes – desse modo obtinha-se a "fração tronco" 1/10, que podia ser considerada, de certo modo, como uma nova unidade, e então reunia-se 7 dessas novas unidades. A fração geral 7/10 é assim, por um lado, entendida como o resultado da divisão 7:10; por outro, como reunião de 7 unidades 1/10".*
- *o fato dos povos antigos, principalmente os egípcios, terem se apoiado fortemente nas frações "tronco", ou unitárias (com numerador 1),*

3 - O tempo necessário

A criança necessita de um tempo maior, em termos de apreensão cognitiva e de experiências vividas, para a construção desse conceito.

Aventamos a hipótese, a partir de experiências que realizamos, de que o tempo dedicado a esses números, nas propostas escolares, é insuficiente.

De fato, na aprendizagem dos números naturais, são necessários vários anos para a sedimentação da compreensão de alguns números iniciais desse conjunto. Embora essa aprendizagem se inicie por volta de 1 ano e meio, muitas crianças chegam aos 6 ou sete anos sabendo apenas identificar, nomear e comparar quantidades até 6 ou 8 (não estamos nos referindo à sua capacidade de recitar, oralmente, a seqüência numérica até números bem maiores, ou mesmo de saber ler símbolos como 100 ou 1000). Se isso ocorre com os números naturais, que povoam nossa sócio-cultura e com os quais a criança entra em contacto diariamente, por que deveria ser diferente com os números fracionários, pouco presentes no cotidiano, e com os quais a criança pouco ou nenhum contacto teve?

As propostas escolares não têm levado em conta esse fato. Basta olhar os livros escolares para se ver que, após a introdução da metade (quase sempre de um número) feita em alguma série anterior, nenhuma menção é feita a qualquer outra fração, até o início do estudo desses números, geralmente no quarto ano. Pode-se notar então, já na primeira e segunda páginas, uma boa quantidade de informações: vários desses novos números são apresentados, acompanhados da simbologia correspondente; é comum ainda serem introduzidas terminologias como fração, numerador e denominador, fração própria, imprópria, mista etc.

A escola propõe que, em poucas páginas (e dias), os alunos aprendam:

- *os nomes um meio, um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo – além dos famigerados "avos".*
- *a se referir a mais do que uma dessas partes: dois meios, dois terços, três quartos, quatro quintos etc.*
- *os símbolos para esses termos: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10. Ou 2/2, 2/3, 3/4, 4/5.*
- *alguma terminologia relacionada: numerador, denominador, frações próprias, impróprias, mistas, aparentes etc.*

4 – A dispensa da simbologia formal, por um longo tempo inicial

Há necessidade da compreensão dessas quantidades ser feita antes da introdução dos símbolos associados. Essa é outra hipótese que fizemos - de que a introdução prematura dos símbolos fracionários é um obstáculo à construção da idéia desse número.

Essa hipótese apoia-se em vários fatores:

Nossas observações feitas no Laboratório de Ensino de Matemática, na Universidade de Brasília. Um dos momentos relevantes dessa observação ocorreu quando trabalhávamos com um grupo de alunos de 2ª série (atual 3º ano). Era usual desenvolvermos os conhecimentos com as crianças antes que elas os tivessem visto na escola. Trabalhávamos com noções iniciais de frações e operações intuitivas ligadas a situações do cotidiano. Por ser um caminho mais natural para a comunicação, nos restringíamos ao uso da linguagem verbal e a escritas correspondentes, como:"1 inteiro – 1 quarto = 3 quartos". O grupo reagia muito bem e não demonstrava dificuldade. As férias chegaram e suspendemos temporariamente os trabalhos. As aulas na escola das crianças recomeçaram antes e, cerca de um mês após esse início, elas voltaram ao Laboratório. Foi impressionante constatar o estrago cognitivo que essas semanas na escola causaram às crianças. Elas haviam iniciado lá a aprendizagem de frações, associada à simbologia e à nomenclatura. O desconhecimento que mostravam e a confusão que faziam eram muito grandes, e só lentamente elas resgataram coisas que já haviam compreendido, e admiravam-se de descobrir alguma conexão entre aquilo, que era claro para elas, e o complexo universo simbólico visto na escola.

Desde então, nossas propostas foram no sentido de trabalhar-se, de um a dois bimestres iniciais do ensino de frações, sem introdução da simbologia, (Bertoni (1994)). Amato (1988), também propõe que a simbologia seja apresentada lentamente.

Outro motivo para se adiar a introdução dos símbolos fracionários é a complexidade apresentada por essa simbologia. Ohlson (1991), menciona que:

"a complicada semântica das frações é, em parte, uma conseqüência da natureza composta das frações. Como ocorre do significado de 2 combinado com o significado de 3 gerar um significado para 2/3?"

Essa decisão encontra respaldo em Moro (2005, p.45), segundo a qual:

No ensino, é essencial seguir as notações espontâneas das crianças para, a partir delas, provocar-lhes a produção de notações mais avançadas, sempre em relação à interpretação das próprias crianças e trabalhando-se, primeiro, com os quantificadores de sua linguagem natural.

5. A construção do sentido numérico

As propostas usualmente desenvolvidas para o ensino de frações parecem estar somente ligadas a figuras divididas e nomeação de partes consideradas. O sentido de número, associado a uma quantificação necessária e passível de ser colocado na reta numérica, fica oculto. A proposta que desenvolvemos centra a aprendizagem das frações na construção de um número, explicitando a que vem esse número e o que ele quantifica, bem como suas relações com os números naturais.

6. A multiplicidade de aspectos do conceito de fração

Ohlsson p. 54/55, menciona que Kieren identifica cinco idéias associadas ao número fracionário como básicas, a saber: parte-todo, quociente, medida, razão e operador, que desenvolveremos ao longo do fascículo. As idéias de parte-todo, quociente e razão fazem parte dos conteúdos do segundo ciclo, nos PCN´s.

Objetivo 3 - Introduzir uma proposta de construção do conceito de número fracionário pela criança

Ao fazer uma proposta para a aprendizagem das frações e números fracionários, estaremos levando em conta os eixos norteadores mencionados.

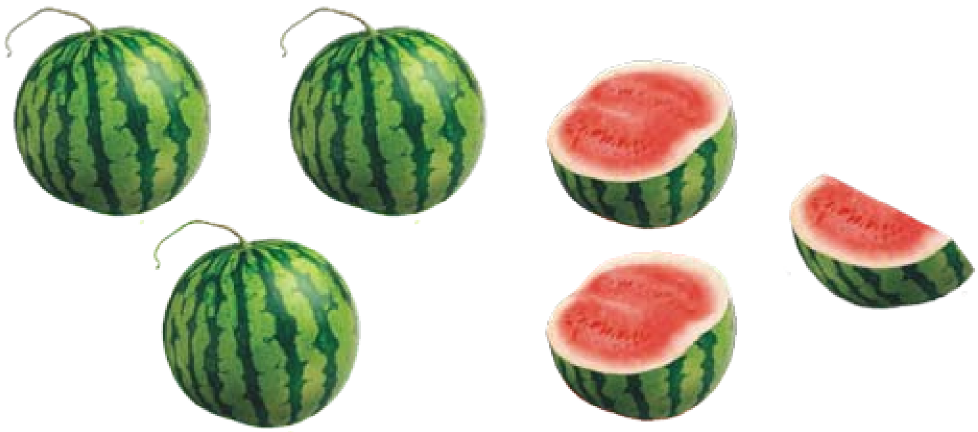
Situações significativas para a construção do conceito

Assim, vamos apresentar situações que façam surgir, em vários contextos do cotidiano, quantidades fracionárias, observar e estimular esquemas próprios dos alunos frente a essas situações e desenvolver representações para expressar os resultados, no princípio em formas espontâneas dos alunos.

Pesquisando situações do contexto que induzem a quantidades fracionárias, nós as classificamos em três tipos principais:

Situações de quantificação que envolvem uma contagem ampliada, requerendo novos números além dos naturais

Um funcionário deve contar quanto de melancia existe na banca. Quanto ele deve dizer que há?



As crianças percebem que há 3 melancias inteiras, duas metades, um quarto (ou metade de metade). Estimuladas, conseguem simplificar para 4 melancias e 1 quarto.

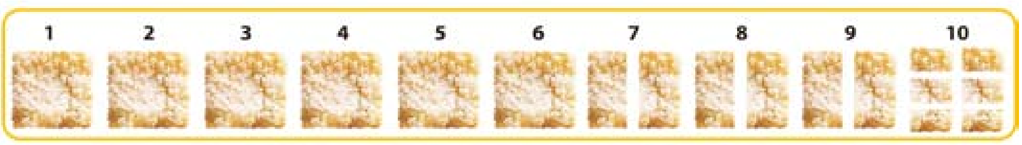
A resposta é uma quantidade. Algo que lembra número. Vem misturado com números naturais. Além de ser uma situação que provoca a consideração de quantidades fracionárias, induz à noção de número – 4 e meio – que será um quantificador para a coleção, ou o resultado de uma contagem ampliada. Usamos o termo ampliada significando uma contagem que extrapolou os números naturais.

A vantagem dessas contagens é que as partes fracionárias aparecem junto com as inteiras, fazendo uma junção dos números fracionários aos números naturais. É bem diferente de quando se trabalha somente com a divisão de um inteiro. Mesmo as frações 5 quartos, que requerem que se tome pelo menos dois inteiros, causam estranheza.

Situações de divisão entre dois números naturais, em contextos que demandam a divisão do resto

Em Bertoni, 2008, apresentamos a seguinte situação:

Dividir 10 cocadas para 6 crianças. Uma solução possível:



Dar um doce a cada um; partir os 4 doces que sobram ao meio, dar uma metade a cada um; partir as duas metades restantes em 3 partes cada uma, dar um pedaço a cada um.

A identificação das partes, com nomeação e representação, fica associada a uma situação de quantificação articulada ao contexto. Cada criança recebe doces, aprende a dizer e representar quanto recebeu. Muitas manifestam-se inicialmente dizendo que receberam uma cocada, mais meia cocada, mais um pedacinho que, instigadas, especificam ser a metade dividida em 3. É uma oportunidade para a introdução do conceito de sexto.

Situações de medida nas quais a unidade não cabe exatamente um número inteiro de vezes no objeto a ser medido

Tomar uma vara que sabemos ter 1,5 m de comprimento (mas os alunos desconhecem isso). Pedir que, com sua fita do tamanho de 1 metro, verifiquem o comprimento da vara. Eles verão que ela tem 1 metro mais 1 pedaço. Questionar se conseguem explicar melhor que pedaço é esse. Procurando um modo de resolver, eles verão que esse pedaço vale meio metro.

Quando efetuamos uma medida e não obtemos um número natural, então sobra uma parte, que nossos instrumentos avaliam como uma parte fracionária (embora, na verdade, possa ser uma medida não fracionária, dada por um número irracional).

Ao construírem a noção dessas primeiras quantidades e de seus nomes, os alunos estarão abrindo caminhos para a compreensão da idéia dos primeiros números fracionários, ainda que não saibam registrá-los.

Lembretes:

Professores,

Se querem levar as crianças a aprender os primeiros números fracionários, estejam atentos a:

- *propor situações significativas que demandem o surgimento ou a consideração de quantidades fracionárias.*
- *esperar por, estimular e mediar a ação das crianças frente a tais situações, socializando os esquemas e conhecimentos manifestados.*
- *não enfatizar o trabalho apenas com uma unidade a ser subdividida, perdendo a relação dos novos números com os números naturais já conhecidos.*
- *fazer as crianças observarem os casos em que todas as partes obtidas valem o mesmo tanto (metades de melancias, os pedacinhos da cocada, resultantes das metades divididas em três partes.*
- *fazer perceberem que as partes podem aparecer numa ordem aleatória. Por exemplo: pedaços de metade, em seguida décimos, depois quartos, quintos, oitavos, conforme apareçam em situações práticas.*

• *a cada nova parte, ou fração, surgida em uma situação, insistir:*

• *quantos daqueles precisamos para voltar a ter a coisa toda (formação do todo). Essa compreensão, de quantas frações iguais à certa fração dada são necessárias para fazer o todo, será útil ao longo de toda aprendizagem com frações – ela permite identificar de que fração se trata.*

• *tirando uma delas, quantas sobram na coisa que foi dividida? Ou: dividindo um objeto em 4 partes iguais, e tirando 1 quarto, quantos quartos sobram?*

• *se já temos uma, quantas precisamos juntar para poder montar a coisa inteira? (complemento).*

Isso será iniciado nas últimas séries da Educação Infantil e no primeiro ano, nos quais explora-se a noção de metade ou outra parte que apareça naturalmente.

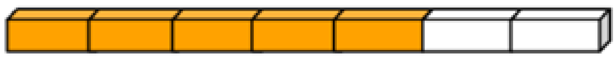
Essas noções devem ampliar-se no 2o e 3º anos, não numa seqüência linear, mas aproveitando as situações nas quais essas partes e os números correspondentes surgirem, ou mesmo provocando essas situações, de modo gradativo.

Número fracionário como relação parte-todo e como divisão

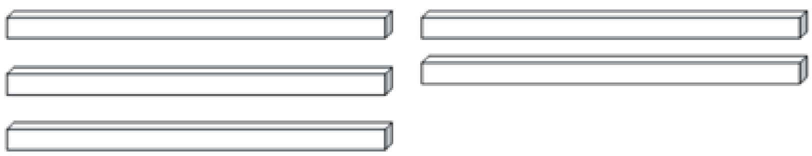
Repare que qualquer número fracionário pode ser visto associado à relação parte-todo ou como resultado de uma divisão. Por exemplo, considerando o número 5 sétimos.

1) 5 sétimos pode ser visto como o número que indica a quantidade correspondente a 5 partes tiradas de um todo dividido em 7 partes iguais

5 sétimos



2) 5 sétimos é também o resultado da divisão de 5 objetos para 7 pessoas.



Há várias maneiras de resolver. Uma, que as crianças costumam pedir, é que se divida cada um deles em 7, dando, de cada um, um pedaço a cada criança.

Repare: Todos os pedaços são sétimos. Ana recebe 1 sétimo de cada doce, ao todo recebe 5 pedaços de 1sétimo.

Cada criança recebe igualmente 5 pedaços de 1sétimo do doce.
(Portanto: $5 \div 7 = 5 \text{ de } \frac{1}{7}$ ou, como poderão escrever mais tarde $5 \div 7 = \frac{5}{7}$).

Algumas sugestões específicas por ano

Educação infantil e 1º ano

As situações de divisão do sanduíche, da laranja ou do doce em duas partes iguais ocorrem naturalmente, e vamos chamá-las, de modo natural, de metades do sanduíche, da laranja, do doce. A metade pode surgir, também, em situações-problema, como na divisão de três laranjas para duas crianças ou de duas laranjas para 4 crianças. Pode-se usar também a palavra meio ou meia.

Esteja atento a usar as palavras envolvidas não apenas no sentido de nome de uma parte ou pedaço, mas também como quantificador daquela parte. Uma estratégia é perguntar, após divisões, não por o que ganhou (nome da parte) mas por quanto da laranja ganhou (enfatizando a relação de quantidade).

Outras situações (que não devem ocorrer só num bimestre, mas devem voltar sempre, ao longo do ano).

- dividir igualmente o conteúdo de um copo cheio em dois copos, para dar suco a duas crianças, resultando em meio copo para cada uma. Enfatizar diferentes quantidades de líquido que se pode formar: um ou mais copos, meio copo, dois copos e meio etc.

- Explorar a metade do rosto, do corpo, do banco, do tampo da mesa.

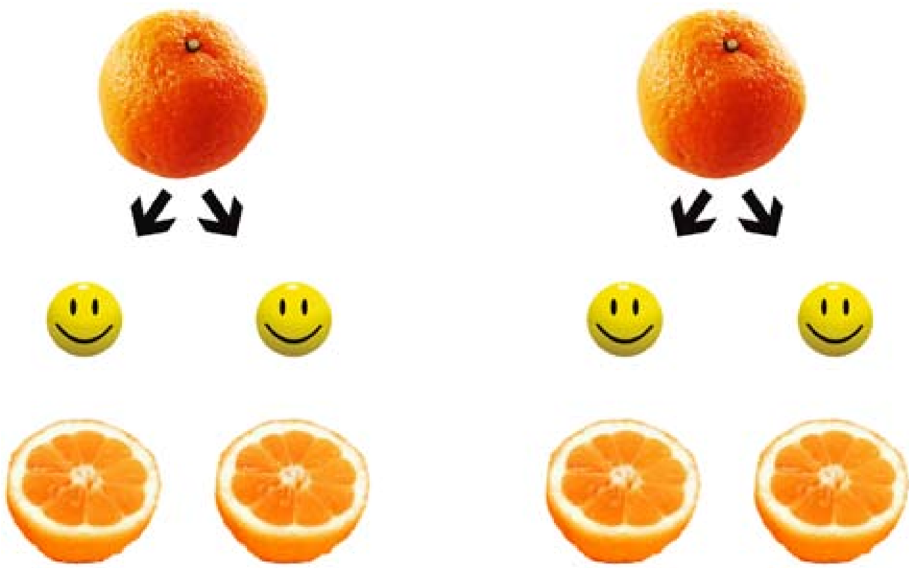
- Ao fazer uma dobradura, ensinar o que significa "dobrar uma folha ao meio". Mostrar que, ao fazer isso, obtemos duas metades iguais da folha. Se pegamos uma metade, ainda sobra outra. Se reunimos as duas metades, voltamos a ter a coisa inteira (noções de complemento e de formação do inteiro). Pode

Pode ocorrer de duas crianças dividirem a folha ao meio de modos diferentes, como:

Nesse caso, trabalhar para que percebam que os pedaços diferentes valem o mesmo tanto,

- Num jogo, explorar metade do caminho.

- Na divisão de 2 laranjas (ou outra coisa) para 4 crianças, explorar bem a situação, ressaltando o fato de dar meia laranja a cada um.



Aqui fica clara a idéia de fração como resultado de uma *divisão,* em um contexto bem claro. Vemos que a metade pode ser obtida pela divisão de 2 por 4 (ou 3 por 6 etc).

Fração e número fracionário como resultado de uma divisão

$2 \div 4 = 1$ meio $\qquad$ $3 \div 6 = 1$ meio.

Professor, mesmo nessa fase inicial, você deve observar que, nos procedimentos descritos, estão subentendidas:

- *idéia de fração e número fracionário como relação parte-todo: a laranja apresenta-se dividida em duas partes iguais. Destacando-se uma delas, será chamada de 1 meio.*

- *a idéia de fração e número fracionário como resultado de uma divisão: 2 dividido por 4 dá metade ou meia coisa. Mesmo na obtenção da fração unitária há uma divisão: 1 dividido por 2 dá metade ou meia coisa.*

- *também é interessante explorar concretamente: o metro inteiro, a metade* do metro; o litro inteiro, a metade do litro. Por exemplo: pegar uma fita do tamanho de um metro e dobrá-la ao meio; pegar um frasco onde caiba um litro, enchê-lo de água, dividir em duas partes iguais. Fazer perguntas que tornem a situação significativa: qual de vocês mede mais do que um metro? O passo de cada um, é maior ou menor que meio metro? Quem consegue beber meio litro de suco ou água um dia? A quantidade de refrigerante na lata é mais ou menos que meio litro? Essas atividades envolvem medidas. É muito comum apare- $\frac{1}{2}$ cerem frações, quando efetuamos medidas.

Sobre o registro

Apesar de não haver intenção de introduzir o registro ½ nessa fase, pode ocorrer das crianças verem em algum lugar essa representação e lerem, talvez, "um dois". O papel do professor é informar, sem maior ênfase, sobre o significado daquela escrita numérica, dizendo, por exemplo: "aí está escrito um meio. Quer dizer metade. É o 1 separado do 2 por um risco". Somente nesse caso, de aparecimento do símbolo em algum lugar que chame a atenção das crianças, o símbolo será informado. Não é necessário pedir que as crianças escrevam.

Nessa fase – Educação Infantil e 1ª série - caso surja alguma coisa dividida num outro número de partes iguais, pode-se informar no momento o nome de cada parte. Por exemplo: algum doce repartido em quatro partes – um quarto - uma jarra de um litro que apareça graduada em décimos – um décimo – etc. Não é necessário repetir e voltar a esses termos, a não ser que a situação se renove.

Propondo situações

Exemplo da formação de conceitos segundo Vergnaud

Lembrando que o primeiro constituinte da formação de um conceito segundo Vergnaud é um conjunto de situações que tornem o conceito (a surgir) útil e significativo, a constatação de metades não deve ser feita somente em situações estáticas, mas deve ser provocada por situações:

- **Maria cortou uma laranja para dividi-la bem certinho entre si e uma colega. Quanto de laranja cada uma recebeu?**

Estimular o pensamento de cada aluno, bem como qualquer tipo de expressão da resposta: falada, escrita, desenhada.

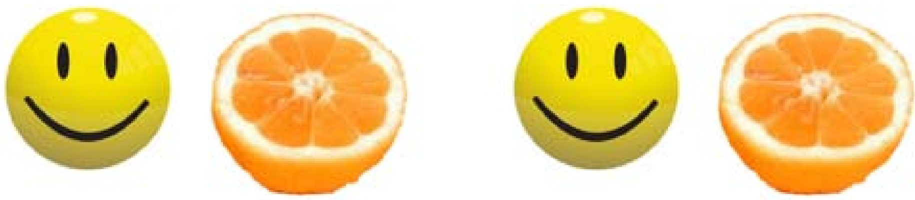
Com isso, estaremos desenvolvendo o segundo e o terceiro componentes da formação de um conceito segundo Vergnaud: a atuação livre dos alunos na qual manifesta-se a produção de esquemas próprios, e a informação ou criação de representações da situação, na forma verbal, de desenhos ou outras.

Lembrar que, nessa fase, as crianças têm necessidade de registrar todas as partes obtidas na divisão (e não apenas dizer o que coube a uma elas, para ser generalizado para as demais). Exemplos de expressão das respostas, em três registros verbalizados e um em desenho:

Eu ganhei meia laranja. A Débora ganhou meia laranja.

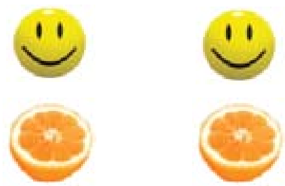
Uma laranja → Metade para mim e metade para minha amiga.

$$\text{Uma laranja} \begin{cases} \text{Meia laranja} \\ \text{Meia laranja} \end{cases}$$



Se, no primeiro ano, a chave da divisão já foi introduzida, é comum que representem o resultado por:

1 laranja | **2 crianças**



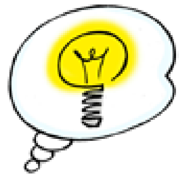
Se, em vez de uma laranja para duas crianças tiverem uma laranja para 4 crianças, fazem desenhos (da laranja real, não de um quadrado ou um retângulo), dizem que "deu menor", "só deu um pedacinho" e, perguntados sobre quanto deu da laranja, expressam-se por "deu a metade dividida em 2" ou "deu metade da metade".

É uma boa oportunidade para dizer que essa quantidade tem um nome: 1 quarto. (Pode-se até explicar que muitas casas de moradia são feitas divididas em quatro partes iguais: sala, cozinha, banheiro e um quarto, e fazer relação com o nome).

As ações dos alunos conduzem-nos ao conceito de metade da metade e a um conhecimento: se dividir o objeto em mais vezes, obtém-se uma parte menor. Ou, como costumam dizer: quanto mais divide, menor fica.

As crianças chegam a exemplos do que Vergnaud chama de conceito em ação (a noção de metade da metade e, possivelmente, seu nome) e teorema em ação – a propriedade de que quanto mais divide, menor fica. São conhecimentos invariantes, válidos em qualquer situação – a metade da metade corresponde sempre à divisão do objeto em 4 partes iguais, e, qualquer que seja o objeto, quanto mais for dividido, menor será a parte obtida.

Não é necessário ensinar a resolver a situação proposta. Só deixar as crianças pensarem, fazerem hipóteses, apresentarem respostas de um grupo a outro e repensarem... até se certificarem de uma solução a que podem chegar sozinhas. A resposta está associada a uma divisão – de 9 anos em duas partes iguais – a qual, embora eles não saibam fazer formalmente, podem calcular com os conhecimentos prévios.



Celina estava fazendo 9 anos. O pai dela lembrou que metade da vida ela havia morado com seus avós. Quanto tempo Celina ficou com os avós?

2º e 3º anos

Nessa fase, as crianças devem continuar a aprender e a compreender os primeiros números fracionários. De modo análogo à aprendizagem dos primeiros números naturais, isso pode se estender por vários anos – talvez cerca de dois anos, para que as crianças construam bem esse entendimento.

Ainda estaremos dando ênfase às frações unitárias, a quantas de cada uma formam a unidade. Se a situação faz referência a vários pedaços de uma mesma fração unitária, diremos: dois pedaços de 1 terço, 3 pedaços de 1 quarto.

Como dissemos, essa exploração não deve ocorrer linearmente (1 meio - 1 terço – 1 quarto – 1 quinto etc) ou só em um espaço de tempo do 2o ano e em outro do 3o , mas deve voltar sempre, ao longo desses dois anos.

Situações para continuar a introdução de números fracionários

Os seguintes problemas devem ser resolvidos sem regras e sem nomes das frações. Gradativamente, o nível de complexidade pode aumentar.

1 - Tia Lucy tinha 5 doces para dividir igualmente entre 4 sobrinhos. Como ela poderia fazer essa divisão?

2 – Quatro crianças compraram 3 barras de chocolate e querem dividi-las igualmente entre eles. Como eles podem fazer isso?

3- A mãe dividiu um bolo igualmente para dar aos 4 filhos. Mas chegaram 4 amigos, que também queriam comer o bolo. Como a mãe poderia fazer?

4 – Quantas metades de litro cabem em um litro e meio? ? E quantos quartos de litro cabem em um litro e meio?

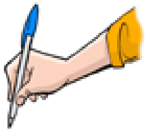
5 - A mãe dividiu um doce em 8 partes iguais. Joelmir, Maria e Gláucia vieram e comeram tudo. Joelmir comeu metade do doce. Maria comeu uma das partes cortadas. Quantas partes do bolo Gláucia comeu?

6 - Uma professora tinha 10 alunos. Ela dividiu uma goiabada em 10 pedaços, para dar um pedaço a cada aluno. Mas três alunos não quiseram. Dois deles eram irmãos e deram seus pedaços para um *primo, o outro deu seu pedaço para um amigo. No lanche, os colegas comeram os pedaços que ganharam.*

Quantos alunos comeram goiabada?

Quantos alunos comeram mais do que um pedaço? Quantos pedaços eles comeram:?

Quantos alunos comeram só um pedaço?



Atividade 2

Deixe as crianças resolverem e discutirem os problemas acima, do jeito que quiserem. Pode ser só pensando ou desenhando. Lembre-se que elas ainda não aprenderam nenhuma conta com as frações. Na Situação 3, provavelmente as crianças chegarão à idéia de dividir cada um dos 4 pedaços iniciais ao meio, dobrando o número de pedaços. Pode-se informar que o nome de cada pedaço é relacionado com o número de partes em que o bolo foi dividido : oito $\longrightarrow$ oitavo. Também perceberão que, dividindo mais, os pedaços ficarão menores.

Esquemas, conceitos em ação, teoremas em ação - Desenvolvimento e ênfase

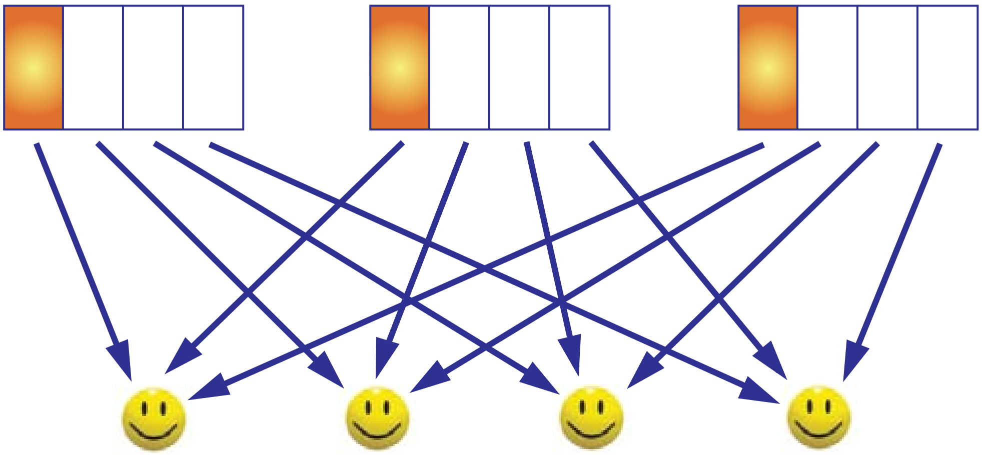
Na ação das crianças, surgem inúmeros conhecimentos que devem ser destacados e valorizados. É importante notar que eles surgem em situações significativas para os alunos, não em situações abstratas em que se impõe a divisão de um retângulo em partes iguais, sem que a criança saiba para que faz aquilo.

Exemplos de conhecimentos

Na situação 1, o surgimento da parte fracionária resultante da divisão de 1 por 4 (cujo nome pode ser introduzido ou reforçado), e ainda a expressão do resultado da divisão total como um número expresso como um natural mais um número indicando parte fracionária menor que a unidade: 1 e 1quarto (Não há necessidade da escrita simbólica).

Na situação 2, há geralmente dois tipos de soluções:

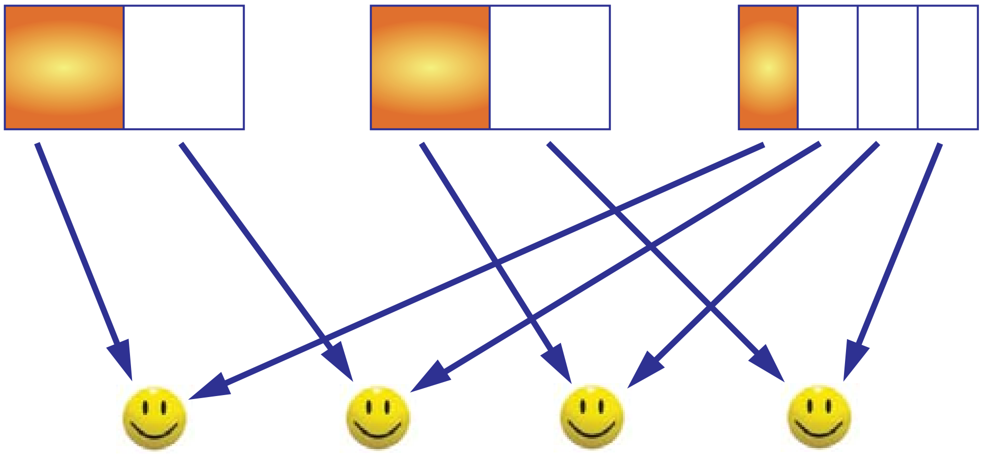
A – Dividir cada barra em 4, dar um pedaço a cada criança.



Cada criança recebe 3 pedaços de 1 quarto.

B – Podem começar dividindo duas barras ao meio e dando metade a cada um.

Depois dividem a última barra em 4 e dão um pedaço a cada um



Cada criança recebe uma metade mais 1 quarto.

Investigando se a quantia recebida é a mesma no caso A ou no caso B, chegarão a uma equivalência em ação, percebendo que 1 metade vale o mesmo que 2 pedaços de 1 quarto.

Na situação 3, percebem o que poderá se tornar um teorema em ação – "se dividem no dobro de partes, cada uma ficará reduzida à metade". O teorema em ação não diz respeito a uma ação exclusiva, mas sim à validação de uma série de ações com o intuito de produzir um certo resultado. É preciso que ele perceba o que ocorre em situações semelhantes (como, por exemplo, se havia 5 pedaços e 10 crianças, era necessário dividir cada um ao meio, resultando em mais pedaços menores que os anteriores).

Esse conhecimento intuitivo, constatado na prática, dará suporte lógico, mais tarde, a um resultado importante sobre números fracionários: "multiplicando-se o denominador de uma fração por 2, ela fica reduzida à metade do seu tamanho". Ou: 1/10 vale metade de 1/5.

Da mesma forma, os esquemas usados pelas crianças para resolver as outras situações gerarão conhecimentos sobre os números fracionários.

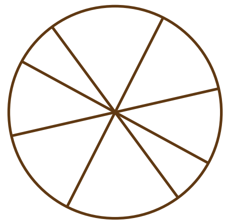
Situações do cotidiano para reforçar a idéia dos números fracionários

Além das situações-problema que são propostas, o professor deve estar atento a situações que ocorrem no cotidiano e permitem reforçar a idéia dos números fracionários introduzidos:

Para reforçar a noção de um quarto:

Aproveitar a divisão de um sanduíche, uma laranja ou um doce em quatro partes iguais. Dizer o nome de cada uma: um quarto. Fazer notarem de quantos quartos precisamos para formar uma coisa inteira.

- Para reforçar a noção de 1 oitavo - Brincando com a pizza

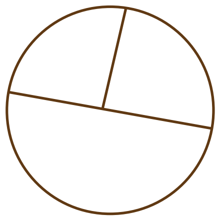


Se alguém contar que comeu pizza, perguntar se viu como ela estava dividida. Poderão fazer um desenho. Pode ocorrer de fazerem uma seqüência de fatias justapostas e desiguais.

Continuar o questionamento – se sabem em quantas partes ela vem dividida, como o cozinheiro do bar ou a mãe fazem para dividir a pizza.

Fazer uma pizza de massa de modelar e mostrar como é dividida:

- *Marcar mais ou menos o lugar do centro*
- *Fazer um corte reto, de um lado ao outro, passando pelo centro e dividindo a pizza. Questionar sobre o que se obteve (duas metades)*
- *A partir do centro, fazer um corte perpendicular ao anterior. Como a palavra perpendicular não será usada, marcar o lugar do corte com auxílio do canto reto de uma folha de papel. Ou mostrar com a mão como os dois cortes devem ficar.*

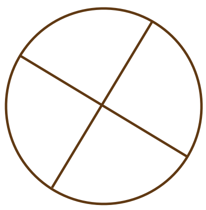


- *Questionar: o que temos agora? Se falarem três pedaços, perguntar se alguém sabe o nome daqueles pedaços. Se falarem 3 metades, mostrar estranheza: Mas uma pizza pode ter 3 metades? Duas metades não formam a pizza inteira?*

O objetivo é levá-los a falar: uma metade e dois pedaços menores, ou mesmo: uma metade e duas metades da metade (quartos, caso alguém se lembre).

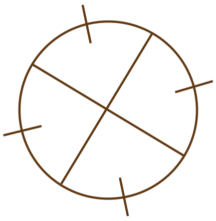
- *Prolongar o traço que está só pela metade.*

Questionar se agora temos pedaços iguais, e quantos são.

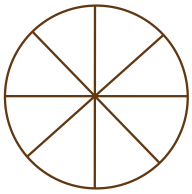


Informar (novamente) o nome: 1 quarto de pizza. E quantos quartos precisamos para formar a pizza inteira? (formação do todo a partir da fração). E se tiramos um quarto, com quantos ficamos? (complemento da fração no todo).

Se os alunos estiverem satisfeitos, parar por aqui. Se disserem que a pizza não está completamente cortada, mostrar como podemos imaginar o meio de cada quarto:



A partir desses tracinhos, fazer cortes que passem pelo meio da pizza:



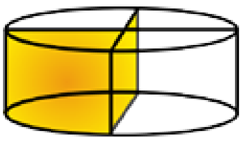
Pronto! A pizza está dividida em 8 partes iguais, igual à da pizzaria. Cada pedaço desses chama-se 1 oitavo. Um oitavo é metade de um quarto.

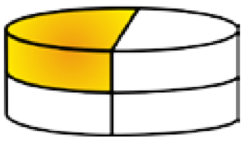
A noção de quarto e oitavo deve ser reforçada nos dias posteriores. Por exemplo, as crianças podem cortar massas redondas, na escola ou em casa, em 8 partes: começando pelas metades, depois obtendo os quartos e oitavos. Outras idéias:

- Explorar meia hora e um quarto de hora. Chamar a atenção para o fato do ponteiro maior dar uma volta completa no mostrador, entre uma hora exata e a seguinte. Questionar: e quando passar meia hora, quanto ele andará (meia volta no mostrador). E onde o ponteiro estaria, quando passar 1 quarto de hora?

- Como dividir uma folha de papel em 4 partes iguais? (Há vários modos).

- Questionar sobre as várias maneiras de se obter um quarto de torta:





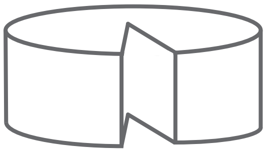
Explorar: Tirando-se um quarto, quantos quartos sobram na torta? (complemento da fração no todo)

Voltar sempre a uma questão básica:

- Quantos quartos são necessários para formar a torta inteira? (relação entre a fração e o todo). Lembre-se: ao perceber quantas frações iguais à certa fração dada são necessárias para fazer o todo, o aluno poderá identificar de que fração se trata.

-Verificar quanto é: 1 quarto do lápis; 1 quarto dos alunos da classe.

- Mostrar pedaços cortados numa coisa inteira e perguntar se vale mais ou menos que 1 quarto.



Também se pode mostrar um pedaço isolado, contando que se possa imaginar o todo de onde foi tirado (fatia de queijo, de pizza, de bolo redondo). As crianças devem internalizar que 1 quarto é o nome que se dá ao pedaço obtido pela divisão do objeto em 4 partes iguais e que quatro quartos juntos, de uma mesma coisa, formam essa coisa inteira (formação do inteiro). Portanto, deverão imaginar se 4 pedaços daquele que está sendo mostrado formam o queijo, ou a pizza. Se não formarem , é porque o pedaço é menor que 1 quarto.

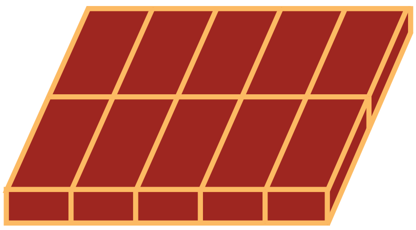
Uma idéia para introduzir a noção de um quinto:

Integrando com aula de História, contar que, quando o Brasil era colônia de Portugal, os reis de lá exigiam que 1 quinto do ouro produzido nas minas do Brasil fosse enviado a Portugal. A embarcação que levava esse ouro era chamada Nau dos Quintos. Explicar como era calculado 1 quinto.

Mostrar que 1 copo comum vale 1 quinto de um litro. Enchendo 5 copos e despejando numa jarra, conseguiremos formar 1 litro.. Um litro pode ser dividido em 5 copos iguais.

- Para introduzir a noção de um décimo:

Mostrar o que significa um décimo de um bolo, de 1 litro, do metro, de 1 real (10 centavos), do peso próprio (algumas atividades são mais adaptadas à 3ª série).



- 1 bolo dividido em 10 partes iguais

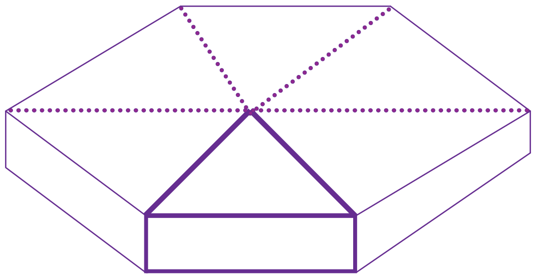
Cada parte chama-se 1 décimo

(Fração como relação parte-todo)

- Para obter-se o décimo do litro, dividir antes um litro em 5 copos iguais (comuns, tipo americano). Dividindo cada um deles em duas partes, teremos 10 partes iguais a meio copo. Cada meio copo vale 1 décimo do litro.

Outras frações (mais adequadas ao 5º ano)

Para reforçar a idéia de sextos e oitavos, podemos usar também o que chamamos pratos ou caixas sextavados, ou oitavados. A parte acentuada representa 1 sexto da caixa.



- Cortar caixas de uma dúzia de ovos em duas, três, quatro e seis partes iguais e verificar quanto vale meia dúzia, 1 terço de dúzia, 1 quarto e 1 sexto de dúzia.

- Observar as janelas da sala e ver se elas estão divididas em partes iguais. Se isso ocorrer, ver que nomes têm as partes que aparecem: meio, terço, oitavo etc.

- Quantos meses tem 1 ano? E meio ano? 1 terço do ano? Um sexto do ano? Caso os alunos manifestarem curiosidade a respeito de certas frações unitárias, o termo poderá ser informado:

Aluno: - E se eu divido em 12, como se chama cada pedaço?

Professor: - Combina com 1 oitavo, chama-se 1 doze-avo.

Considerações sobre a construção do sentido numérico

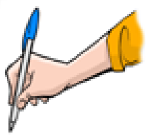
O objetivo 3 da Seção 1 foi de Introdução de uma proposta de construção do conceito de número fracionário pela criança. Antes de passarmos ao objetivo 4, sobre a construção de representações para esses conceitos, pensaremos um pouco mais sobre a idéia de número fracionário envolvida nessa proposta.

Durante as etapas sugeridas, a criança constrói a compreensão das frações e aprende a identificá-las. Em algumas situações, percebe que o resultado expressa uma quantidade e está ligado à idéia de número, em outras, pensa nas frações mais como partes concretas de algum objeto. Quanto mais isoladas e restritas a um único objeto, mais isso ocorre. Quanto mais aparecem associadas aos números naturais e a situações de quantificação, maior será o status de número que terão. Por exemplo, ao falamos de uma estrada que mede 27 ¼ quilômetros, a percepção de número fracionário fica clara.

Do mesmo modo que, para a construção da noção de um número natural - 3, por exemplo - é necessário que a criança perceba algo comum quando pega coleções com 3 elementos, também para a construção de um número fracionário – 1/3, por exemplo, é necessário que a criança perceba algo comum quando vê 1/3 da folha de papel, 1/3 do bolo, 1/3 da dúzia de ovos. Essa percepção do algo comum – que conduz à abstração da noção do número associado àquelas situações – é mais fácil nos naturais do que nas frações. Isso porque, nos números naturais, a correspondência biunívoca entre as coleções é mais visível, traduzida por expressões como "o mesmo tanto". Ela aprende a ver, com poucos anos, se há o mesmo tanto de garrafas e de tampas, ou se existe o mesmo tanto de cachorros e de crianças num desenho, aprende também a ver pequenas quantidades de bolinhas e a pegar o mesmo tanto de peças de um jogo. A correspondência se dá entre conjuntos discretos. Nas frações, o processo correspondente é o de perceber que "representam a mesma parte" de um todo. A correspondência pode ser entre uma parte contínua de um todo e uma parte contínua de outro todo (1/3 da maçã e 1/3 do bolo) ou entre uma parte contínua de um todo e uma parte discreta de outro todo (1/3 do bolo e 1/3 da dúzia de ovos). A dificuldade maior na abstração é facilmente vista em jogos análogos, nos números naturais e nos fracionários. Por exemplo, nos números naturais pode-se trabalhar com um dominó de juntar a peça que tem o mesmo tanto (quantidades até 3, 4, ...10 ou 12, conforme a idade). As figuras são diferentes, em forma e em tamanho. As crianças não têm dificuldade em juntar uma parte que tem um sol bem grande com outra parte que tem uma pequena mosca, nem em juntar 2 garrafas com dois grãos de milho. O dominó correspondente para frações, em que a criança deverá juntar peças que expressam "a mesma parte" do todo, oferece maior dificuldade. Ela poderá juntar, por exemplo, 1/3 de queijo redondo com 1/3 de chocolate (o tamanho original do chocolate fica evidenciado pelo invólucro) ou com uma caixa de ovos com 4 ovos.

É necessário um trabalho do professor para estimular essa associação. Para Cotosk, V. (1998), a percepção da relação entre a parte tomada e o todo, interpretada, *"reiteradamente, em variados contextos concretos é que vai, a nosso ver, engendrar a percepção de p/q como algo independente das concretudes consideradas. Quando dividimos uma dúzia de laranjas em quatro partes iguais e tomamos três dessas partes, ficamos com 9 laranjas. Mas o que vai instigar a concepção de 3/4 como um número não é o 9 em si, mas a porção da dúzia que o 9 representa. Essa é que é a novidade a ser trabalhada como um desafio à percepção da criança: 3/4 de um segmento deve ser enfatizado não só como o segmento resultante da operação de dividir o total em 4 partes e tomar 3 delas, mas também e principalmente como a porção do todo que esse segmento menor representa. Isto exige um olhar simultâneo para o segmento menor e o todo."*

A contagem é outro procedimento usual nos números naturais que pode ter um análogo para os números fracionários, contribuindo para dar um sentido de número às frações. Como exemplo, o processo de contar de ½ em ½, percebendo a formação de quantidades inteiras. Expressando essas seqüências os alunos percebem a ordenação e conseguem fazer comparações entre números – digamos, entre 2 e 3 ½ - num outro nível, independentemente de terem que visualizar representações concretas para cada um



Atividade 3

Professor ou professora: Pegue um livro de 3ªsérie e abra no início do capítulo de frações. Observe as duas primeiras páginas desse capítulo

a) Anote todas as frações que estão sendo mencionadas nessas duas páginas e os símbolos introduzidos para elas. Anote também toda a nomenclatura específica de frações que foi introduzida.

b) Pesquise no livro se o autor havia explorado anteriormente qualquer das coisas anotadas.

c) Você considera que, só com o trabalho dessas duas páginas, a criança construirá realmente, de maneira sólida, a idéia das frações que estão sendo exploradas?

d) E se o aluno já tivesse passado por um longo período de familiaridade e exploração dessas frações, como descrevemos acima, sua aprendizagem daquelas duas folhas poderia ser diferente? .

Observação: Junte o xerox das duas páginas à resolução da Atividade.

Objetivo 4 - Apresentar uma proposta de introdução da representação numérica associada às frações

Frações unitárias

Os alunos referem-se com facilidade às frações unitárias e é natural que aprendam a representar inicialmente tais números.

Usando essa representação mais extensa, eles conseguirão expressar suas estratégias e resultados com maior segurança:

Eu comi três pedaços de $\frac{1}{5}$ do bolo e ainda sobraram dois pedaços de $\frac{1}{5}$.

Se eu tenho 5 pedaços de $\frac{1}{8}$ da pizza, preciso de mais 3 pedaços desses para formar uma pizza inteira.

Essa fase de nomear tantos de $\frac{1}{4}$, tantos de $\frac{1}{8}$ é importante para a aquisição de maior facilidade no reconhecimento, formação de imagens mentais e raciocínio com relação às frações.

Também surgirão expressões como:

$\frac{1}{2}$ mais 2 de $\frac{1}{4}$ formam uma coisa inteira.

Se o aluno tiver clareza sobre o significado de cada uma dessas frações, sabendo usar seus nomes para designar partes que aparecem no cotidiano, então a introdução de alguns símbolos - começando pelos que designam frações unitárias - não será mais um obstáculo à sua compreensão.

Assim mesmo, cuidados deverão ser tomados. Um bom início será introduzir o registro numérico $\frac{1}{2}$. Não é difícil achá-lo, principalmente em receitas culinárias.

Pudim de Pão

Ingredientes:

1 xícara de cubinhos de pão de forma

1 ovo

1 colher (de sopa) de manteiga ou margarina derretida

1/2 de xícara de passas

2 colheres (de sopa) de açúcar mascavo

1/2 colher (de chá) de canela em pó

1 xícara de leiteh

Modo de Preparar:

Aqueça o forno em temperatura moderada .

Coloque os cubinhos de pão numa forma refratária com capacidade para 2 e 1/2 xícaras. Bata o ovo ligeiramente com um garfo, junte a manteiga, o leite, o açúcar mascavo, a canela e as passas. Despeje sobre os cubinhos de pão. Asse até que, enfiando uma faca entre a borda e o meio, esta saia limpa.

Sirva morno. Para 2 pessoas.

O aluno deverá familiarizar-se com o uso do símbolo $\frac{1}{2}$, por cerca de um mês. Deverão observar manchetes de jornais ou outro material que contenha essa representação. Depois disso, poderão conhecer $\frac{1}{4}$ = 1 quarto e $\frac{1}{8}$ = 1 oitavo.

Nesse ponto, eles começam a fazer inferências.

Percebem que, quando pegavam 1 quarto, haviam dividido a unidade em 4 partes iguais – e o 4 está aparecendo na representação do 1 quarto.

Percebem que, quando pegavam 1 oitavo, haviam dividido a unidade em 8 partes iguais – e o 8 está aparecendo na representação do 1 oitavo.

Começam a fazer suposições, a achar que, na escrita do 1 décimo, deverá aparecer 1 em cima e 10 embaixo. Esses raciocínios devem ser encorajados. A generalização deve vir da parte dos alunos, segundo o ritmo de sua aprendizagem. Ao fazerem essa generalização, os alunos estarão percebendo uma função histórica do denominador, comprovada pela própria etimologia da palavra:

Denominador – o que denomina, dá nome à fração.

Entretanto, é importante notar que tal denominação origina-se de um fato matemático – o número de partes em que um objeto inteiro foi dividido.

Desse modo, após cerca de mais um mês, os alunos estarão familiarizados com as representações das frações unitárias, não tendo dificuldade em lê-las:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{7}$$

Se os denominadores são maiores que 10, teremos a terminologia avo ou avos. Mas a representação não causa maior problema: se um todo foi dividido em 15 partes, represento por $\frac{1}{15}$ e leio 1 quinze-avo.

Da fração unitária ao numerador qualquer

Essa fase prepara e facilita a representação de múltiplos pedaços de uma mesma fração unitária, sobre a qual os alunos podem manifestar certa curiosidade. Eles podem pensar: 2 de ¼ são 2 quartos, tem um jeito de escrever isso?

Teremos uma passagem, de natureza simbólico-representacional:

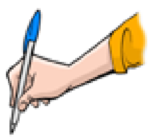
Modo de escrever por extenso	**Pode ser substituído por**
3 de $\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2 de $\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Com esse desenvolvimento, é comum os alunos conservarem o costume de ler $\frac{3}{8}$ como 3 de $\frac{1}{8}$.

Isso não tem importância, pois trata-se de uma interpretação correta, que faz mais sentido para o aluno. Aos poucos, ele adquire a terminologia correta.

Esse modo de descrever, usando frações unitárias, é um pouco mais fácil do que aquele que a escola ensina, pois não exige a coordenação simultânea de dois números - o que indica em quantas partes foi dividido e o que indica quantas foram tomadas - para compor um terceiro. Após essa fase, em que o aluno descreve, por extenso, quantas frações unitárias está vendo, temos um próximo passo de natureza verbal.

Atividade 4



Ao longo da História, diversas culturas representaram frações de vários modos. Pesquise na Internet sobre alguns modos que existiram, principalmente entre os maias e os egípcios.

Quantidades fracionárias que envolvem mais do que uma unidade

Os alunos já sabem que, com 4 quartos, formam 1 unidade. O professor pode questionar quantas unidades formam com 9 quartos, e se ainda sobra algum quarto.

Os alunos deverão pensar, discutir entre si e concluir, sozinhos, que com 9 quartos dá para formar duas unidades e ainda sobra 1 quarto.

Se tiverem uma quantidade como 27 doze avos, o professor ou professora deverá questionar: e com esses doze avos, quantas coisas inteiras dá para formar?

Levar os alunos a perceberem que precisam juntar de doze em doze, para ir formando as unidades. Perceberão logo que, juntando 12, formam uma unidade, e, juntando mais 12, formam outra unidade, e até aí já gastaram 24 doze avos. Ainda sobram 3, que não dá para formar uma unidade. Entenderão que 27 doze avos é o mesmo que 2 unidades e 3 doze avos.

Mais tarde, ou com números maiores, eles poderão usar a divisão para saber quantos grupos de 12 pedaços conseguem fazer. Saberão que o resto significa o número de pedaços (doze avos) que sobram.

Um problema com muitas pizzas e muitas pessoas

24 pessoas foram juntas a uma pizzaria e pediram 18 pizzas. Não há uma mesa onde possam sentar todas juntas. Como distribuir as pessoas e as pizzas em mesas menores, de modo que todos possam comer igualmente? (Adaptado de Streefland, mencionado em Nunes e Bryant (1997), p. 214).

O texto comenta que os alunos podem tentar arranjos diferentes: se eles usarem duas mesas, serão 12 crianças e 9 pizzas em cada; se usarem 3 mesas, 8 crianças e 6 pizzas em cada; caso usem 4 mesas, terão 6 crianças em cada e precisarão cortar algumas das pizzas pela metade e ter 4 pizzas e meia em cada mesa.

Nesse problema, aparece a idéia de razão:

9 pizzas para 12 crianças é o mesmo que

6 pizzas para 8 crianças, que é o mesmo que

4 e meia pizzas para 6 crianças, que é o mesmo que

3 pizzas para 4 crianças, que é o mesmo que

1 pizza e meia para 2 crianças, que é o mesmo que

.... de pizza para 1 criança.

Como dividir uma pizza e meia por 2? Tente, mas sem usar contas decoradas.

Observe que, em qualquer caso, foram 3 quartos de pizza para cada pessoa. Comilões, não é?

Comentário aos professores

No problema, temos uma relação entre o número de pizzas e o número de pessoas.

18 para 24

9 para 12

6 para 8

3 para 4

Costuma-se chamar essa relação de razão. A razão inicial era 18 para 24. Nas divisões entre as mesas, essa razão não mudou, embora tenha sido expressa por outros números. Por que sabemos que não mudou? Podemos argumentar que 3 pizzas para 4 pessoas é o mesmo que 6 pizzas para 8 pessoas, ou 9 para 12 etc

Mas como podemos ter certeza que essas razões não mudaram?

Lembram-se que, ao final, concluímos que seriam ¾ de pizza para cada pessoa? Pois é. Essa fração está associada com todas as razões descritas. Vejam de que modo: dividindo-se os dois números que apareciam em cada razão, um pelo outro, dá sempre essa mesma fração.

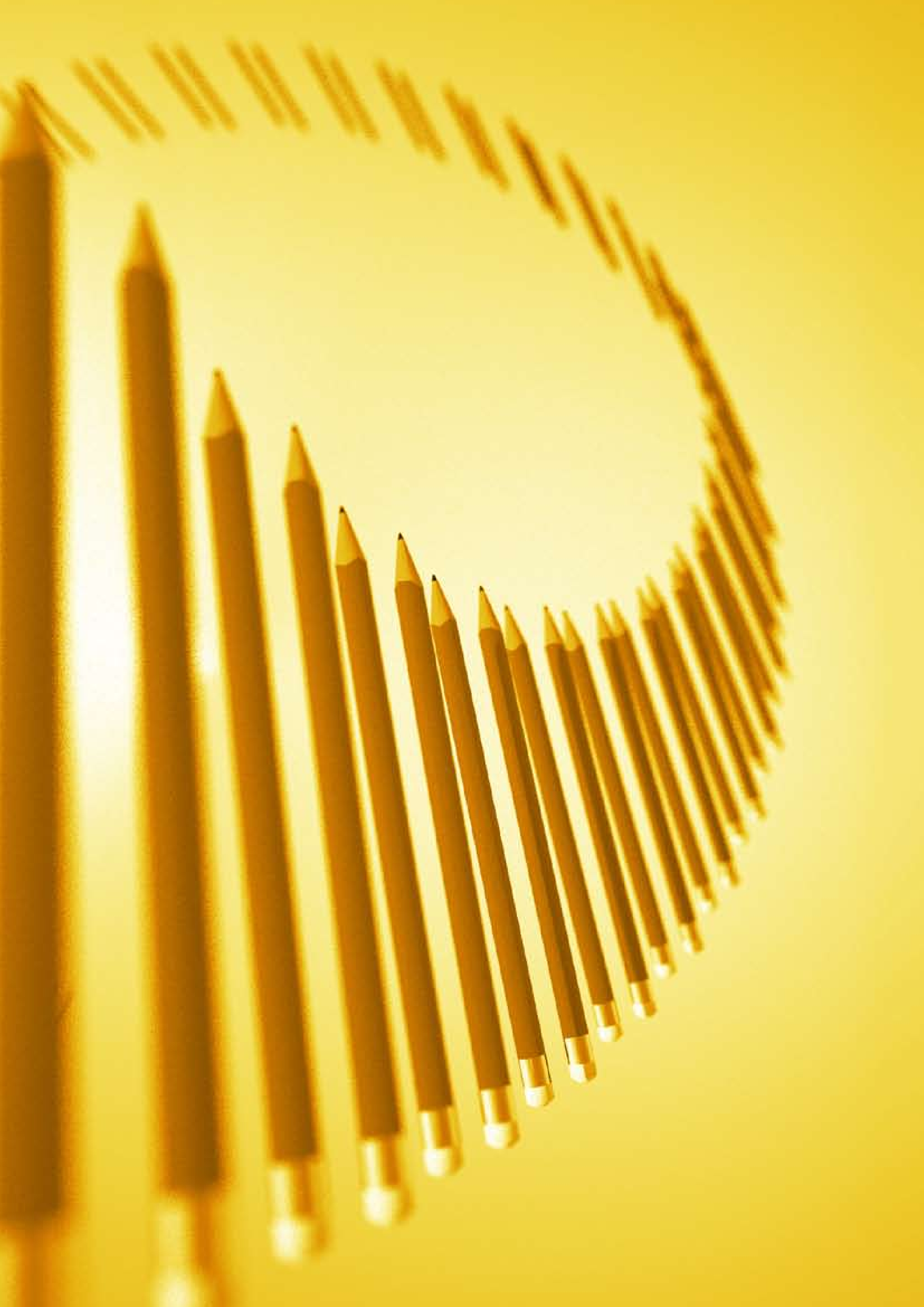
$$18 \div 24 = 9 \div 12 = 6 \div 8 = 3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

Essa fração significa o seguinte: em qualquer das razões, o número de pizzas é igual a ¾ do número de pessoas.

Razões não são um assunto muito simples, mas problemas que as envolvem podem e devem ser trabalhados com as crianças. Voltaremos ao tema na Seção 3.

Todos os problemas já apresentados conduzem a estratégias próprias das crianças. Alguns deles não pedem, propositadamente, uma informação numérica, que pode bloquear o raciocínio. Em vez disso, perguntam pela maneira como a situação pode ser resolvida, o que estimula muito mais a criança a pensar.

Observação: Junte o xerox das duas páginas à resolução da Atividade.



2 Introduzindo as idéias de operações com os números fracionários nas séries inicias do ensino fundamental

Objetivos:
- apresentar novas tendências curriculares;
- apresentar as propostas dos PCN´s, referentes ao ensino e à aprendizagem de números racionais na forma fracionária;
- introduzir cálculos com frações, centrados em situações-problema associadas ao contexto cotidiano, que possibilitem ao aluno consolidar a idéia de fração, de número fracionário e de suas relações.

Objetivo 1 - Novas tendências curriculares

Não há como perder de vista que este fascículo destina-se à formação básica, em nível superior, de professores das séries iniciais. Do ponto de vista de capacitá-los para o ensino e a aprendizagem dos números fracionários, é preciso refletir sobre o que é relevante a esse processo - quais são as tendências gerais em Educação Matemática, em particular sobre os números fracionários, e no que se fundamentam; quais são as diretrizes a respeito desse ensino, nos PCN´s; e qual a linha de desenvolvimento do ensino e aprendizagem desse tópico que adotaremos.

Mudanças na concepção de educação matemática têm causado alterações nos currículos de matemática de vários países, que passaram a privilegiar a competência na inventividade de processos de resolução, mais do que na apresentação de resultados. Isso diz respeito, diretamente, à construção significativa das operações e de estratégias para resolvê-las. A criação de processos revela o raciocínio, a capacidade criativa de estabelecer relações, fazer hipóteses e testá-las, experimentar e comprovar. A apresentação do resultado, muitas vezes, relaciona-se ao domínio de uma técnica para resolver aquele problema específico. A prioridade para a criação de processos relaciona-se diretamente com a preparação para a vida profissional no mercado atual.

Em Romberg, (1995) p. 94, encontramos, em capítulo de autoria de Jan de Lange: "Durante experimentos na Holanda ao longo da última década, ficou claro que a matemática no novo currículo é não-algoritmica, tem múltiplas soluções, envolve incerteza e necessidade de interpretação". O que significa que ficaram para trás: a ênfase nos processos operatórios mecânicos, os problemas sempre com soluções únicas, a infalibilidade dos cálculos e a crença total nas técnicas e nos resultados, onde se dispensava qualquer interpretação.

Por outro lado, o contexto da vida real passou a ter um papel especial nas novas tendências de educação matemática, seja na resolução de problemas, ou como ponto de partida para o desenvolvimento de idéias e conceitos matemáticos.

Objetivo 2 - Os PCNs e os números racionais na forma fracionária (até a 4ª série)

Em nosso país, essas idéias permeiam os Parâmetros Curriculares Nacionais, que devem nortear as propostas curriculares estaduais e locais. Destacamos de lá algumas frases relevantes, relacionadas ao ensino e à aprendizagem das frações. Constam entre os objetivos do 2º Ciclo do Ensino Fundamental:

- Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social

Sob o título Conteúdos de Matemática para o Segundo Ciclo temos:

- Neste ciclo, são apresentadas ao aluno situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal (página 83).

No item Conteúdos Conceituais e Procedimentais, do mesmo ciclo, temos:

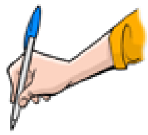
Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso freqüente (página 86).

Nas Operações com Números Naturais e Racionais aparece um item referente à adição e subtração de números racionais na forma decimal, sem o item correspondente para a representação fracionária. Também no item Orientações Didáticas sobre as Operações com Números Racionais (páginas 124/125), não há referência ao cálculo de racionais na forma fracionária.

Em síntese, de acordo com os PCN´s, o desenvolvimento de frações até a 4a série deve centrar-se nas idéias associadas ao número fracionário, e na leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso freqüente.

Ao nosso ver, não há como dissociar essas competências da resolução informal de situações-problema, por meio de operações intuitivas com esses números.

Atividade 5



Se você dá aulas na 4ª série, responda você mesmo. Se não dá, peça a um colega que esteja lecionando nessa série, para responder às questões:

a - Você conhece o programa sugerido pelos PCNs para o tema números fracionários (ou racionais positivos), até a 4ª série?

b - Os capítulos sobre esse assunto (frações e números fracionários), no livro que você adota ou toma como referência, estão de acordo com o que é proposto nos PCNs? Cite os pontos de convergência e os de divergência. Mencione o nome do livro, do autor e ano de publicação.

c - O programa que você desenvolve sobre esse assunto em sala de aula está de acordo com os PCNs? Cite os pontos de convergência e os de divergência.

Objetivo 3 - Introduzir cálculos com frações, centrados em situações-problema

As considerações introdutórias que fizemos, baseadas tanto em estudos internacionais quanto nacionais, sustentam a linha de desenvolvimento que adotaremos no ensino e aprendizagem do cálculo inicial com frações.

A proposta que desenvolveremos relativa ao ensino e aprendizagem do cálculo com frações, centra-se nas seguintes características:

- *Início sem algoritmos usuais e com pouca notação formal;Inserção num contexto de realidade;*
- *Desenvolvendo a inventividade dos processos de resolução;*
- *Desenvolvendo o raciocínio, a capacidade de estabelecer relações, de fazer hipóteses e testá-las, de experimentar e comprovar;*
- *Desenvolver problemas e processos aos quais os alunos possam atribuir significados;*
- *Interpretando problemas e processos;*
- *Explorando problemas com múltiplas soluções ou sem soluções.*

Professor e Professora

Vocês verão, por meio de situações e atividades, como o cálculo operatório com frações pode ser introduzido, respeitando as características que citamos, fundamentadas nas concepções atuais de educação matemática e nas tendências curriculares atuais.

Famílias de frações

Apresentaremos as operações, inicialmente, concentradas em famílias de frações:

Meios – quartos – oitavos

Terços – sextos – doze avos

Quintos – décimos – vinte avos

Em cada uma das famílias, as operações evidenciam as relações entre as frações correspondentes, possibilitando ao aluno consolidar a idéia de frações, de números fracionários e de suas relações.

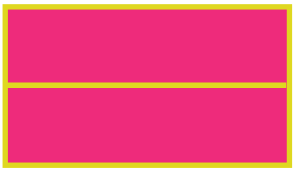
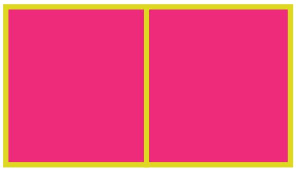
Após o trabalho com famílias, apresentaremos considerações mais gerais sobre as operações, mas ainda de modo não algorítmico, num contexto significativo para o aluno, e desenvolvendo a inventividade dos processos de resolução.

Se você resolver essas atividades, ou aplicá-las a seus alunos, estará descobrindo que há muitas maneiras de ver as frações e os números fracionários e poderá constatar, também, vários modos de pensar que os alunos têm.

Observação: Como os números fracionários já foram introduzidos em situações significativas e contextuais,poderemos representá-los aqui de modo mais abstrato, por figuras geométricas divididas, tendo em vista uma revisão rápida de relações. A parte desse fascículo referente a famílias de frações foi adaptada de PROFORMAÇÃO (1998).

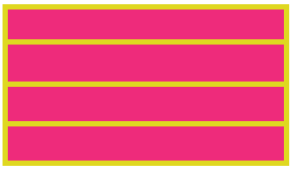
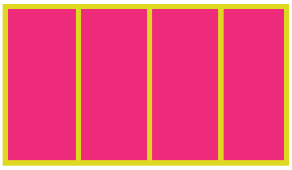
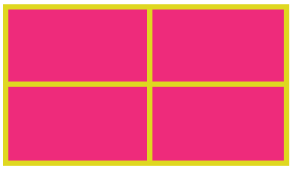
Meios, quartos e oitavos

Veja que há modos diferentes de se obter meios, ou metades de uma folha, conforme o jeito que se corta:

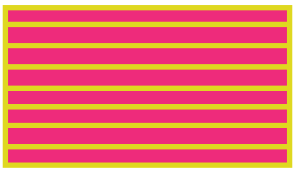
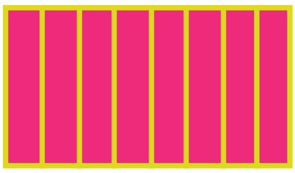
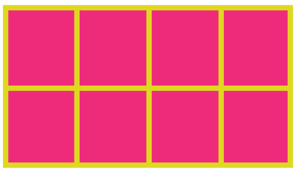



Quando temos metades, dividindo-se cada uma ao meio, a folha fica dividida em 4 partes iguais – 4 quartos.

Também há vários modos de se dividir uma folha em 4 partes iguais. Em qualquer um desses casos, obtém-se quartos da folha. Um quarto da primeira folha vale o mesmo que um quarto da segunda ou da terceira, embora pareçam diferentes:

Dividindo-se cada quarto ao meio, a folha fica dividida em 8 partes iguais – 8 oitavos. Veja que também há vários modos de cortar oitavos da folha. Todos eles valem igualmente. O que se gasta de papel em um deles, é o mesmo que se gasta em qualquer dos outros. Se for um chocolate, tanto faz você comer um pedaço da primeira barra, ou da segunda, ou da terceira:

Veja que fizemos várias divisões com a folha de papel:

1 folha $\div$ 2 partes iguais = $\frac{1}{2}$

Meia folha $\div$ 2 partes iguais = $\frac{1}{4}$

1 quarto de folha $\div$ 2 partes iguais = $\frac{1}{8}$

Fazendo operações envolvendo meios, quartos e oitavos

Usando apenas seu conhecimento das frações meio, quarto e oitavo, e sem usar regras para operações, coloque os resultados:

a) $\begin{array}{r} \frac{2}{2} \\ + \frac{1}{2} \\ \hline \dots \end{array}$ b) $\begin{array}{r} \frac{5}{4} \\ - \frac{1}{4} \\ \hline \dots \end{array}$ c) $\begin{array}{r} \frac{1}{4} \\ 3 \times \\ \hline \dots \end{array}$

1/2 cocada | 2 partes   ¾de doce | 3 crianças   6/8 de bolo | 2

Duas metades formam 1 inteiro (ou uma unidade): $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Dois quartos formam uma metade: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Dois oitavos formam 1 quarto: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Com multiplicações, podemos escrever essas somas assim:

$2 \times \frac{1}{2} = 1$ $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

A exploração da família meio-quarto-oitavo, centrada em divisões sucessivas, evidencia a propriedade de que "quanto mais dividimos certa coisa, menor fica". Ou seja, ela propicia a compreensão da relação inversa entre o número de partes e seu tamanho. Dessa maneira, a criança passa a reconhecer prontamente que 1/8 é menor do que ¼ porque "dividiu em mais partes".

Fração como divisão

Esse é um aspecto pouco explorado na escola. Poucos alunos conseguem perceber que as frações (como partes de uma unidade) podem ser vistas como resultados de divisões de um certo número de unidades em partes iguais:

$\frac{2}{5} = 2 \div 5$ $\frac{3}{7} = 3 \div 7$

Portanto, o número fracionário 2/5 expressa o resultado da divisão do número natural 2 pelo número natural 5. Também se pode expressar o resultado dessa divisão na forma decimal: $2 \div 5 = 0{,}4$.

Os dois resultados : 2/5 e 0,4 são iguais. São a representação fracionária e a representação decimal de um mesmo número racional.

Terços, sextos e doze-avos

Também é interessante, em certo momento, trabalhar de modo conjunto com esses três tipos de frações.

Se dividirmos uma unidade em 3 partes iguais, ou de mesmo valor, cada uma recebe o nome de 1 terço e é representada por $\frac{1}{3}$.

1 terço	1 terço	1 terço

Também poderíamos ter dividido horizontalmente, obtendo tiras fininhas. Valeria o mesmo que o terço representado na figura apresentada.

Veja outra maneira curiosa de se dividir uma folha em três terços.

Primeiro marcamos o terço da direita. O que sobra vale, portanto, 2 terços. Dividindo-o ao meio, como quisermos, aparecem dois pedaços de 1 terço, que valem tanto quanto o primeiro terço.

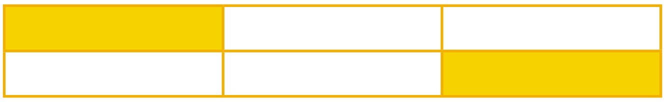
<table>
<tr><td rowspan="2">1 terço</td><td>1 terço</td></tr>
<tr><td>1 terço</td></tr>
</table>

Vamos prosseguir nas divisões. Pegue o terço da esquerda e divida-o ao meio.

E agora? Quantos desses pedaços são necessários para encher a figura? Como são dois pedaços para cada terço, serão necessários 6 para a unidade toda. Quando seis pedaços iguais formam a coisa toda, cada um chama-se 1 sexto. Você viu que 1 sexto é metade de 1 terço.

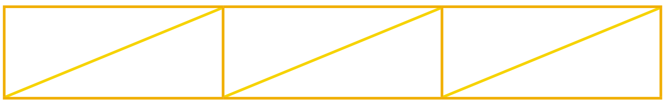
1 sexto	1 sexto	1 sexto
1 sexto	1 sexto	1 sexto

Podemos tomar algumas dessas partes. Por exemplo:



A parte colorida representa 2 sextos da figura.

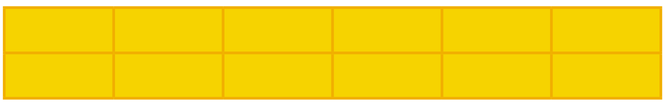
Outro modo de dividirmos os *terços* ao meio:



Cada triângulo desse vale 1 sexto da figura

Continuando a dividir ... Se dividirmos 1/6 ao meio:

Veja que precisaremos 2 pedacinhos para cobrir 1 sexto, portanto 12 para encher toda a figura. Por isso a metade do sexto chama-se 1 doze-avo.



Dividindo-se todos os sextos ao meio teremos 12 partes, cada uma chamada 1 doze avo e representada por $\frac{1}{12}$.

Fazendo operações envolvendo terços, sextos e doze avos

a) $\frac{3}{6}$ é mais ou menos que $\frac{1}{2}$?............................

b) Se já tenho 2/3 , quantos sextos preciso para formar 1 inteiro?...........................

c) $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} =$ ....

d) $1 - \frac{1}{3} =$ ....

e) $\frac{2}{6} \times 3 =$ ....

1 /3 | 2 partes

6/6 | 3 crianças

9/12 | 3 crianças

Explicações claras para o professor, mas obscuras para o aluno

Repetidas vezes, temos visto alunos formularem dúvidas que o(a) professor(a) responde prontamente mas os alunos permanecem sem entender. Por exemplo, um aluno queria saber se :

- "tomando um pedaço igual a 1/7, e dividindo essa fração ao meio, a nova fração obtida será igual a 1/14?"

O professor disse algo como É claro que sim. Em seguida desenhou prontamente no quadro uma unidade dividida em sete partes, dividiu todas ao meio, com um único risco, e disse: viram? Ficamos com quatorze avos.

As crianças ficam paradas, olhando, sem reagir. Claramente não compreendem o que foi feito. Em parte, porque só queriam saber se 1/7 (apenas um sétimo) dividido ao meio dava 1/14. Não queriam tomar 7 sétimos e, muito menos, dividir todos ao meio. De repente apareceu uma unidade toda, cheia de sétimos e com muitos quatorze avos. Não entenderam.

Outra observação: dizer é claro que sim gera certa reação no aluno - porquê ele próprio não viu algo tão fácil? Evitará fazer novas hipóteses ou perguntas.

Ressaltamos, novamente, que o estudo das "famílias" realça a relação inversa entre o número de partes em que a unidade é dividida e o tamanho de cada parte.

Quintos, décimos e vinte-avos

Como nos casos anteriores, dedicar alguns dias ao trabalho com essas frações fará os alunos perceberem melhor as relações entre elas.

Dividindo-se uma unidade em 5 partes iguais, ou de mesmo valor, cada uma recebe o nome de 1 quinto e é representada por $\frac{1}{5}$. Se tenho quintos, juntando 5 deles, formo a unidade. Dividindo-se cada quinto ao meio, a unidade fica dividida em 10 partes iguais, cada uma chamada 1 décimo e representada por $\frac{1}{10}$.

1 quinto	1 quinto	1 quinto	1 quinto	1 quinto

1 décimo	1 décimo	1 décimo	1 décimo	1 décimo
1 décimo	1 décimo	1 décimo	1 décimo	1 décimo

Juntando-se 10 décimos, será formada a unidade toda.

Dividindo-se cada décimo ao meio, a unidade ficará dividida em 20 partes iguais, cada uma denominada 1 vinte avo.

É importante que esses esquemas de representações tenham sido precedidos de manipulações mais concretas. Já sugerimos, na Seção 1, mostrar que um litro de água pode ser dividido em 5 copos de água (do tipo comum, ou americano), e depois dividir a água de cada um dos 5 copos em duas partes iguais. Desse modo vamos obter, ao todo, dez meio copos. Isso permite dizer que:

a) Cada copo comum corresponde à fração _____ de litro.

b) Meio copo comum corresponde à fração _____ do litro.

Fazendo operações envolvendo quintos, décimos e vinte avos

a) O bolo está dividido em 2 metades. Uma metade está dividida em 5 fatias iguais. Cada fatia vale 1 .... do bolo.

(Repare: 5 fatias formam metade do bolo, 10 fatias formam o bolo todo. Logo cada fatia vale 1 décimo).

b) $1 \text{ e } \frac{2}{10} + 2 \text{ e } \frac{4}{10}$ = ...

c) $1 \text{ e } \frac{4}{10} + 2 \text{ e } \frac{8}{10}$ = ...

d) $\frac{9}{10} - \frac{3}{10}$ = ...

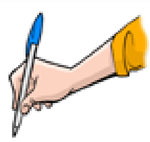
Repare que em c) obteremos 3 e 12/10, o que poderá ser escrito 4 e 2/10.

e) 1 inteiro $- \frac{2}{10}$ = ...

f) $\frac{2}{10} \times 3$ = ...

g) $\frac{1}{5} \div 2 =$ ____ ....

Atividade 6



Cite algumas vantagens e desvantagens do trabalho com famílias de frações.

Situações aditivas-subtrativas

Resolvidas por métodos próprios e registros livres, fundamentadas na compreensão das quantidades fracionárias e de suas relações.

As situações e problemas propostos devem considerar o campo conceitual aditivo-subtrativo, do mesmo modo como foi feito com os números naturais. Essas atividades visam consolidar a idéia de frações e números fracionários, por meio de seu uso em situações do cotidiano, que exigirão reflexão sobre o significado das partes que aparecem nas situações e dos números associados a elas.

Não há um modo de se "ensinar" a resolver essas atividades. Elas deverão ser apresentadas aos alunos para que as resolvam por estratégias próprias, calcadas em sua compreensão do número fracionário. Os registros também devem ser livres, usando palavras, desenhos, esquemas, com ou sem símbolos numéricos.

Situações ligadas ao campo aditivo-subtrativo

1 - Para fazer um leite batido, foram misturados:

Meio litro de leite

1 quarto de litro de suco de laranja

1 quarto de litro de suco de acerola

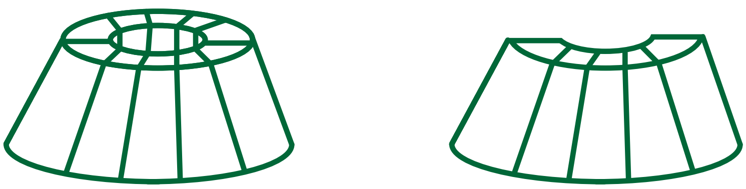
Quantos litros de leite batido foram feitos?

Solução 1 (mental)	**Solução 2**	**Solução 3**
1 quarto + 1 quarto é igual à metade (ou meio) Meio + meio dá um litro todo	1 quarto + 1 meio + <u>1quarto</u> <u>metade</u> Metade 1 (inteiro)	¼ + ½ + <u>¼</u> <u>½</u> 2/4 = ½ 1

Você consegue imaginar mais uma solução, diferente da usual?

Repare: *Esse problema envolve uma situação associada à idéia de combinar dois estados para obter um terceiro, mais comumente identificada como ação de "juntar". (Na verdade, combinamos 3 estados para achar um quarto).*

2 – A mãe dividiu o bolo inteiro em 10 fatias iguais. Depois do lanche sobrou meio bolo. Quantos décimos do bolo foram comidos?



Meio bolo, a parte que sobrou, ainda tem 5 fatias. A outra metade, que foi comida, também tinha 5 fatias (ou 5 décimos). Portanto foram comidos 5 décimos.

Outras soluções:

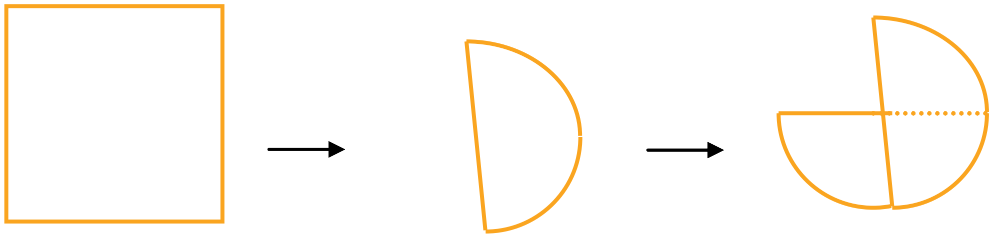
10 décimos – meio bolo	1	→	10 décimos	- *(quantia inicial)*
$\underbrace{\text{10 décimos} - \text{5 décimos}}_{\text{5 décimos}}$	- ½	→	5 décimos	*(quantia final)*
	½		5 décimos	

Repare: Essa é uma situação ligada à idéia de transformação.

Trata-se de uma situação em que a quantidade inicial é conhecida, percebe-se que certa quantidade foi perdida (sem dizer seu valor) e informa-se o estado final. A pergunta busca saber qual a alteração havida, entre os estados inicial e final.

Outra situação ligada à idéia de transformação:

3 – Debaixo do guardanapo havia um pedaço de pizza. Colocaram mais meia pizza sob o guardanapo e, ao tirarem o guardanapo, encontraram um total de 3 quartos de pizza. Quanto de pizza havia inicialmente no prato?



? Havia um pedaço de pizza ...	Colocaram mais meia pizza ...	E ficou um total de 3 quartos de pizza ...

Quanto de pizza havia no prato?

É fácil perceber que havia ¼ de pizza no prato.

Esse resultado pode ser calculado lembrando-se que

Quantia inicial = Total final – O que foi colocado.

3 quartos -	→	3 quartos -	ou	3/4 -
1 meio .		2 quartos		2/4
		1 quarto		1/4

Repare: *Temos a idéia de transformação ou alteração de um estado inicial : a partir de uma quantidade inicial desconhecida, informa-se certa quantia que foi ganha e o resultado final. Pergunta-se pelo valor da quantidade inicial.*

4 - Bebi um litro e meio de água e meu irmão bebeu meio litro mais do que eu.

a) Quanto ele bebeu?

b) Você sabe representar essa conta usando nomes de frações?

c) Você sabe representar essa conta usando símbolos de frações?

Soluções:

a) Por cálculo mental, o aluno logo percebe que meio litro a mais do que 1 litro e meio dão 2 litros.

b) 1 litro e meio + Meio litro = 2 litros   ou

$$\begin{array}{ll} & \text{1 litro e meio} \\ + & \text{meio litro} \\ \hline & \text{1 litro + 1 litro} \quad = \text{2 litros} \end{array}$$

c) $1 \text{ e } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$$\begin{array}{rr} & 1 \text{ e } \frac{1}{2} \\ + & \frac{1}{2} \\ \hline & \underbrace{1 \text{ e } 1}_{2} \end{array}$$

Nas contas representadas verticalmente, podemos verificar registros espontâneos dos alunos, bastante inventivos.

Note-se também que o aluno ainda poderá escrever 1 e ½, ao invés de $1\frac{1}{2}$, pois a primeira representação tem maior significado do que a segunda.

O professor ou professora poderá apenas observar que também se escrever sem o "e": ou seja, pondo-se o 1 e o ½ juntos: ($1\frac{1}{2}$), isso já significa 1 e ½.

Observe: *É uma situação ligada à idéia de comparação.* Conhecida uma quantidade, procura-se outra que vale um tanto a mais ou a menos do que essa.

Outras situações ligadas à idéia de comparação seriam: conhecidas duas quantidades, pergunta-se quanto uma vale a mais ou a menos do que a outra. Ou pergunta-se quanto falta à menor, para igualar-se à maior.

5 - Diogo mediu sua altura no fim do primeiro semestre e viu que tinha crescido $2\frac{1}{2}$ cm. No decorrer do segundo semestre ele cresceu mais $1\frac{1}{2}$ cm.

O que aconteceu com a altura de Diogo nesse ano?

O aluno deverá somar, de alguma das maneiras já mostradas, ou de outro modo diferente, 2 e meio centímetros com 1 e meio centímetro. Deverá responder que a altura aumentou 4 cm, ou que Diogo ficou 4 cm mais alto, ou que cresceu 4 cm.

Trata-se de uma situações que supõe a compreensão de mais de uma transformação O que se pergunta é sobre o efeito conjunto dessas transformações. Não se informa o estado inicial nem se pergunta pelo estado final.

Do mesmo modo como ocorrem com os números naturais, esses exemplos, envolvendo números fracionários, mostram a variedade de situações aditivas e subtrativas a serem exploradas, ao longo de várias séries. Resolvidas inicialmente por estratégias pessoais, elas devem gradativamente ser associadas, com compreensão, aos algoritmos de soma e subtração que as resolvem.

Apesar dos PCN´s não proporem, entre os conteúdos das séries iniciais, operações com os números na forma fracionária, as situações aditivas e subtrativas apresentadas têm significado para os alunos, podem ser entendidas e contribuem para aumentar sua compreensão das frações.

Situações multiplicativas e de divisão

- Resolvidas por métodos próprios e registros livres, fundamentadas na compreensão das quantidades fracionárias e de suas relações

Multiplicação de um número natural por um número fracionário

Do mesmo modo como ocorre com a soma e a subtração, alguma situações multiplicativas e de divisão poderão ser trabalhadas, nessa fase de escolaridade.

Um exemplo é o de tomar-se um certo número (natural) de vezes uma determinada fração, o que leva a uma soma de parcelas repetidas.

Multiplicações no cotidiano

- Na casa de Luís, eles cozinham 1 ½ xícara de arroz por dia. Durante uma semana, quanto de arroz gastarão?

Os alunos podem imaginar a seguinte situação:

2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6a feira	Sábado	Domingo
1 ½	1 ½	1 ½	1 ½	1 ½	1 ½	1 ½

Precisam, portanto, somar sete vezes a quantia 1 ½. Poderão fazer isso de vários modos, chegando ao resultado 10 ½ . Por exemplo:

$$\left.\begin{array}{ll} 2^{a} \text{ e } 3^{a} & 3 \text{ xícaras} \\ 4^{a} \text{ e } 5^{a} & 3 \text{ xícaras} \\ \text{Sexta e Sábado} & 3 \text{ xícaras} \end{array}\right\} \text{ 9 xícaras}$$

Mais 1 ½ xícara do Domingo, são 10 ½ xícaras.

É importante relacionar esse processo com o que os alunos já aprenderam nos números naturais. Assim, a professora pode perguntar:

Quantas vezes somamos a fração 1 ½ ?

Como podemos representar isso?

Os alunos devem lembrar-se da escrita matemática:

7 x 1 ½ = 1 ½ + 1 ½ + 1 ½ + 1 ½ + 1 ½ + 1 ½ + 1 ½ = 10 ½

- Augusto assistiu três filmes na TV, cada um com duração de 1 ¼ de hora (1 hora e ¼ de hora) cada um. Quanto tempo ele ficou vendo filmes?

a) Resolva do modo que você quiser

b) Você é capaz de representar essa situação com uma multiplicação?

Em a) poderão surgir soluções do tipo: 1 + 1 + 1 = 3
¼ + ¼ + ¼ = ¾

Total: 3 + ¾ (ou 3 ¾)

Ou então:

1 ¼

1 ¼

1 ¼

3 3/4

b) 3 x 1 ¼ = 3 ¾

Professores

Talvez vocês estejam pensando que essa operação poderia ser resolvida, de modo "mais fácil", como: 3 x 1 ¼ = $3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} =$ 3 ¾

Convidamos você a refletir sobre:

- Aprendendo multiplicação por esse processo usual e mecânico, você acha que o aluno percebe que o resultado obtido corresponde à 3 vezes a quantidade 1 ¾ ?

- Aprendendo apenas desse modo, decorado, o aluno terá capacidade de raciocinar e descobrir outros modos de fazer esse cálculo?

Brincando e aprendendo – Idéias para a sala de aula

- Uma atividade que ajuda a perceber a multiplicação de um número natural por uma fração é a contagem, tendo por unidade de contagem aquela fração. Por exemplo: contar de ½ em ½ . As crianças vão dizendo, cada uma na sua vez:

Um meio – dois meios – três meios – 4 meios –

Isso elas fazem quase sem pensar. Mas podemos combinar que, se os meios formarem coisas inteiras, deverão dizer o número das unidades formadas:

Um meio – 1 (inteiro) – 1 e meio – 2 – 2 e meio – 3 - ...

Contextualizando, elas poderão contar "de meia em meia hora":

Meia hora – 1 hora – uma e meia – duas horas – duas e meia – três horas - ...

(Comandar essa contagem movendo os ponteiros de um relógio).

- Os alunos estarão preparados para fazer uma atividades da qual também gostam: preencher, sozinhos, a "tabuada do ½". Alguns dos fatos são:

1 x ½ =

2 x ½ =

3 x ½ =

4 x ½ =

Muitos alunos já colocarão 2 x ½ = 1; 4 x ½ = 2; e também 3 x ½ = 1 ½ .

Mas outros alunos escreverão: 2 x ½ = 2/2; 4 x ½ = 4/2 ; 3 x ½ = 3/2.

Cabe aos professores ressaltarem que todas as respostas estão corretas. Mas não devem perder a oportunidade de coletivizar as várias respostas, pedindo a alguns alunos que digam como pensaram, estimulando perguntas etc.

Outra coisa interessante a trabalhar será a analogia com a mesma tabuada, mas passando a representar as quantidades com números decimais:

1 x 0,5 = 0,5

2 x 0,5 = 1

3 x 0,5 = 1,5 (não ler automaticamente 1 vírgula 5, mas sim um e meio)

4 x 0,5 = 2

- Para uma melhor atribuição de significado à multiplicação de um número natural por uma fração, o professor poderá propor questões como:

3 vezes 1 oitavo .... são 3 pedaços de 1 oitavo. Quanto isso dá? (3 oitavos)

7 vezes 1 nono .... são 7 pedaços de 1 nono. Quanto isso dá? (7 nonos)

Os alunos não têm dificuldade em escrever resultados das multiplicações 3 x 1/8 ou 7 x 1/9.

Escrevendo, os alunos terão oportunidade de perceber regularidades nessas multiplicações.

$$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$7 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Eles poderão perceber que, nessas multiplicações, basta fazer as multiplicações

3 x 1 = 3; 7 x 1 = 7 e escrever as frações, conservando o denominador.

- Como um desafio, o professor poderá propor:

$$119 \times \frac{1}{12} =$$

O resultado dará 119/12. Os alunos sabem que, dividindo 119 por 12, saberão quantos grupos de 12 pedaços (e portanto quantas unidades) conseguem fazer:

$$\begin{array}{r|l} 119 & 12 \\ \hline -\underline{108} & 9 \\ 11 & \end{array}$$

Com 119 doze avos deu para formar 9 grupos de doze doze avos. Cada grupo forma 1 unidade. Sobraram 11 doze avos. Então $\frac{119}{12}$ é o mesmo que $9\frac{11}{12}$.

Professor e Professora

Apesar de, na Seção 1, já termos sugerido o trabalho com frações maiores do que a unidade, ele não deve ficar restrito àquele único momento. A construção das relações entre frações é um processo longo, e devemos constantemente estar buscando a compreensão dos alunos para as mesmas.

Observe que descartamos totalmente o processo apresentado na escola, no qual o professor "ensina" que, para transformar frações impróprias em números mistos, ou para "extrair os inteiros", basta dividir o numerador pelo denominador e escrever o quociente, seguido de uma fração onde o denominador é o mesmo anterior, e o numerador deve ser o resto da divisão feita. É devido a inúmeras regras como essa, onde o aluno não vê lógica nem sentido, que a aprendizagem das frações tem tido tão poucos resultados e tantos problemas.

O aluno poderá também perceber regularidade e fazer inferências relativas à multiplicação de um número natural por uma fração qualquer.

$8 \times \frac{3}{4} = ?$

Conforme noção anteriormente construída, três quartos são 3 pedaços de ¼ ... se eu pegar 8 vezes esses 3 pedaços, quantos pedaços terei?

¾ + ¾ + ¾ + ¾ + ¾ + ¾ + ¾ + ¾

Serão 24 pedaços de ¼. Registrando:

$8 \times \frac{3}{4} = \frac{24}{4}$

(quantas unidades se pode formar com 24 quartos? recisamos de 4 quartos para formar cada uma, logo formaremos 24 ÷ 4 = 6 unidades (sem sobrar nada).

Também aqui o aluno perceberá, com compreensão, uma regularidade:

$3 \times \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$

$7 \times \frac{2}{8} = \frac{14}{8}$

Eles poderão perceber e entender que, nessas multiplicações, basta fazer as multiplicações 3 x 2 = 6; 7 x 2 = 14, e escrever as frações, como acima.

Entendendo divisões envolvendo frações

- Uma divisão que os alunos já podem compreender é dividir por 2 uma quantidade par de uma mesma fração. Por exemplo:

8 sextos ÷ 2

4 quintos ÷ 2

6 décimos ÷ 2

Interpretando como 8 pedaços de 1 sexto, para serem divididos igualmente entre duas crianças, os alunos logo percebem que cada criança ficará com 4 pedaços de 1 sexto, ou 4/6

8 sextos ÷ 2= 4 sextos (se damos 4 sextos a cada uma, gastamos 8 sextos)

4 quintos ÷ 2= 2 quintos (se damos 2 quintos a cada uma, gastamos 4 quintos)

6 décimos ÷ 2= 3 terços (se damos 3 terços a cada uma, gastamos 6 terços)

Outra situação de divisão que os alunos já estarão aptos a compreender é a divisão de uma fração unitária por 2.

Isso porque já terão pleno entendimento de que:

$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{7} \div 2 = \frac{1}{14}$$

As explicações iniciais dos alunos revelam conhecimentos pontuais bem sedimentados. Dizem: *É claro que ½ dividido por 2 dá ¼, porque ¼ é metade de ½!*

Podemos procurar por uma reflexão maior, lembrando que, quando temos ½, *já tínhamos dividido a coisa inteira por 2, e se ainda dividimos o meio por 2*, serão necessários 4 pedaços para formar o todo. Portanto o nome é 1 quarto.

Também aqui o professor poderá fazer desafios:

Vocês sabem quanto é $\frac{1}{25} \div 2 = ?$

Vale o mesmo raciocínio: Tínhamos uma fração (1/25) e precisávamos de 25 iguais a ela para formar o inteiro. Se a dividirmos ao meio, precisaremos de 50 desses novos pedaços para formar o inteiro:

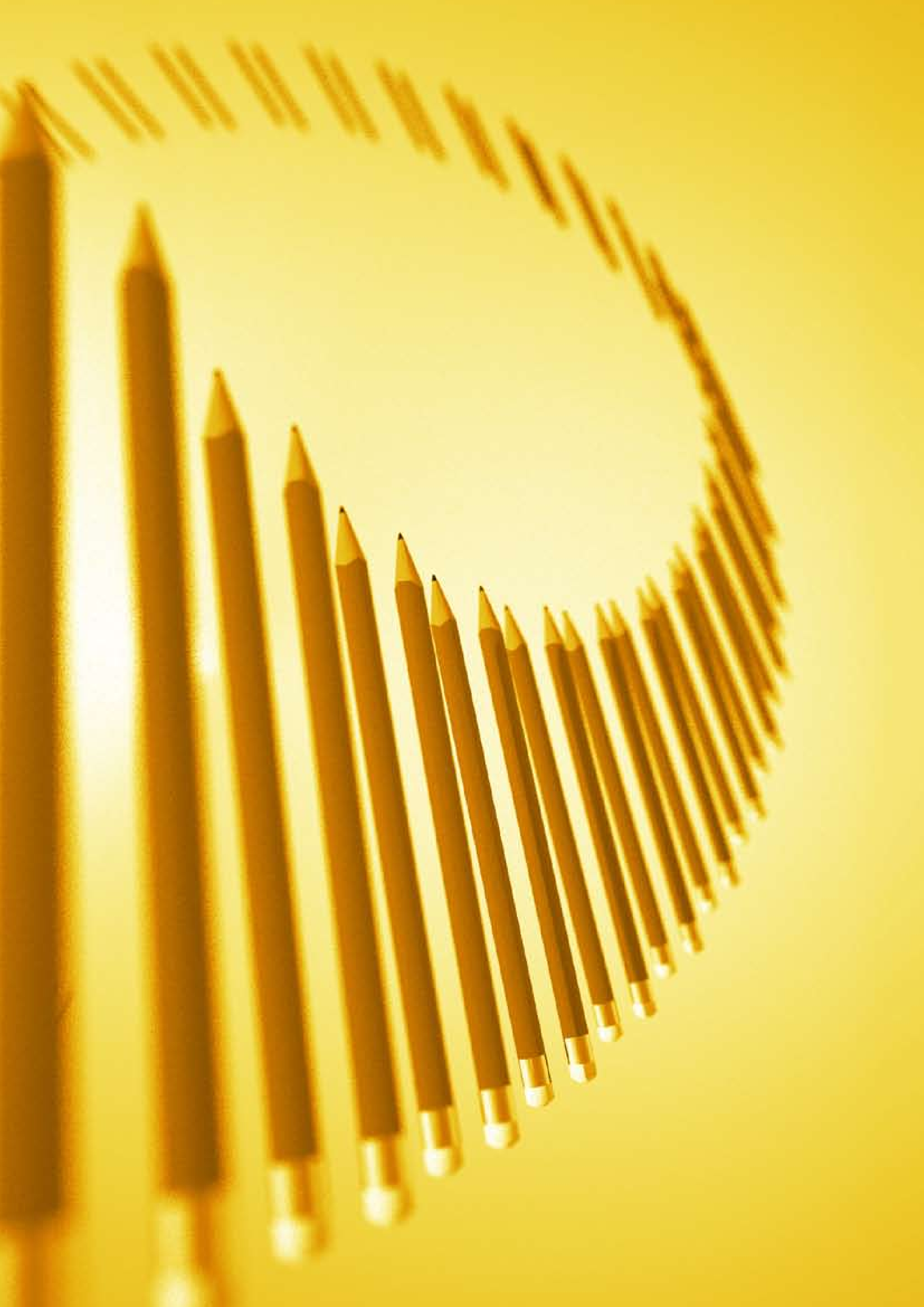
$$\frac{1}{25} \div 2 = \frac{1}{25}$$

Expressando de outra maneira: *Metade de 1/25 é igual a 1/50.*

Olhando para trás

Revendo o que foi feito na Seção 2, vemos que exploramos alguns cálculos básicos com frações compreensíveis para o aluno, até a 4ª série, associados a situações cotidianas. Há, seguramente, outras coisas que ainda poderiam ser desenvolvidas e compreendidas.

Mas também há um espaço de opção do professor, ou da escola: tendo em vista que as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem menos do que aqui desenvolvemos, cabe a cada professor, conhecendo a realidade da sua escola e as necessidades dos seus alunos, ser um ativo participante na definição do plano de ensino da escola. Se o plano já está definido, ele deve ser um ativo conhecedor e debatedor do mesmo, sabendo propor mudanças, conforme necessário.



3 Revendo os conhecimentos do professor sobre números racionais

Objetivos:
- identificar os números fracionários com os números racionais positivos;
- usar e interpretar os números fracionários como profissionais e como cidadãos;
- ter maiores recursos para perceber a dificuldade cognitiva dos alunos na aprendizagem desses tópicos, podendo decidir sobre a adequação de sua inclusão no plano de ensino;
- atender, com maior conhecimento, às demandas de seus alunos.

Professores,

Na Seção 2 desenvolvemos apenas aspectos das frações adequados à aprendizagem e compreensão de alunos até a 4ª série ou 5º ano do Ensino Fundamental.

Esta seção visa ampliar a visão de vocês sobre esses tópicos, incluindo o conceito de número racional, para que possam:

- usar e interpretar esses números como profissionais e como cidadãos

- por meio do aprofundamento de vários aspectos relacionados a esses números, ter maiores recursos para perceber a dificuldade cognitiva dos alunos na aprendizagem desses tópicos, podendo decidir sobre a adequação de sua inclusão no plano de ensino

- atender, com maior conhecimento, às demandas de seus alunos.

No desenvolvimento que faremos nesta seção, estaremos, como antes, em busca da compreensão e atribuição de significados. Vamos estudar melhor eqüivalências e operações com números racionais, relacionar as representações racional e decimal de um número, compreender razões, porcentagens, proporções - assuntos importantes para ajudar negócios e para ficar bem informado.

Objetivo 1 - Aprofundar e sistematizar conhecimentos sobre números racionais

Terminologia a ser usada

Nesta seção, revisaremos alguns termos que vocês já devem conhecer.

Numerador e denominador – são os números naturais que ficam acima e abaixo do traço horizontal, na representação usual de uma fração. Temos ainda:

- na fração pensada como uma relação parte-todo, o denominador é o número que indica em quantas partes a unidades foi dividida. Ele denomina a fração: quartos, oitavos etc. O numerador indica quantas partes dessas foram tomadas - ele numera as partes tomadas.

- na fração pensada como o resultado da divisão de dois números naturais, o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor:

$$\underset{\text{dividendo}}{2} \quad \div \quad \underset{\text{divisor}}{3} \quad = \quad \frac{2}{3}$$

Frações próprias, impróprias e aparentes

Frações próprias: são aquelas que representam quantidades menores do que uma unidade. Exemplos: ½ , ¼, 1/3, ¾ etc

Frações impróprias: são aquelas que representam quantidades maiores do que uma unidade. Exemplos: 3/2, 5/4, 6/4, 18/5 etc.

Frações aparentes: são as que representam um número exato de unidades. Podem ser identificadas com números naturais. Exemplos: 6/6 (igual a 1), 20/5 (igual a 4), 100/20 (igual a 5).

Frações mistas ou números mistos:

São aquelas em que as unidades inteiras aparecem separadas da parte fracionária (que é menor que a unidade). Exemplos: $2\frac{1}{3}$.

A fração mista é sempre maior do que a unidade e pode sempre ser escrita na forma de uma fração imprópria. Para isto, basta verificar quantos terços existem no total. Cada unidade tem 3 terços, logo, nas 2 unidades, existem 2x3=6 terços, mais o terço que está indicado, dará um total de 7 terços. Ou seja:

$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

(Já mencionamos que, na fração mista, está implícita a palavra "e", ou o sinal "+": o número acima deve ser lido como 2 "e" um terço, e pensado como 2 + 1/3).

Um ponto que ficamos de retomar nesta seção é a denominação números racionais. Qual a relação deles com os números fracionários?

Números racionais

Os números fracionários, com os quais temos trabalhado, podem ser identificados com parte do conjunto dos números racionais, isto é, com os números racionais positivos. O conjunto todo dos números racionais inclui outros números, que são os números racionais negativos. É como se o conjunto dos números racionais fosse formado pelos números fracionários, reunidos com o que poderíamos chamar seus opostos (para imaginar o que poderia significar o oposto de um número fracionário, pense na situação: "a temperatura atual é de – ½ grau"). Veja um esquema que nos dá certa visualização do conjunto dos números racionais e a parte desse conjunto identificada com os números fracionários.

Conjunto dos números racionais – uma representação

À direita do zero estão os números fracionários, à esquerda o que chamamos de opostos desses números fracionários:

Números racionais positivos (números fracionários)

...-1/8 –1/7 –1/6 - 1/5 -1/4 -1/3 -1/2 -1/1 **0** 1/1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8 .....

... - 2/7 - 2/5 - 2/3 - 2/1 2/1 2/3 2/5 2/7 3/8...

... - 3/7 -3/5 -3/4 -3/2 - 3/1 3/1 3/2 3/4 3/5 3/7

.

.

Essa é uma representação do conjunto dos números racionais, mas não é a única. Por exemplo, cada um dos números acima, que está escrito na representação fracionária, poderia ser escrito na representação decimal.

Sabemos que os números racionais positivos (fracionários) podem expressar resultados das divisões de dois números naturais. De modo mais geral, podemos dizer que números racionais expressam resultados de divisões de dois números inteiros. Portanto, números racionais são aqueles que podem ser expressos como

$a \div b$, onde a e b são inteiros, e $b \neq 0$. Os resultados dessas divisões podem ser escritos na forma a/b (representação fracionária) ou na forma decimal.

Mas veja uma diferença:

O número 2/5, visto como um número fracionário, é associado às frações equivalentes a 2/5 e representa o resultado da divisão de 2 por 5, de 4 por 10 etc.

O mesmo número 2/5, visto como um número racional positivo, representa o resultado das divisões acima e também representa o resultado das divisões de certos números inteiros negativos: –2 por –5, –4 por –10 etc.

Resumindo

Fração : representa tanto uma parte da unidade quanto o registro numérico associado a essa parte.

Número fracionário: É o número, único (embora com várias representações) associado a toda uma classe de frações equivalentes. Expressa o resultado da divisão de dois números naturais. É um número positivo.

Número racional: são os números que expressam resultados das divisões de dois números inteiros (o segundo não nulo).

Os resultados dessas divisões também podem aparecer na representação decimal.

Os números racionais podem ser positivos, negativos ou nulo.

Inversos e opostos

No quadro dos números racionais, usamos o termo oposto. Todo número racional tem um oposto. O oposto de a/b é o número – a/b. Por exemplo, o oposto de 2/5 é – 2/5; o oposto de – ½ é – (-½) = 1/2. Além disso, todo número racional tem um inverso. Um número multiplicado pelo seu inverso dá 1. O inverso de a/b é b/a. O inverso de 5 é 1/5. O inverso de – 3/7 é – 7/3.

Observação: Muitas das idéias e situações apresentadas a seguir constam em PROFORMAÇÃO (2000).

Frações equivalentes

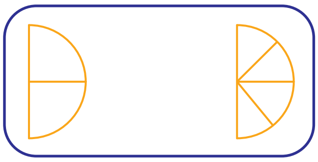
Provavelmente vocês sabem que, multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, obtemos uma fração equivalente à inicial.

Por exemplo, partindo de $\frac{2}{4}$:

$$\frac{2 \quad \text{Multiplique por 2} \rightarrow \quad 4}{4 \quad \text{Multiplique por 2} \rightarrow \quad 8}$$

As frações 2/4 e 4/8 são equivalentes. Vejam o que ocorre:

Quando se multiplica o *denominador* por 2, passa-se de quartos para oitavos, isto é, para pedaços menores



Para não alterar a quantidade inicial, é preciso pegar mais pedaços (o dobro) de oitavos. É o que ocorre quando se multiplica o numerador: pega-se mais partes.

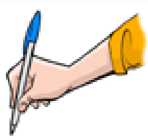
$\frac{}{4}$ (quartos) $\rightarrow$ $\frac{}{8}$ (oitavos)

$\frac{2}{4}$ (dois) $\rightarrow$ $\frac{4}{8}$ (quatro)

Outra maneira de verificar a equivalência é pela "multiplicação em cruz":

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} \rightarrow 2 \times 8 = 4 \times 4$$

Atividade 7

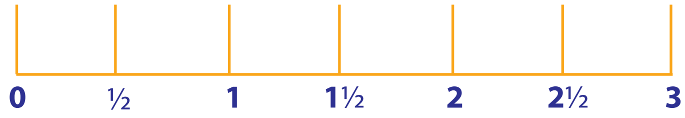


Explique com suas palavras porque, multiplicando-se o numerador e o denominador de um número fracionário por um mesmo número, obtemos uma fração equivalente à fração dada.

Representando as frações na reta numérica

Podemos marcar os números naturais sobre uma semi-reta, igualmente espaçados.

Também podemos marcar frações sobre esta semi-reta:



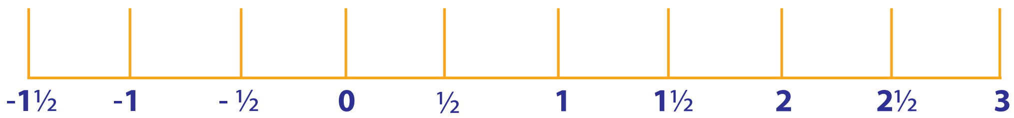
Se marcarmos décimos nesta semi-reta, teremos:

|-|-|-|-|-|------------------------------------

0 5/10 (ou ½)

Para marcar centésimos, teríamos que dividir cada pedacinho acima em 10 partes; e, para marcar milésimos, dividir novamente cada um em 10 partes. Os pontos ficariam bem perto uns dos outros. Temos a impressão que as frações cobrem, ou enchem a semi-reta, mas isso não é verdade.

Também podemos representar números racionais negativos na reta numérica:



Representações decimais das frações

Dada uma fração, podemos obter a representação decimal da mesma por dois processos. Procurem entender a lógica de cada um:

a) escrevendo a fração como outra equivalente, com denominador potência de 10, e passando-a para a forma com vírgula. Exemplo:

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{25}} \quad \begin{matrix} \mathbf{(x4)} \longrightarrow \\ \mathbf{(x4)} \longrightarrow \end{matrix} \quad \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{100}}$$

Temos 8 centésimos, o que pode ser escrito **0,08**

b) Dividindo-se o numerador pelo denominador. Exemplo:

2	25
200	0,08
0	

Veja: já sabíamos que 2/25 = 2 ÷ 25. Por outro lado, fazendo a divisão com a representação decimal, obtemos 2 ÷ 25 = 0,08. Como os resultados de uma mesma divisão devem ser iguais, teremos 2/25 = 0,08.

Nesse caso, a divisão decimal teve resto zero. Dizemos que a fração tem representação decimal exata - o número de casas decimais após a vírgula é finito.

Agora veja o que ocorre quando procuramos a representação decimal da fração 1/3. Fazendo a divisão com decimais:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline & 0{,}333... \end{array}$$

Os pontinhos indicam que podemos sempre colocar mais um no algarismos 3 no resultado.

Obtemos $1 \div 3 = \frac{1}{3} = 0{,}333...$ A divisão não dá exata, o resto nunca se anula. O quociente tem uma parte que se repete infinitamente (o algarismo 3), chamado *período* da representação decimal. Ao fazer cálculos, só trabalhamos com um número finito de casa decimais, ou seja, com um valor aproximado de 0,333....

Observe:

Quando dividimos o numerador de uma fração (ou número fracionário) pelo denominador, para achar sua representação decimal, ocorre uma das duas coisas abaixo:

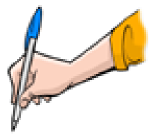
1) O resto é nulo. A representação decimal da fração é **finita ou exata.**

2) O resto nunca se anula. O quociente tem um número infinito de casas decimais, que se repetem após certo ponto. Dizemos que a fração tem uma representação decimal *infinita periódica*.

Portanto, só há duas formas para a representação decimal de uma fração:

exata	**infinita periódica**
(número finito de casas decimais)	(número infinito de casa decimais, com período)

Atividade 8



1) Procure a representação decimal e o período das frações. Se quiser, use a calculadora.

a) 21/111 b) 12/17

2) Assinale os números que são representações decimais de números fracionários:

b) 22,14

c) 131,27272727...........

d) 3,40440444044440444440........... (a lei de formação se mantém infinitamente)

Importante

Você aprendeu a passar da forma fracionária para a forma decimal. Mas como seria o contrário: passar da forma decimal para a forma fracionária ?

Se você partir de uma representação decimal finita ou exata de uma fração, isso será fácil:

$$\mathbf{12,859} = 12 + \frac{859}{1000} = \mathbf{12}\,\frac{859}{1000} = \frac{12.859}{1000}$$

Se você tiver uma representação decimal infinita periódica, será um pouco mais complicado passá-la para a forma fracionária, pois para entender isto precisará usar equações. Apenas para dar uma idéia:

1) Imagine que você quer saber a forma fracionária de 0,77777.... Como você não conhece essa fração, pode chamá-la de x:

$x = 0{,}7777....$ (1)

Podemos fazer muitas mudanças nessa equação, de modo que as novas equações terão ainda a mesma solução x. Algum matemático descobriu que uma mudança útil para descobrir a forma fracionária é multiplicar a equação por 10:

$10x = 7{,}777.....$ (2)

Descobriu também que, em seguida, devemos subtrair a equação (1) da equação (2):

$$\begin{array}{r} 10x = 7{,}777... \\ - \quad ....x = 0{,}777.. \\ \hline ....9x = 7{,}000... \end{array}$$

Temos 9x = 7, e podemos concluir que x = 7/9.

Será verdade? Faça a divisão de 7 por 9 (pode ser na calculadora) e comprove o resultado.

2) Se a representação decimal tiver um período com 2 algarismos, multiplique por 100 e faça de modo parecido ao anterior. Para descobrir a representação fracionária de 0,383838... :

$x = 0{,}\ 383838....$

$100\ x = 38{,}\ 383838.....$

$100x - x = 38{,}383838... - 0{,}3838....$

$99x = 38$

$x = 38/99$. Novamente, faça a divisão e comprove!

Objetivo 2 - Rever e sistematizar as operações com números racionais positivos

Somas e subtrações de números racionais positivos

Para somar números racionais do mesmo tipo, isto é, de mesma denominação - por exemplo, quartos com quartos - basta contar o total de pedaços que temos: 2 pedaços de 1 quarto mais 3 pedaços de 1 quarto dão 5 pedaços de 1 quarto.

Essa idéia, de tão fácil compreensão, é ensinada sob a forma de uma regra:

"Para somar duas frações de mesmo denominador, conservamos o denominador e somamos os numeradores", reduzindo-se assim a soma a uma manipulação de símbolos numéricos, o que esconde sua clara interpretação e dificulta a aprendizagem. O aluno vicia em procurar jeitos de mexer com os números - por exemplo, somar numeradores e denominadores entre si. Como se fosse mágica: junta-se duas quantidades de quartos, e, após a junção, elas viram oitavos.

O mesmo raciocínio lógico deve ocorrer nas subtrações: para fazer 6 décimos menos 2 décimos, basta retirar 2 décimos dos 6, ficando com 4 décimos.

A idéia é tão simples que, quando os números não são do mesmo tipo, devemos tratar de substituí-los por outros equivalentes a cada um deles, com denominadores iguais entre si, para então somá-los ou subtraí-los.

Em alguns casos, podemos facilmente escrever um dos números com o mesmo denominador do outro. No exemplo abaixo, substituímos ½ por 2/4:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$$

Há somas em que torna-se necessário mudarmos ambos denominadores . Veja:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

Não podemos expressar 1 meio em termos de terços, nem expressar 1 terço em termos de metades. Vamos dividir tanto a metade quanto a terça parte, transformando as duas em sextos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Um modo de transformar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ em sextos é o seguinte:

$$\frac{1}{2} = \frac{?}{6}$$ Verifique por quanto o 2 foi multiplicado para obter 6 (foi por 3). Multiplique o 1 pelo mesmo número $$\frac{1}{2} \overset{(x3)}{=} \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{?}{6}$$ Verifique por quanto o 3 foi multiplicado para obter 6 (foi por 2). Multiplique o 1 pelo mesmo número $$\frac{1}{3} \overset{(x\ 2)}{=} \frac{2}{6}$$

Você pode questionar como o denominador 6 foi encontrado. Ele tinha que ser um múltiplo dos dois denominadores (para poder multiplicar cada denominador por algum número e obter 6). A maneira mais simples de obter esse número múltiplo dos dois denominadores é fazendo o produto de ambos.

Mais um exemplo de soma de frações

Somar $4\frac{5}{6}$ com $9\frac{3}{4}$.

Trabalhe inicialmente com as partes $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$. O produto dos denominadores é 24. Vamos transformar $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$ em frações equivalentes, com denominador 24.

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24} \qquad (24 \div 6 = 4; \quad 5 \times 4 = 20)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24} \qquad (24 \div 4 = 6; \quad 3 \times 6 = 18)$$

Agora vamos trabalhar juntando as partes inteiras:

$$4\frac{5}{6} = 4\frac{20}{24}$$
$$+$$
$$9\frac{3}{4} = 9\frac{18}{24}$$

$$13\frac{38}{24} = 14\frac{14}{24} \longrightarrow$$

38 /24 = 24/24 + 14/24 = 1 + 14/24.

Juntamos esse 1 ao 13, formando 14.

Observações:

• Não usamos o menor múltiplo comum dos denominadores (também chamado mínimo múltiplo comum e representado por m.m.c.), que é 12, mas usamos o produto dos denominadores (24), que é um múltiplo comum de ambos, embora não seja o menor. Isso torna o processo mais curto.

- Não é necessário transformar as frações mistas, como $4\frac{5}{6}$ e $9\frac{3}{4}$ em

frações impróprias (isto é, maiores que a unidade): $4\frac{5}{6} = \frac{29}{6}$ e $9\frac{3}{4}$ = 39/4. Podemos somar as partes inteiras separadamente.

- Faça as contas horizontal ou verticalmente, como achar melhor.

Usando trocas na subtração

Numa festa da escola havia uma lata de sorvete com $3\frac{1}{2}$ kg de sorvete. Na primeira hora o pessoal já havia consumido $2\frac{4}{5}$ kg. Quanto ainda restava?

Vamos resolvê-la de modo semelhante ao da adição.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3\frac{1}{2} \rightarrow 3\frac{5}{10} \\
- & \\
 & 2\frac{4}{5} \rightarrow 2\frac{8}{10} \\
\hline
\end{array}
$$

De $\frac{5}{10}$ não podemos tirar $\frac{8}{10}$, e ficar com uma fração. Devemos tomar uma unidade das 3 que temos (em 3 5/10) e trocá-la por 10 décimos. Juntamos com os 5 que já tínhamos e ficamos com 15 décimos:

$$3\frac{5}{10} \rightarrow 2\frac{15}{10}$$

$$
\begin{array}{rl}
2\frac{15}{10} & \\
 & - \\
2\frac{8}{10} & \\
\hline
\frac{7}{10} &
\end{array}
$$

Portanto ainda restam $\frac{7}{10}$ kg de sorvete.

Mesma operação, com decimais:

Outro modo de resolver seria com o uso da representação decimal.

$3\frac{1}{2} = 3\frac{5}{10} = 3{,}5$ $\qquad$ $2\frac{4}{5} = 2\frac{8}{10} = 2{,}8$ $\qquad$ $3{,}5 - 2{,}8 = 0{,}7$

Se você quiser usar uma calculadora, deve saber que ela não faz operações com frações. Você precisa antes expressar as frações na representação decimal, como fizemos acima.

Comparando números racionais positivos

Usando frações equivalentes, podemos também comparar frações e números fracionários. Transformando $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$ nas frações equivalentes 9/15 e 10/15, conclui-se facilmente que a maior entre as duas é 2/3.

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} \qquad\qquad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

Situações multiplicativas e de divisões

Além de entender processos multiplicativos de números fracionários, ou racionais positivos, um ponto importante é o de interpretar essa multiplicação, compreendendo que é possível utilizá-la para o cálculo de fração de uma quantidade. Nesse sentido, o número fracionário é visto como um operador.

Entendendo o significado da multiplicação de números racionais

Já vimos, na seção 2, como a multiplicação de um número natural por um número fracionário pode ser interpretada como uma soma de parcelas repetidas. Esse tipo de multiplicação aparece, com freqüência, no aumento ou redução de uma receita culinária, em ampliações ou reduções de gravuras. Chegamos a evidenciar que, na multiplicação de um natural por uma fração, basta multiplicar os numeradores e conservar o denominador.

Sabemos que um processo análogo é usado também quando as duas frações têm denominadores diferentes de 1. Podemos questionar – por que multiplicar os numeradores e os denominadores leva ao resultado da multiplicação?

Uma idéia sobre a lógica do processo geral de multiplicação das frações

Quando calculamos 3x $\frac{1}{2}$, desejamos saber quanto vale 3 vezes a quantidade $\frac{1}{2}$.

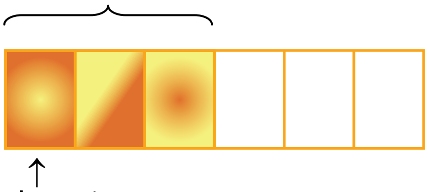
De modo mais geral:

Quando multiplicamos $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$, procuramos saber: quanto vale 2 terços de ½ ?

Podemos fazer em duas etapas: primeiro achamos 1 terço de meio; e depois multiplicamos por 2, para calcular 2 terços de meio.

- Para achar 1 terço de meio, dividimos a metade em três partes iguais:

meio



1/3 de meio

Precisamos de 6 dessas novas partes para formar a unidade (3 em cada metade). Portanto, ao dividir a metade em três partes, obtemos terços da metade, e sextos da unidade: $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$. Nessa passagem, o denominador foi multiplicado por 3.

Ou seja, a divisão da metade ($\frac{1}{2}$) em 3 partes iguais pode ser feita multiplicando o denominador 2 por 3.

Temos $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Como havíamos planejado, tendo o valor de 1 terço de $\frac{1}{2}$, devemos multiplicá-lo por 2. Teremos $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$.

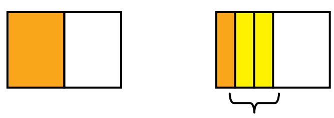
Repare: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} \overset{(1)}{=} 2 \times (\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}) \overset{(2)}{=} 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ da unidade.

Em (1), foi como se tivéssemos multiplicado os denominadores

Em (2), foi como se tivéssemos multiplicado os numeradores.

Resumindo: $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$

Vendo por outro ângulo o resultado $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$



½ 2/3 de ½

Observe que, para se obter 2/3 da metade, ela foi dividida em 3 partes e foram tomadas duas. A parte amarela corresponde, portanto, a 2/3 da metade.

Em relação à unidade toda, vemos que são necessários 6 pedacinhos amarelos para preenchê-la. Esses pedacinhos representam, portanto, sextos da unidade. 2 deles correspondem a 2/6 da unidade.

Embora esse recurso a esquemas feitos com divisões de quadra-

dos tenha certo poder de esclarecimento, principalmente se estamos acostumados aos padrões tradicionais de ensino, discordamos de que esse recurso seja usado de modo constante e quase único. Isso porque tais práticas levam o aluno a atuar, momentaneamente, com base numa comprovação local e visual, impedindo a abstração e construção mental de relações entre esses números.

Esses são fatos importantes:

Do mesmo modo que, multiplicando $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$, obtivemos $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$, teremos:

Multiplicando $\frac{2}{3}$ x 12,00, o resultado corresponde a $\frac{2}{3}$ de 12,00.

Multiplicando $\frac{3}{5} \times 1\frac{1}{2}$, o resultado corresponde a $\frac{3}{5}$ de $1\frac{1}{2}$.

Sempre que você quiser achar fração de outra fração ou de certa quantidade, basta multiplicar uma pela outra.

Podemos dizer que, na multiplicação, a fração $\frac{2}{3}$ opera sobre a quantia 12,00, resultando numa quantia que vale 2/3 de 12,00.

Também $\frac{3}{5}$, ao ser multiplicado por $1\frac{1}{2}$, opera sobre esse número, resultando em outro que vale $\frac{3}{5}$ de $1\frac{1}{2}$.

Calculando fração de uma quantidade

Calcular 2 terços de 1 litro e meio.

Pode-se dividir $1\frac{1}{2}$ litros por 3 e obter ...... (faça mentalmente), depois multiplicar por 2 e obter ...... Ou fazer uma multiplicação:

$$\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \text{-----}.$$

Usando decimais

Para ver quanto dá 6/15 de R$500,00, você viu que pode multiplicar esses dois números. Para fazer na calculadora, você pode expressar 6/15 na forma decimal e multiplicar este número decimal por 500,00. Você vai ter:

$6/15 = 6 \div 15 = 0.4$

$0.4 \times 500{,}00 = 200{,}00$.

Relacionando multiplicação e divisão

Na questão apresentada anteriormente, da multiplicação de 2/3 por ½, queremos ressaltar certas imbricações havidas, entre multiplicação e divisão.

Primeiro, o fato de que a divisão de $\frac{1}{2}$ em 3 partes iguais pôde ser feita multiplicando o denominador 2 por 3 (2 x 3 = 6), obtendo-se o resultado $\frac{1}{6}$.

Em linguagem matemática: $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Em outras palavras: Dividir uma fração ($\frac{1}{2}$) por 3 equivale a multiplicá-la por $\frac{1}{3}$.

Divisão como partilha e como medida

Assim como ocorria com a divisão de números naturais, também a divisão de números fracionários, ou racionais positivos, está associada a situações de partilha e de medida. Na partilha, temos a divisão equitativa; na medida, temos a formação de grupos ou porções de tamanho pré-determinado. Um ponto a ressaltar é que a divisão como partilha nem sempre será possível com frações; mas a divisão como formação de grupos de tamanho fixado (medida) será sempre aplicável. Realizaremos as divisões de modos variados, dando prioridade ao entendimento, e chegaremos a alguns algoritmos sistematizados, percebendo a lógica subjacente.

Partilha

Na divisão como partilha, uma quantidade é dividida igualmente num certo número de partes. Ao final vemos com quanto cada parte ficou.

Por exemplo, se dividimos $\frac{1}{4}$ de bolo em duas partes iguais, sabemos que cada parte valerá $\frac{1}{8}$ de bolo. Ou se temos $\frac{6}{8}$ de pizza para dividir entre 3 pessoas, cada uma receberá $\frac{2}{8}$ de pizza.

Formação de grupos ou porções

Se pensamos na divisão $2 \div \frac{1}{2}$, fica difícil imaginar uma situação de partilha para essa divisão. Como vamos dividir 2 para $\frac{1}{2}$ pessoa, ou para meia parte?

Mas a divisão tem também outra interpretação: de formar grupos, ou, quando estamos trabalhando com divisão de frações, formar pacotes, porções ou partes.

Essa outra interpretação vai nos ajudar a ver o que significa $2 \div \frac{1}{2}$. Nesse caso, temos 2 unidades e procuramos formar porções de ½ unidade. Um exemplo: imagine duas maças, separe-as em pedaços de metades, e veja depois quantos pedaços conseguiu formar. Com sua imaginação, um desenho ou manipulando concretamente, você consegue ver que aparecem 4 pedaços de $\frac{1}{2}$ maçã.

Escrevemos: $2 \div \frac{1}{2} = 4$.

Isso tem uma interpretação como medida: Em 2 maçãs cabem 4 pedaços de ½ maçã. Veja outro exemplo:

$$\frac{8}{10} \div \frac{2}{10} = 4.$$

Com 8 décimos do bolo formamos 4 porções de 2 décimos cada uma.

Ou: $\frac{2}{10}$ cabem 4 vezes em $\frac{8}{10}$.

Na verdade, para saber o resultado, basta você dividir seus 8 pedaços por 2. É como se você estivesse fazendo uma divisão de números naturais: com 8 pedaços, formar grupos de 2. Você resolve fazendo $8 \div 2 = 4$. Nesse caso, a divisão de frações pôde ser reduzida a uma divisão de números naturais:

$$\frac{8}{10} \div \frac{2}{10} = 8 \div 2 = 4$$

Não mudaria nada se você estivesse outro tipo de pedaços, menores ou maiores, cujo nome fosse dado por outro denominador. Digamos que fossem 8/100 ÷ 2/100. Novamente você teria 8 pedaços para separar em grupos de 2. Formaria 4 grupos:

$$\frac{8}{100} \div \frac{2}{100} = 8 \div 2 = 4$$

O raciocínio feito permite afirmar que isso vale em geral: se temos m pedaços de certo tipo, para agrupar em n pedaços do mesmo tipo, conseguiremos formar m ÷ n grupos. Ou seja, para dividir dois números fracionários de mesmo tipo (mesmo denominador), basta dividir os numeradores, na ordem em que aparecem.

Mas a divisão dos numeradores pode não ser um número natural. Veja:

$$1\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} =$$

Para usar o processo desenvolvido, devemos escrever a fração mista na forma de fração imprópria, e expressar ambas frações com denominadores iguais.

$$1\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{9}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{9}{8} \div \frac{2}{8}$$ Prosseguindo:

$\frac{9}{8} \div \frac{2}{8} = 9 \div 2$ Você sabe que o resultado dessa divisão é $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

Interpretação

A divisão $1\frac{1}{8} \div \frac{1}{4}$ pode ser pensada como medida: separar $1\frac{1}{8}$ em pedaços de $\frac{1}{4}$, ou seja, verificar quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em $1\frac{1}{8}$.

Poderíamos ter calculado mentalmente? Sabemos que $\frac{1}{4}$ cabe 4 vezes em 1.

Mas quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em $\frac{1}{8}$? Nenhuma vez, porque $\frac{1}{4}$ é o dobro de $\frac{1}{8}$. Isso nos dá idéias. Sendo o dobro, só metade dele caberá. Em outras palavras, $\frac{1}{4}$ cabe meia vez em $\frac{1}{8}$. Concluindo, $\frac{1}{4}$ cabe 4 vezes e meia em $1\frac{1}{8}$.

Verificando a propriedade geral

O processo de divisão de números fracionários que desenvolvemos vale em geral e pode ser comprovado por uma multiplicação:

$$\frac{8}{10} \div \frac{2}{10} = 8 \div 2 = 4$$

Devemos ter quociente x divisor = dividendo. De fato, $4 \times \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$

O processo usual para dividir frações

Na maioria dos livros didáticos, encontramos que, para se dividir frações, devemos multiplicar a primeira pelo inverso da segunda.

Assim: $\frac{6}{5} \div 3 = \frac{6}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Uma idéia sobre a lógica do processo usual da divisão de números fracionários

A lógica desse processo assenta-se sobre uma propriedade da divisão, que já valia nos números naturais:

Em qualquer divisão, multiplicando-se o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera (embora o resto fique multiplicado pelo mesmo número). Exemplificando;

	$7 \div 2 = 3$ (resto 1)
Multiplicando ambos os termos por 2:	$14 \div 4 = 3$ (resto 2)
Multiplicando ambos os termos por 3:	$21 \div 6 = 3$ (resto 3)

Vamos usar essa propriedade para dividir números fracionários:

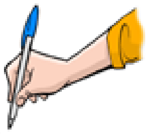
$$\frac{6}{5} \div 3 =$$

Como podemos multiplicar os dois números por um mesmo número, sem alterar o resultado, vamos ser espertos e escolher um número que facilite nossos cálculos. Esse número é o inverso do divisor:

$$\frac{6}{5} \div 3 = \left(\frac{6}{5} \times \frac{1}{3}\right) \div \left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{6}{5} \times \frac{1}{3}\right) \div 1 = \frac{6}{5} \times \frac{1}{3}$$

Veja na forma fracionária:

$$\frac{6}{5} \div 3 = \frac{\frac{6}{5}}{3} = \frac{\frac{6}{5} \times \frac{1}{3}}{3 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{6}{5} \times \frac{1}{3}}{1} = \frac{6}{5} \times \frac{1}{3}$$



Atividade 9

Pesquise, na Internet, informações sociais ou geográficas relevantes expressas por números na forma fracionária.

Inverso de um número racional

No quadro acima, usamos o termo inverso do divisor. Todo número racional tem um inverso. Um número multiplicado por seu inverso dá 1. O inverso de a/b é b/a. O inverso de 5 é 1/5.

Já observamos que dividir um número por 2 é o mesmo que multiplicá-lo por $\frac{1}{2}$.

Isso é verdade porque 2 e $\frac{1}{2}$ são inversos um do outro. Vale em geral: dividir um número por a/b é o mesmo que multiplicá-lo por b/a. Por exemplo:

$$10 \div \frac{1}{5} = \frac{50}{5} \div \frac{1}{5} = 50$$

$$10 \times 5 = 50$$

Esse fato pode ser aplicado em problemas interessantes.

Se 3/2 de uma quantidade vale 18, qual é essa quantidade?

Usando só divisões e multiplicações de números naturais, teríamos:

3 meios de uma quantia valem 18. Dividindo 18 por 3, temos 1 meio da quantia.

- 1 meio da quantia vale $18 \div 3 = 6$
- Se 1 meio da quantia vale 6, a quantia toda é 12.

Pensando em números fracionários:

$\frac{3}{2}$ de certa quantidade é igual a 18. Portanto:

$\frac{3}{2}$ x (essa quantidade) = 18.

Numa multiplicação, o produto (18) dividido por um dos fatores ($\frac{3}{2}$) é igual ao outro fator:

$$18 \div \frac{3}{2} = \text{“quantidade”}$$

Mas dividir por 3/2 dá o mesmo que multiplicar pelo seu inverso 2/3:

$$18 \times \frac{2}{3} = \text{“quantidade”}$$

$$\frac{36}{3} = 12 = \text{“quantidade”}$$

Objetivo 3 - Compreender razão, proporção e porcentagem

Relacionando números racionais positivos a razão e porcentagem

Situação 1

Em certo problema visto na Seção 1, apareceu uma relação constante entre número de pizzas e número de pessoas. Podemos pensar em razão e proporção.

Tínhamos inicialmente 18 pizzas para 24 pessoas, e isso nos dá uma razão, associada à fração 18/24 = ¾. O total de pizzas corresponde a ¾ do total de pessoas.

Quando o problema propôs várias distribuições das pessoas e das pizzas num certo número de mesas, esta relação, ou esta razão, permaneceu constante:

9 para 12 . Fração: 9/12 = ¾. As pizzas correspondem a ¾ do número de pessoas.

6 para 8 Fração: 6/8 = ¾. As pizzas correspondem a ¾ do número de pessoas

3 para 4 Fração: ¾. As pizzas correspondem a ¾ do número de pessoas

Quando, em certa situação, há uma razão que se mantém constante, podemos falar em proporcionalidade. Temos:

$$\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Os numeradores expressam os números de pizzas; os denominadores expressam os números de pessoas. Dizemos que, em todas as distribuições feitas, o número de pizzas é proporcional ao número de pessoas – a razão pizzas/pessoas é constante.

Situação 2

Numa escola, com 4 classes, as relações entre o número de alunas e o número de alunos, em cada classe, são:

14 para 16; 18 para 12 ; 10 para 20 ; 25 para 15.

As frações associadas são:

$$\frac{14}{16} = \frac{7}{8} \quad ; \quad \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

Em cada sala, há uma razão diferente entre o número de meninas e o de meninos.

Pensando nas diversas salas, não há proporcionalidade entre o número de alunas e o número de alunos.

Situação 3

Numa classe de 40 alunos, a relação entre o número de alunos que preferem suco de laranja e os que preferem outros sucos é de 5 para 3. Quantos alunos preferem suco de laranja e quantos preferem outros sucos?

- Você pode fazer por tentativas, até obter uma relação que dê o total de alunos:

5 para 3 (total 8)

10 para 6 (total 16)

15 para 9 (total 24)

20 para 12 (total 32)

25 para 15 (total 40)

É isso: 25 alunos preferem suco de laranja e 15 preferem outros sucos.

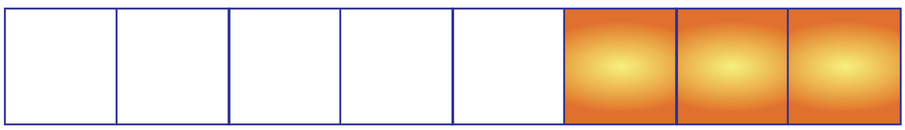
- Será que poderia ser resolvido de outro modo? Veja:

Como a relação é de 5 para 3, o número de alunos que preferem suco de laranja é igual a 5/3 dos demais alunos.

A classe ficou dividida em dois grupos:

5 terços dos demais alunos Demais alunos

Podemos pensar os demais alunos divididos em 3 partes, e os que preferem suco de laranja correspondendo a 5 partes dessas.



Dessa forma a sala fica dividida em 8 partes: 5 partes preferem suco de laranja, 3 partes preferem outros sucos.

$40 \div 8 = 5$

$5 \times 5 = 25$ (preferem suco de laranja)

$3 \times 5 = 15$ (preferem outros sucos)

- Também podemos pensar que, em cada 8 alunos, 5 preferem suco de laranja. Como queremos a mesma razão no total da classe, devemos ter $\frac{5}{8} = \frac{X}{40}$. Logo 8x = 5.40, ou seja, 8x = 200 e x = 25.

Porcentagem

Muitas vezes, para ter uma visão melhor do que uma razão significa, costuma-se expressá-la em relação a 100, ou com denominador 100.

Fazer isso facilita a comparação de razões. Veja a situação:

Situação 4

Numa comunidade A, de 25 crianças em idade escolar, 6 não vão à escola, e numa comunidade B, de 20 crianças em idade escolar , 5 não vão à escola.

Na comunidade A, a relação é de 6 para 25, ou de 6/25.

Na comunidade B, a relação é de 5 para 20, igual a 5/20.

Não é tão evidente perceber qual comunidade está em melhor situação.

Mas se escrevermos essas frações com denominador 100, teremos:

$$\frac{6}{25} = \frac{24}{100}$$

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100}$$

Ou seja, a comunidade A está em melhor situação, porque ela tem 24/100 das crianças em idade escolar fora da escola, enquanto a comunidade B tem 25/100 das crianças em idade escolar fora da escola.

Nesses casos também usamos a expressão *por cento*. A relação 6 em 25 é o mesmo que 24 em 100. Em ambas relações, as crianças fora da escola representam 24 por cento das crianças em idade escolar.

Porcentagens são importantes em várias situações: no cálculo de descontos, em aumentos percentuais etc.

Situação 5

Você olhou dois modelos de televisor. Um custa R$320,00, e o outro R$ 340,00. Você está gostando mais do modelo mais caro, mas, na hora de fazer a compra, o vendedor disse quais seriam os descontos: o de R$320,00 sairia por R$ 280,00 e o de R$340,00 sairia por R$ 305,00. Aí você fica indeciso, porque de repente o desconto no mais barato é melhor que o do outro, e isso o torna mais competitivo.

Para decidir, é bom você saber quais os percentuais de desconto em cada um:

No primeiro caso, o desconto foi de 40,00 em 320,00.

No segundo caso, foi de 35,00 em 340.

$$\frac{40}{320} = \frac{1}{8} = \frac{?}{100}$$ Verifique por quanto 8 foi multiplicado para se obter 100.

Para fazer isso, divida 100 por 8 : $100 \div 8 = 12{,}5$.
Multiplique o numerador pelo mesmo número.

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 12{,}5}{8 \times 12{,}5} = \frac{12{,}5}{100}$$ No televisor mais barato, o desconto foi de 12,5%.

$$\frac{35}{340} = \frac{7}{68} = \frac{?}{100}$$ Verifique por quanto 68 foi multiplicado para se obter 100.

Para fazer isso, divida 100 por 68 : $100 \div 68 = 1{,}47$

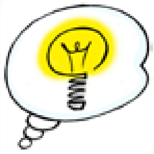
Multiplique o numerador pelo mesmo número.

$$\frac{7}{68} = \frac{7 \times 1{,}47}{68 \times 1{,}47} = \frac{10{,}29}{100}$$ No televisor mais caro, o desconto foi de 10,29%.

Agora é com você: o modelo em que você estava pensando, além de mais caro, terá um desconto relativamente menor. Você decide se ainda assim vai comprá-lo.

Pesquise

Faça um levantamento, na sua escola, do que tem sido efetivamente mudado com referência ao ensino de frações: plano de ensino, tópicos efetivamente desenvolvidos em sala de aula, metodologia, o espaço de manifestação e argumentação concedido ao aluno etc.



Reflita

Como passar de uma posição de professor tradicional de matemática, que tudo ensina numa forma pronta, para a de um professor atualizado, que dá tempo para a produção infantil e considera essa produção como parte do processo de ensino e aprendizagem? Este fascículo contribuiu para isso? Como?

Discuta (com o seu monitor e com os tutores da área)

A validade de procurar fazer uma introdução às frações, sem uso da simbologia.

A validade de procurar construir, nas séries iniciais, algoritmos operatórios para os números fracionários mais próximos dos processos infantis.

Bibliografia

Amato, S. R. A.(1988). Frações. Projeto: Um novo currículo de matemática para o 1º grau. Mat/UnB. MEC/CAPES/PADCT. Subprograma Educação para a Ciência. Apostila mimeografada.

Bertoni, N.E. (1986). Algoritmos flexíveis e homogêneos para os diversos conjuntos numéricos. Texto xerocopiado. Anexo do Relatório de Atividades do Projeto Um Novo Currículo de Matemática da 1ª a 8ª Série. 1º semestre de 1986. Mat-UnB/CAPES-MEC/PADCT. Brasília: Universidade de Brasília, Departamento de Matemática.

Bertoni, N. E.. (1992) BRINCAR, PENSAR, FAZER *Caderno de atividades de matemática - 3a. série, 2o. bimestre; Roteiro do professor - 3a. série, 2o. bimestre; Roteiro do professor - 3a. série, 2o. bimestre, parte 2; Caderno de atividades - 4a. série, 3o. bimestre; Roteiro do professor - 4a. série, 2o. bimestre; Roteiro do professor - 4a. série, 3o. bimestre. Brasília: Apostilas xerocadas para aprendizagem das séries iniciais:*

Bertoni, *N. E.. (1993) BRINCAR, PENSAR, FAZER. Aprendendo mais sobre multiplicação de frações - 5a. série; Aprendendo mais sobre divisão de frações - 5a. série; Razão e porcentagem - 5a. série.* Brasília: Apostilas xerocadas para aprendizagem das séries iniciais.

Bertoni, N. E. (1994). Matemática para Jovens e Adultos. Entendendo e Usando as Frações. Brasília: Fundação Educacional do Distrito Federal.

Bertoni, N.E. (1994). A construção do conceito de fração e de número fracionário numa abordagem sócio-construtivista. Solta a Voz. Número 6. Universidade Federal de Goiás.

Bertoni, N.E. et al. (1998). Em Menezes, M. B. e Ramos,W.(org.). PROFORMAÇÃO. Guia de Estudo. Módulo I– Volume 7. Brasília: MEC. FUNDESCOLA.

Bertoni, N.E. et al. (2000). Em Menezes, M. B. e Ramos,W.(org.). PROFORMAÇÃO. Guia de Estudo.Módulo II – Unidade 1.Brasília: MEC. FUNDESCOLA.

Bertoni, N.E. (2008). A construção do número fracionário. In: Boletim de Educação Matemática, ano 21, n.31. Rio Claro: UNESP. (No prelo).

BRASIL (1998).Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série). Brasília: MEC/SEF.

Cotosk, V., Ferreira, M.C.C., Jordane, A., Moreira, P.C., Sander, L.V., Soares, E.F., Vasconcelos, N.P. (1998). Da noção de fração ao conceito de número racional (cap.1). In: Números racionais e reais: as concepções dos alunos e a formação do professor - Relatório de pesquisa – Departamento de Matemática/UFMG/SPEC.

Moro, M.L.F e Starepravo, A. R. As crianças e suas notações na solução de problemas de multiplicação. In: Moro, M.L.F. e Soares, M.T.C.(org). Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola. Curitiba: Editora UFPR, 2005. p. 107 a 142.
Nunes, T. e Bryant, P. (1997) Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas.

Ohlson, S. Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts (1991). In: Hiebert,J.& Behr, M. (Eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Research Agenda for Mathematics Education. NCTM.

Romberg, T.A. (editor). (1995).Reform in school mathematics and authentic assessment. State University of New York Press. Albany,. (Review)

Santos, Y. K. de O. (2006). Matemática: porque uns gostam e outros não? 2006. Trabalho final de curso (Pedagogia). Universidade de Brasília, Faculdade de Educação, Brasília.

Tropfke, J. (1980). Geschichte der Elementarmathematik . Volume 1. Berlin, New York: de Gruyter.

Vergnaud, G. The acquisition of arithmetical concepts. In : Educational Studies in Mathematics. n.10, 1979. p.263 a 274.